

Massimo e minimo assoluti

Definizione

*Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che M è **massimo assoluto** (o **globale**) di f in $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$ è punto di massimo se*

$$f(x_0) = M \geq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

In modo analogo:

*Si dice che m è un **minimo assoluto** (o **globale**) di f in $[a, b]$ e $x_1 \in [a, b]$ è punto di minimo se*

$$f(x_1) = m \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Massimo e minimo relativi (o estremi locali)

Definizione

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che $x_0 \in [a, b]$ è un punto di **massimo relativo** (o **locale**) per $f(x)$ se $\exists I(x_0, \delta)$:

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in I(x_0, \delta)$$

In modo analogo:

Si dice che $x_1 \in [a, b]$ è un punto di **minimo relativo** (o **locale**) per $f(x)$ se $\exists I(x_1, \delta)$:

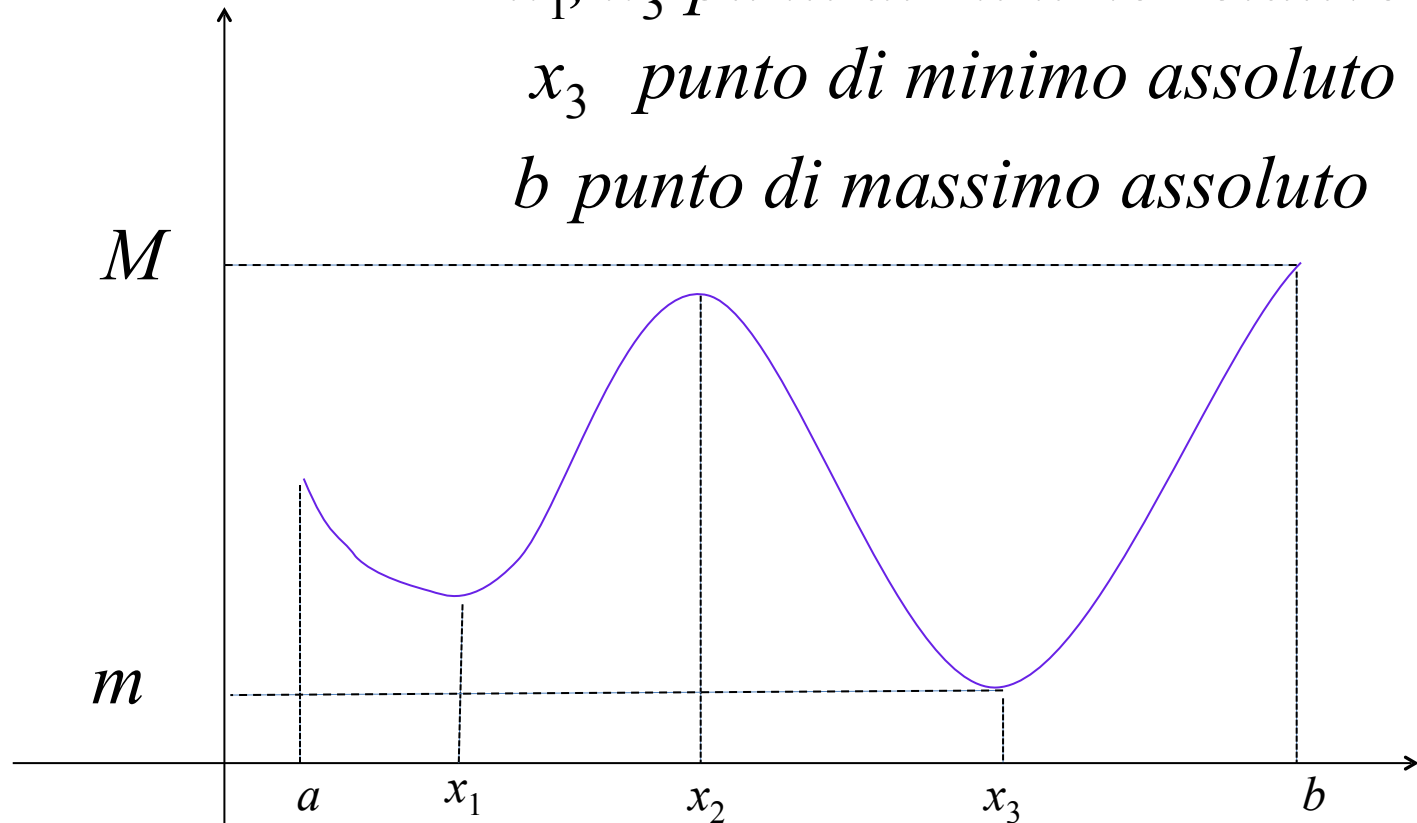
$$f(x_1) \leq f(x), \quad \forall x \in I(x_1, \delta)$$

a, b, x_2 punti di massimo relativo

x_1, x_3 punti di minimo relativo

x_3 punto di minimo assoluto

b punto di massimo assoluto



x è di max o min relativo in un intorno di x . (la relazione vale solo in I)

