

## *Conseguenze del Teorema di Lagrange*

### *1) Criterio di monotonia*

*Sia  $f(x):[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ , continua in  $[a,b]$ , e derivabile in  $(a,b)$ .*

*Allora:*

*$f$  è crescente in  $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$*

*$f$  è decrescente in  $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in [a,b]$*

## Conseguenze del Teorema di Lagrange, Criterio di monotonia

### *Dimostrazione.*

Sia  $f'(x) \geq 0$  e siano  $x_1, x_2 \in [a, b]$  con  $x_2 > x_1$ .

Per il Teorema di Lagrange  $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

ma  $f'(x_0) \geq 0$  e  $x_2 - x_1 > 0$

$$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

## *Conseguenze del Teorema di Lagrange, Criterio di monotonia*

*Viceversa.*

*Sia  $f(x)$  crescente in  $[a, b]$ .*

*Allora  $\forall x, x + h \in (a, b)$ , si ha*

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

*Facendo il limite per  $h \rightarrow 0$  si ha*

$$f'(x) \geq 0$$

## *Conseguenze del Teorema di Lagrange, Criterio di monotonia*

*Analoga dimostrazione per*

*$f$  è decrescente in  $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$*

*Si ha inoltre*

*$f'(x) > 0 \Rightarrow$  strettamente crescente*

*$f'(x) < 0 \Rightarrow$  strettamente decrescente*

## *Conseguenze del Teorema di Lagrange*

2) *Sia  $f(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile in  $(a,b)$ .*

$$f \text{ è costante} \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

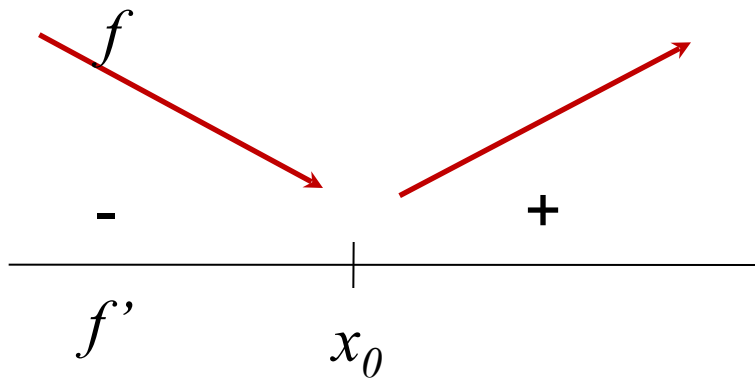
3) *Sia  $x_0 \in (a,b)$  e  $f'(x_0) = 0$*

*Se esiste un intorno destro (sinistro), in cui  $f'(x) > 0$*

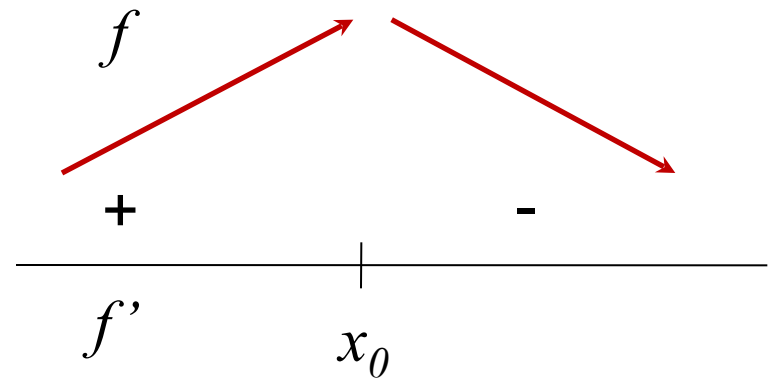
*e un intorno sinistro (destro) in cui  $f'(x) < 0$  ,*

