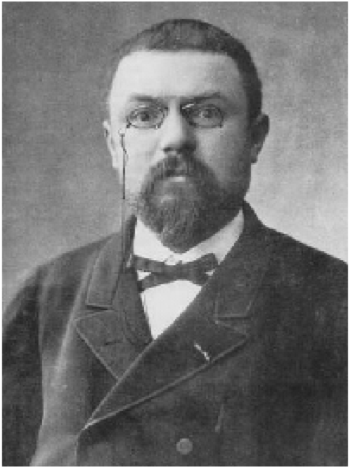
La matematica intuizionista

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2025-26

Henri Poincaré (1854-1912)



Poincaré: la concezione della matematica

- La matematica non ha solo un significato formale, ma anche un contenuto.
- Gli oggetti matematici sono afferrati immediatamente dallo spirito pensante, e quindi la conoscenza matematica è indipendente dall'esperienza.
- Gli oggetti matematici esistono indipendentemente dal nostro pensiero, ma noi concludiamo alla loro esistenza solo per mezzo di una costruzione.

Critica della teoria degli insiemi

- La radice delle antinomie sono le definizioni impredicative, la cui possibilità deriva dall'ammettere l'esistenza dell'infinito attuale, vero e proprio peccato originale della matematica contemporanea.
- La parola "tutti" ha un senso ben preciso in domini finiti; se esistesse l'infinito attuale, l'avrebbe anche in domini infiniti. Ma in questo modo potremmo definire oggetti facendo riferimento a classi a cui essi appartengono.
- Sono *impredicative* le definizioni che fanno riferimento a un insieme a cui l'ente da definire appartiene, e *predicative* le definizioni che non vi fanno riferimento. Occorre evitare le definizioni impredicative, in quanto presuppongono che siano accessibili in un universo platonico enti matematici *non ancora costituiti mediante costruzioni*.

Esempio: il paradosso di Richard

- Sia E l'insieme dei numeri decimali in $[0,1]$ che si possono definire con un numero *finito* di parole.
- E è infinito numerabile: quindi $E = \{e_1, e_2, e_3, ...\}$.
- Sia e_{jk} la k-esima cifra decimale del numero e_j.
- Sia ora $a = 0, a_1 a_2 a_3 ...$, dove per ogni $i \in N$, $a_i = e_{ii} + 1$.
- Poiché per ogni $i \in N$, $a \neq e_i$ (differisce da esso per almeno una cifra decimale), $a \notin E$.
- Ma l'abbiamo appena definito con un numero finito di parole!

Louis Couturat (1868-1914)

Louis Couturat (1868-1914)

In *Principes des Mathématiques* (1905), sulla scia della sua recente curatela (1903) degli scritti inediti di Leibniz, sostiene che Russell e Peano hanno definitivamente risolto la lunga *querelle* tra Leibniz e Kant in favore del primo. La matematica è interamente riducibile alla logica; l'intuizione e i giudizi sintetici a priori non giocano alcuna parte in essa.

Critica del logicismo

- Il programma logicista vuole ridurre la matematica alla logica senza fare appello a principi propri della matematica stessa, ma le antinomie dimostrano che si tratta di un'idea fallimentare.
- Per il logicismo, la matematica è fatta di *verifiche* analitiche e quindi tautologiche; ma la matematica non consiste in verifiche, ci *dispensa* dalle verifiche.
- Il logicismo si fonda su una serie di *petitio principii*. Esempio: 0 è la classe di equivalenza dell'insieme vuoto. E l'insieme vuoto? L'insieme degli oggetti che soddisfano una condizione *in nessun caso* verificata ("in nessun caso" = 0 volte). 1 è la classe di equivalenza di un singoletto. E un singoletto? Un insieme *due* qualsiasi dei cui elementi sono identici (probabilmente la definizione di 2 presuppone quella di 1).

Il principio di induzione

- La matematica è costituita da giudizi sintetici a priori da cui l'intuizione è ineliminabile; in particolare, il principio "creativo", che ci fa ottenere di più di quanto non sia contenuto nelle nostre premesse, è quello di induzione.
- Il principio di induzione condensa in due passi un'infinità di sillogismi ipotetici; ci consente di passare dal finito all'infinito, dal particolare al generale. Si tratta di un assioma indimostrabile, applicabile solo a condizione che una stessa operazione possa ripetersi indefinitamente.

Critica del formalismo

- Anche l'idea che la matematica sia giustificata da dimostrazioni di coerenza è sbagliata: per condurle occorrerebbe ricorrere al principio di induzione, che incarna proprio l'essenza di quanto si sta cercando di giustificare.
- Couturat: gli assiomi di Peano sono una definizione implicita di numero naturale. L'esistenza di un oggetto matematico O equivale al fatto che l'insieme degli O non sia vuoto.
- Poincaré: ma come si fa a dire che un insieme di oggetti matematici è non vuoto se non possiamo vedere o toccare i suoi elementi? Quindi l'esistenza di un oggetto matematico O equivale al fatto che esso non porta a contraddizione.
- Tuttavia, una definizione implica l'esistenza dell'oggetto definito. Se gli assiomi di Peano devono essere una buona definizione, bisogna dimostrarne la noncontraddittorietà.
- Ma come si fanno queste dimostrazioni? Per induzione!