Punti Stazionari

Def. I punti in cui $f(x)$ ha derivata nulla ($f'(x) = 0$)

*Si dicono punti **stazionari** o **critici**.*

Teorema di Fermat

Sia $f(x)$ definita in $[a,b]$ e derivabile in $x_0 \in (a,b)$. Se x_0 è un punto di estremo locale allora

$$f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione

Sia x_0 un punto di massimo relativo, cioè $\exists I(x_0, \delta)$:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h), \quad \forall h: |h| < \delta$$

si ha:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } 0 < h < \delta \\ \geq 0 & \text{se } -\delta < h < 0 \end{cases}$$

Teorema di Fermat (Dimostrazione)

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) \geq 0$$

Ma essendo $f(x)$ derivabile in x_0 :

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Teorema di Fermat (Dimostrazione)

Se $x_0 = a$ allora $0 < h < \delta$ e se x_0 è un punto di massimo relativo si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \leq 0$$

Mentre, nel caso di minimo relativo in $x_0 = a$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \geq 0$$

In modo analogo: se $x_0 = b$ è punto di massimo relativo (con $-\delta < h < 0$) allora $f'(b) \geq 0$,

se invece $x_0 = b$ è un punto di minimo relativo, allora
 $f'(b) \leq 0$

Esercizio

Calcolare i punti critici per $f(x)$ classificare i punti di non derivabilità

$$f(x) = x^3 \sqrt{x+1}$$

Esercizio

Calcolare i punti critici per $f(x)$ classificare i punti di non derivabilità

$$f(x) = x |\ln x|$$

Esercizio

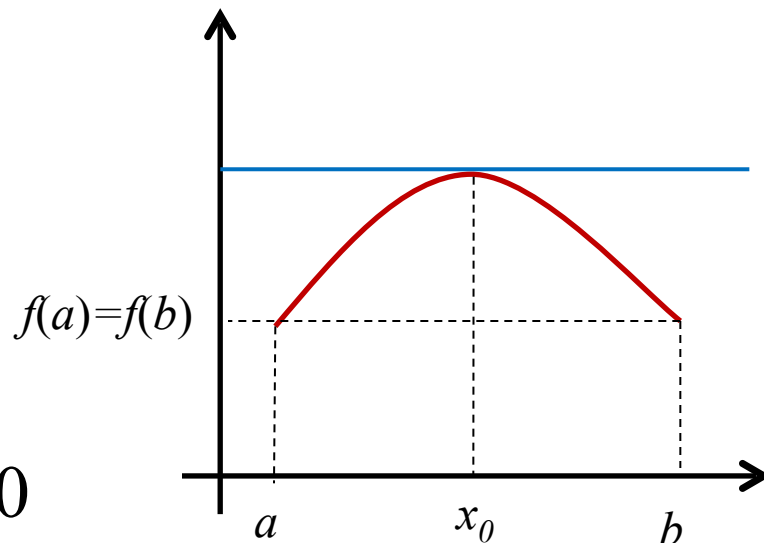
Calcolare la derivata di $f(x) = x^{\ln x}$

Teorema di Rolle

Sia $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$.

- i) f è continua in $[a,b]$,*
- ii) f è derivabile in (a,b)*
- iii) $f(a)=f(b)$*

Allora $\exists x_0\in(a,b) : f'(x_0) = 0$



Per il Teorema di Rolle esiste almeno un punto a tangente orizzontale

Teorema di Rolle

Dimostrazione.

Per il Teorema di Weierstrass, f ha massimo e minimo assoluti in $[a, b]$ ($x_1, x_2 \in [a, b]$) :

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

Se uno dei due è interno ad $[a, b]$, per es. x_1 allora per

il Teorema di Fermat $f'(x_1) = 0$

Teorema di Rolle

Se invece nessuno dei due è interno ad $[a,b]$ per es.

$$x_1 = a, \quad x_2 = b$$

Dall'ipotesi $f(a) = f(b)$ si ottiene minimo = massimo,

Cioè $f(x)$ è costante $\forall x \in [a, b]$ e quindi

$$f'(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

Esercizio

Dire se la funzione $f(x) = e^{x^2-1}$ soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1,1]$ e in caso affermativo calcolare il punto (o i punti) del Teorema.