*allora  $x_0$  è un punto di minimo (massimo) relativo.*

# Conseguenze del Teorema di Lagrange



$x_0$  minimo relativo



$x_0$  massimo relativo

## *Esercizio*

*Determinare i punti di massimo o di minimo relativo per la funzione  $f(x) = x^3 - 12x$*

*Esercizio*

*Determinare un intervallo in cui*  $f(x) = \frac{2 + \cos x}{2 - \cos x}$   
*è crescente*

## *Teorema di Cauchy*

*Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ :*

- i)  $f$  e  $g$  sono continue in  $[a, b]$ ;*
- ii)  $f$  e  $g$  sono derivabili in  $(a, b)$ .*

*Allora se  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b), \exists x_0 \in (a, b)$ :*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

## *Teorema di Cauchy*

### *Dimostrazione.*

*Si consideri la funzione ausiliaria*

$$\varphi(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \right]$$

*Essendo  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ ,*

*allora  $g(b) \neq g(a)$ .*

## *Teorema di Cauchy*

*Inoltre*

- i)  $\varphi(x)$  è continua in  $[a,b]$ ;*
- ii)  $\varphi(x)$  è derivabile in  $(a,b)$ ;*
- iii)  $\varphi(a) = \varphi(b)$*

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) : \varphi'(x_0) = 0$$

*cioè*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

## *Teorema di de l'Hopital*

*Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni continue definite in un intorno di  $x_0$  (eccetto al piu'  $x_0$ , e  $x_0$  puo' essere finito o infinito), se*

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ (oppure } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty)$$

*2)  $f$  e  $g$  sono derivabili nell'intorno di  $x_0$  e risulta  $g(x), g'(x) \neq 0, \forall x \neq x_0$*

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ (esiste il limite finito o infinito)}$$

*Allora esiste anche il limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  e si ha*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

*Il teorema è valido anche per  $x \rightarrow x_0^+$  o  $x \rightarrow x_0^-$ , e per  $x \rightarrow \pm\infty$  ( $f$  e  $g$  derivabili in intervalli illimitati)*

## Dimostrazione.

*Dimostriamo il caso  $\frac{0}{0}$  con  $f$  e  $g$  definite e continue in un intorno destro di  $x_0$  escluso al più  $x_0$ , cioè  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0$  e  $l = \text{finito}$*

*Se  $f$  e  $g$  sono derivabili nell'intorno destro di  $x_0$  (eccetto al più in  $x_0$ ) e  $g'(x) \neq 0$ , se esiste il limite  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$  finito dobbiamo dimostrare che*

*esiste anche il limite  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$  ed è uguale a  $l$ . Se  $f$  e  $g$  non sono definite*

*in  $x_0$  allora le possiamo ridefinire per continuità, in tal modo così*

*ridefinite risultano continue da destra anche in  $x_0$ .*

*Sia  $x \in I_+(x_0)$  (intorno destro), allora  $f$  e  $g$  sono continue in  $[x_0, x]$  e*

*derivabili in  $(x_0, x)$ .*

*Applicando il Teorema di Cauchy nell'intervallo  $[x_0, x]$*

*Si ha che esiste un punto  $h = h(x)$  con  $x_0 < h(x) < x$  :*

$$\frac{f'(h)}{g'(h)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

*Passando al limite per  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow h(x) \rightarrow x_0$  e quindi*

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{h \rightarrow x_0} \frac{f'(h)}{g'(h)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

*Esercizio*

*Calcolare il limite*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

*Esercizio*

*Calcolare il limite*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\ln(1 + x^2)}$$

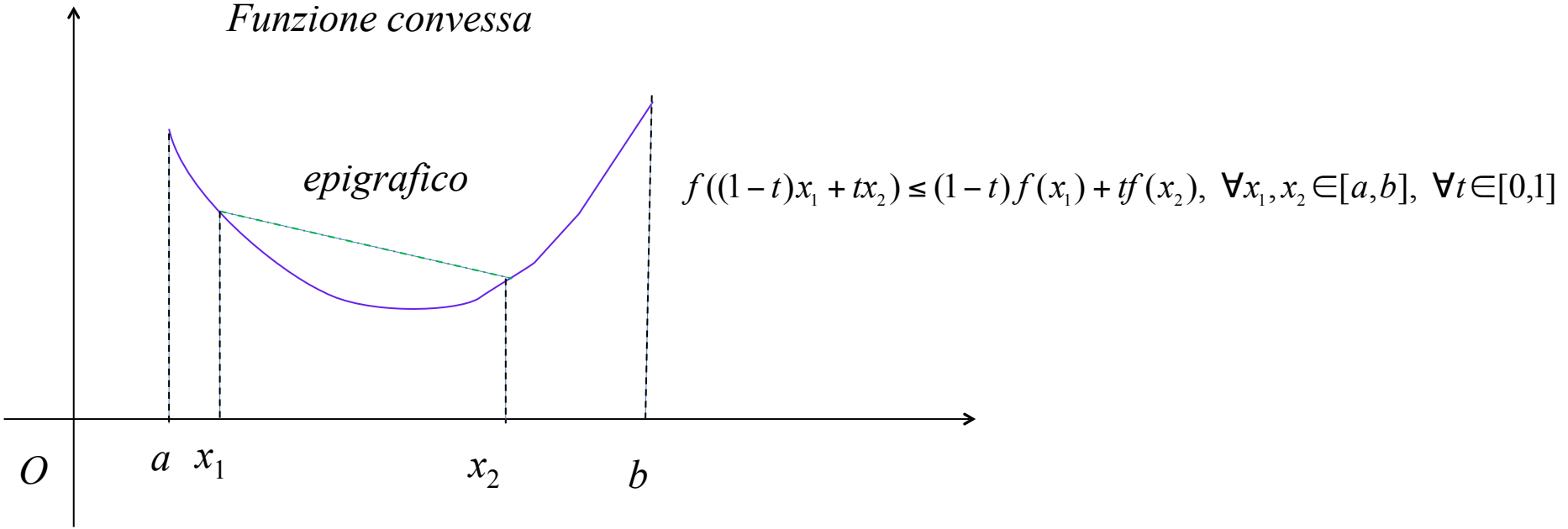
*Esercizio*

*Calcolare il limite*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

# Funzioni convesse e concave

Funzione convessa



## Definizione

Sia  $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , si chiama *epigrafico* (o *sopragrafico*) di  $f$  l'insieme

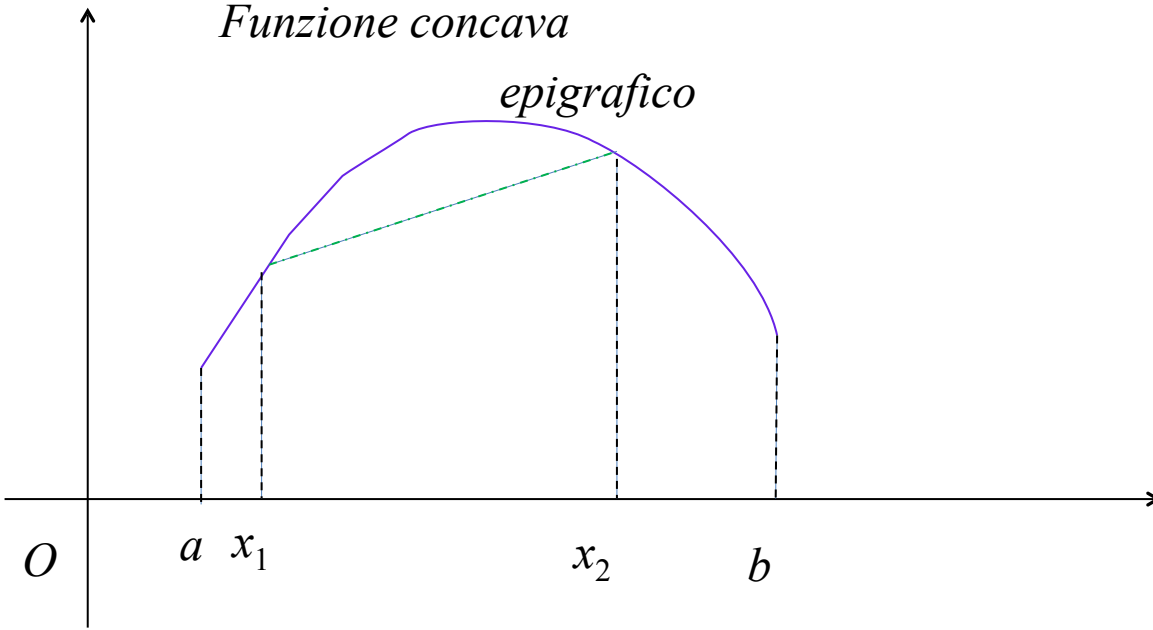
$$\text{epi } f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ e } y \geq f(x)\}$$