Sono verificate tutte le ipotesi del teorema di Rolle, infatti:

- i) $f(x) = e^{x^2-1}$ è continua in tutto \mathbb{R} e quindi anche in $[-1,1]$
- ii) $f(x)$ è derivabile in tutto \mathbb{R} e quindi anche in $(-1,1)$,
- iii) $f(-1) = f(1)$

Allora $\exists x_0 \in (-1,1) : f'(x_0) = 0$

x_0 si ricava facendo il calcolo: $f'(x_0) = 0$

cioè $2xe^{x^2-1} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

Esercizio

Dire se la funzione $f(x) = \ln |x|$ soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo $[-e, e]$.

Il teorema di Rolle non è applicabile perché $f(x) = \ln |x|$ non è definita in $x = 0$ e quindi non è né continua né derivabile in $x = 0$ e perciò non soddisfa tutte le ipotesi del teorema

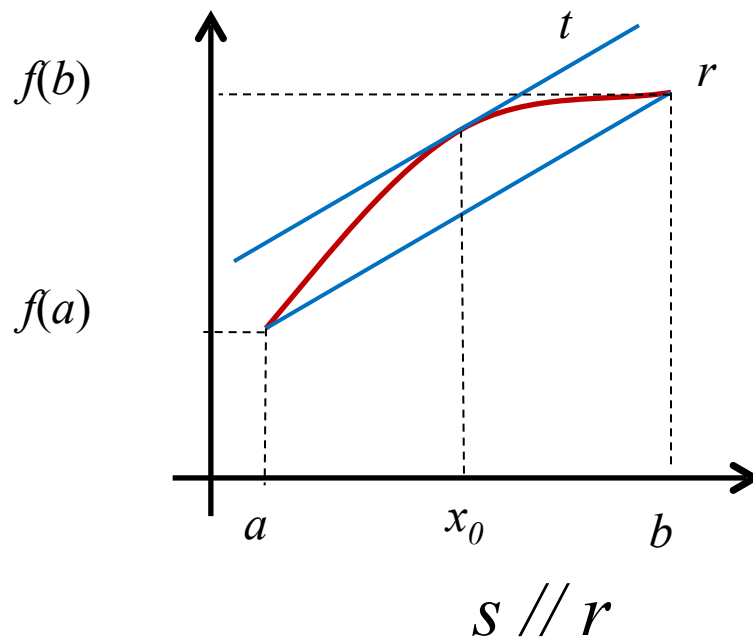
Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Sia $f(x):[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$.

- i) f è continua in $[a,b]$,*
- ii) f è derivabile in (a,b) ,*

Allora $\exists x_0 \in (a,b)$:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Per il Teorema di Lagrange \exists almeno un punto $(x_0, f(x_0))$ sul grafico di $f(x)$ in cui la retta tangente t è parallela alla retta r secante la curva in $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Dimostrazione.

Si consideri la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \overbrace{\left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]}^{\text{equazione di } r}$$

Per $g(x)$ vale il Teorema di Rolle, infatti:

- i) $g(x)$ è continua in $[a, b]$ perché lo è $f(x)$ (l'altro pezzo è lineare);*
- ii) $g(x)$ è derivabile in (a, b) perché lo è $f(x)$ (l'altro pezzo è lineare);*
- iii) $g(a) = g(b) = 0$.*

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : g'(x_0) = 0$$

cioe'
$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esempio

$$f(x)=x^2 \text{ in } [a,b],$$

per il Teorema di Lagrange $\exists x_0 \in [a,b]$:

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = 2x_0 \implies x_0 = \frac{b + a}{2} \quad \text{Media aritmetica di } a \text{ e } b$$

Esercizio

Dire se è applicabile il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x)=\arcsin x$ nell'intervallo $[-1,1]$ e in caso affermativo calcolare i punti del teorema.

La funzione data soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Lagrange infatti:

i) f è continua in $[-1,1]$ (è il suo campo di esistenza),

ii) f è derivabile in $(-1,1)$

$$\text{Allora } \exists x_0 \in (-1,1) : f'(x_0) = \frac{f(1) - f(-1)}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} = \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow x_0 = \pm \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}$$

Esercizio

Determinare un intervallo in cui è applicabile il Teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \left| x - \frac{1}{x} \right|$$

- i) La funzione data è continua nel suo campo di esistenza cioè nell'insieme: $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
- ii) f è derivabile nell'insieme $B = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \pm 1\}$ con derivata:

$$f'(x) = \left| \frac{x^2 - 1}{x} \right| \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}$$

Perciò un intervallo in cui f soddisfa il teorema di Lagrange, è un qualunque intervallo $[a,b]$ che non contiene $x=0$ e tale che i punti $x=1$ e $x=-1$ non siano interni ad esso (potrebbero stare agli estremi)

Per es: $[1, 2]$ (f è continua in $[1,2]$ e derivabile in $(1,2)$, da notare che è derivabile anche in $x=2$ ma non serve...)

Oppure $[-4,-3]$, etc..