$f$  è *convessa* in  $[a, b]$  se il suo epigrafico è un insieme convesso

# Funzioni concave e concave

Funzione concava

epigrafico



$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b], \quad \forall t \in [0, 1]$$

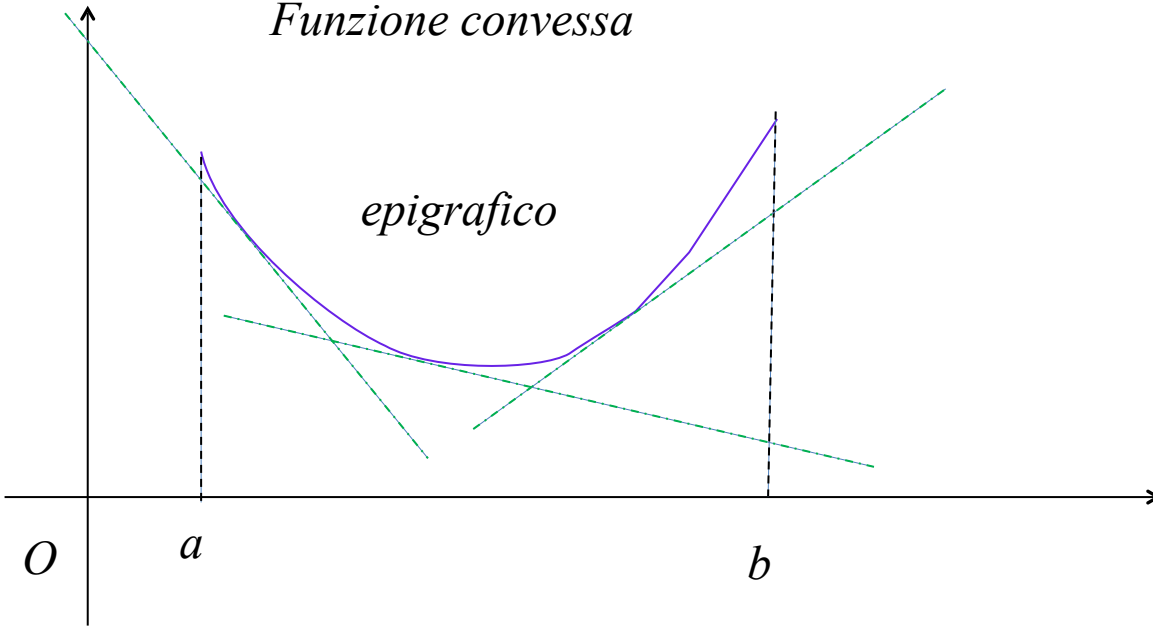
Analogamente:

$f$  è *concava* in  $[a, b]$  se il suo epigrafico è un insieme concavo

# Funzioni convesse e concave

Funzione convessa

epigrafico



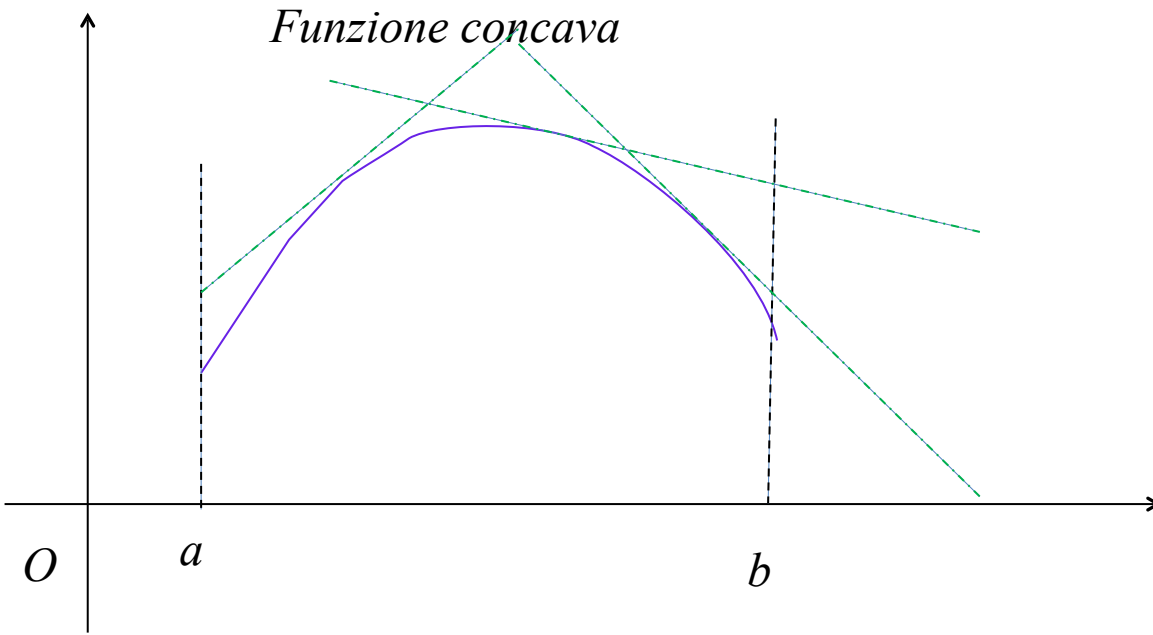
## Definizione

Sia  $f(x)$  derivabile in  $[a, b]$ ,

$f$  è convessa in  $[a, b] \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x, x_0 \in [a, b]$

Cioè  $\forall x_0$  il grafico di  $f$  sta al di sopra della retta tangente ad  $f(x)$  in  $(x_0, f(x_0))$

## Funzioni convesse e concave



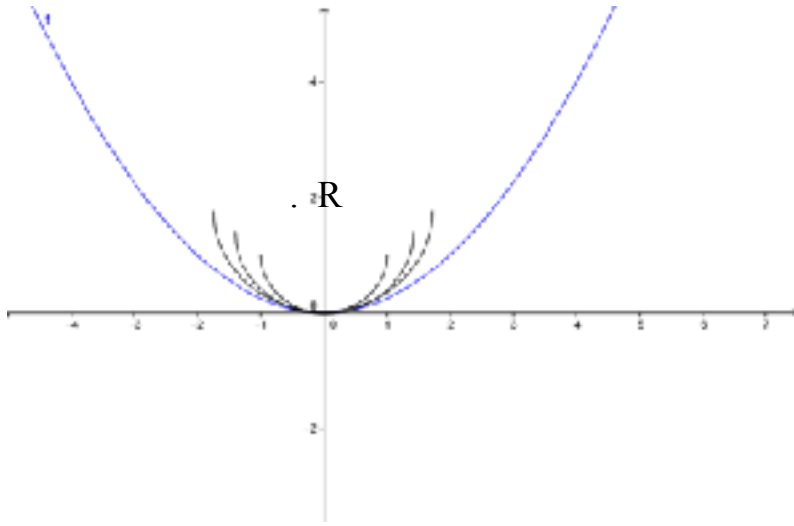
### Definizione

Sia  $f(x)$  derivabile in  $[a, b]$ ,  
 $f$  è concava in  $[a, b] \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x, x_0 \in [a, b]$

Cioè  $\forall x_0$  il grafico di  $f$  sta al di sotto della retta tangente ad  $f(x)$  in  $(x_0, f(x_0))$

## *Derivata seconda*

*La derivata seconda di una funzione  $f(x)$  rappresenta la velocità di variazione della pendenza del grafico di  $f(x)$*



$$f''(0) = \frac{1}{R}$$

*Curvatura del grafico di  $f(x)$  in  $x=0$*

## *Criterion of convexity*

Sia  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

a) Se  $f$  è derivabile in  $(a,b)$  allora

$f$  è convessa (concava)  $\Leftrightarrow f'(x)$  è crescente (decrescente)

b) Se  $f$  è derivabile due volte in  $(a,b)$  allora

$f$  è convessa (concava)  $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$  ( $f''(x) \leq 0$ ),  $\forall x \in (a,b)$

### Dimostrazione

Per dimostrare la parte a) si considerino in  $[a,b]$  due punti:  $x_1 < x_2$ , se  $f(x)$  è convessa si ha

$$f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1), \quad \forall x \in [a, b]$$

$$f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2), \quad \forall x \in [a, b]$$

$x$  è un qualunque punto di  $[a,b]$ , se  $x = x_2$  e  $x = x_1$  rispettivamente nella prima e nella seconda equazione si ha

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

Sommando membro a membro e semplificando si ha

$$0 \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2) = [f'(x_1) - f'(x_2)](x_2 - x_1),$$

cioè

$$[f'(x_2) - f'(x_1)](x_2 - x_1) \geq 0,$$

Essendo  $x_2 - x_1 > 0$ , allora deve aversi  $f'(x_2) \geq f'(x_1)$ , cioè  $f'(x)$  è crescente

Per dimostrare il viceversa cioè  $f'(x)$  *crescente*  $\Rightarrow f$  *convessa*,

si fissano due punti  $x$  e  $x_0$ , in  $[a, b]$  per esempio con  $x > x_0$  e si applica il Teorema di Lagrange alla funzione  $f$  nell'intervallo  $[x_0, x]$ :

$$\Rightarrow \exists x_1 \in [x_0, x] : f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0)$$

Per ipotesi  $f'(x)$  è crescente quindi  $f'(x_1) \geq f'(x_0)$  e si ha

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \quad (\text{perchè } x > x_0)$$

cioè  $f$  è convessa.

Per dimostrare la parte b) cioè  $f$  *convessa*  $\iff f''(x) \geq 0$  si usa la parte a) e si applica il criterio di monotonia alla  $f'(x)$

*Utilizzando il segno di  $f''(x)$  si può stabilire se  $x_0$  è un punto di massimo o un punto di minimo relativo per  $f(x)$ .*

**Infatti:**

*Sia  $f(x)$  derivabile due volte con derivata continua in un intorno di  $x_0 \in (a, b)$ , si ha*

*Se  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$  è punto di minimo relativo,*

*se  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$  è punto di massimo relativo.*

*Infatti, supponiamo che  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) > 0$  con  $f''(x)$  continua. Per il Teorema della permanenza del segno:  $f''(x) > 0$  in  $I(x_0, \delta) \Rightarrow$  è convessa in  $I$ :*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

*Ma*

$$f'(x_0) = 0, \Rightarrow f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x, x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

*cioè  $x_0$  è di minimo relativo per  $f$ .*

## *Criterion for relative maximum and minimum points*

*Sia  $f:(a,b)\rightarrow\mathbb{R}$ , derivabile  $n$  volte in  $x_0 \in (a,b)$ ,  $n \geq 2$ , e tale che in  $x_0$  tutte le derivate tranne l' $n$ -esima siano nulle. Allora:*

$$\text{se } n \text{ pari e } \begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 & x_0 \text{ è di minimo relativo} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 & x_0 \text{ è di massimo relativo} \end{cases}$$

*Se  $n$  è dispari  $x_0$  non è punto di estremo (si dice flesso a tangente orizzontale).*

## *Definizione.*

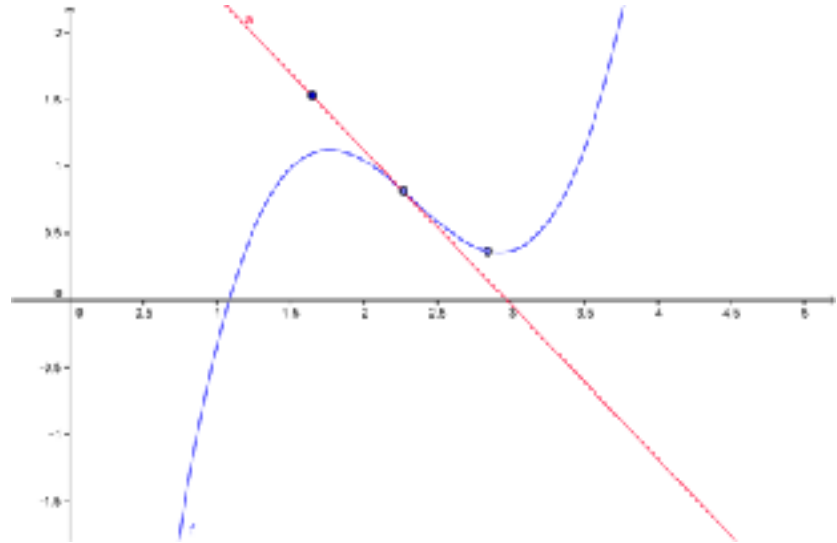
*Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in (a, b)$  un punto di derivabilità per  $f(x)$*

*oppure  $f'(x_0) = \pm \infty$*

*$x_0$  si dice di **flesso** se esiste un intorno destro di  $x_0$  in cui  $f$  è convessa (concava) ed un intorno sinistro in cui  $f$  è concava (convessa).*

*Se  $x_0$  è di flesso per  $f$ , ed esiste  $f''(x_0)$ , allora*

$$f''(x_0) = 0$$



## *Esercizio*

*Calcolare i punti di estremo e i punti di flesso della funzione  $f(x)=x^3 + 2x$*

## *Studio del grafico di $f(x)$*

- 1) Dominio di  $f(x)$ , intersezioni con gli assi cartesiani,*
- 2) Simmetrie;*
- 3) Limiti agli estremi del dominio (eventuali asintoti)*
- 4) Studio della derivata prima (crescenza, decrescenza, punti di estremo locale)*
- 5) Studio della derivata seconda: Concavità e convessità, flessi*

## *Studio del grafico di $f(x)$ , Asintoti*

*Se esiste una retta di equazione  $y=mx+q$ :*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (mx + q)\} = 0$$

*Allora  $y=mx + q$  si definisce asintoto obliquo per  $f(x)$ .*

*Si ha*

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$$

## *Studio del grafico di $f(x)$ , Asintoti*

*Se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ ,  $y = l$  si chiama asintoto orizzontale*

*Se l'asintoto orizzontale non c'è (il limite sopra è infinito) allora potrebbe esserci quello obliquo.*

*Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ,  $x = x_0$  si chiama asintoto verticale*

*con  $x_0$  punto di accumulazione per  $f$*

*Esercizio*

*Si disegni il grafico della funzione*  $f(x) = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$

*Esercizio*

*Si disegni il grafico della funzione*       $f(x) = xe^x$