Conclusione

Tanto Russell quanto Hilbert hanno fatto uno sforzo poderoso: sia l'uno che l'altro sono autori di libri ricchi di idee originali, profonde, e spesso giuste [...] Ma dire che questi due matematici hanno definitivamente chiuso la controversia tra Leibniz e Kant e demolito la teoria kantiana della matematica, questo è evidentemente falso. Non so se essi abbiano veramente creduto di averlo fatto; ma se l'hanno creduto si sono sbagliati. [SM, tr. it. p. 154]

Reazioni a Poincaré

- J. Hadamard ("La logistique et la notion de nombre entier", 1906): Poincaré ha ragione nella sua critica a Couturat ma l'esistenza matematica è qualcosa in più che l'assenza di contraddizione.
- L. Couturat ("For logistics: reply to Mr. Poincaré", 1912): il fatto di essere un grande matematico non fa di Poincaré un grande logico o filosofo della matematica, più di quanto un giocatore di calcio non sia da considerarsi un esperto di anatomia.
- B. Russell (recensione a SH, 1905): è falso che l'induzione consenta di passare dal particolare al generale, perché una delle sue premesse è quantificata universalmente (Poincaré: ma il principio di induzione non dice che ogni intero può essere definito induttivamente, ma bensì che su ogni intero così definito si può ragionare per induzione).
- E. Zermelo ("Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung", 1908): il principio di induzione può essere dedotto dall'assioma di scelta, che per Poincaré è un principio dubbio perché impredicativo. Ma Zermelo lo difende vigorosamente.

Luitzen E.J. Brouwer (1881-1966)

.

Brouwer: la tesi di dottorato (1907)

- La matematica è rigidamente alinguistica, perché si fonda su costruzioni mentali indipendenti dal linguaggio. I logicisti e lo stesso Poincaré confondono tra atti di costruzione matematica e linguaggio della matematica.
- Il fondamento ultimo della matematica è la "sovraintuizione" di uno scorrere continuo del tempo, su cui si basano sia la successione dei naturali che il continuo aritmetico.
- La matematica non si riduce alla logica: la prima è un "costruire privo di parole", mentre la logica studia solo parole.
- Nella costruzione matematica la contraddizione è impossibile. I logici si sono imbattuti nelle antinomie perché hanno ritenuto valide in generale leggi che valgono solo in domini *finiti*, come il principio del terzo escluso.

Brouwer: i lavori degli anni Venti

- Oggetto della matematica sono enti che vengono *creati* con costruzioni mentali. I teoremi logici sono teoremi matematici di estrema generalità; quindi la logica è una parte della matematica, non il suo fondamento.
- La matematica è indipendente dal linguaggio, perché il pensiero non necessita di essere connesso con espressioni linguistiche. Il linguaggio serve alla comunicazione tra matematici, ma non può garantire da malintesi.
- I principi della logica si applicano a domini *finiti*; per poter attuare una loro estensione al caso infinito si rende necessaria una verifica della loro validità. Se tale verifica non viene fatta, si hanno le antinomie.

Il rifiuto del terzo escluso: un esempio

Definition

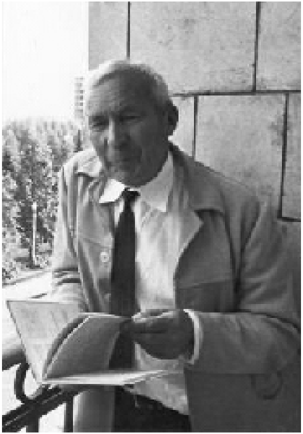
k è il massimo numero primo tale che anche $k - 1$ è primo, oppure $k = 1$ se tale numero non esiste.

Definition

l è il massimo numero primo tale che anche $l - 2$ è primo, oppure $l = 1$ se tale numero non esiste.

La prima def. è costruttiva, permette di individuare effettivamente il numero che definisce (3). La seconda def. non è una buona definizione, perché non sappiamo se il numero di coppie di primi gemelli è finito. Per il matematico classico, tuttavia, la successione di primi gemelli è o finita o infinita, e quindi la seconda def. definisce senza ambiguità un numero (anche se non sappiamo dire quale).

Andrej N. Kolmogorov (1903-1987)



Kolmogorov: la logica minimale

Kolmogorov prende le mosse dal calcolo per la logica proposizionale classica fornito da Hilbert e Bernays (sostanzialmente equivalente a **HK**) e si chiede quali assiomi rimangano costruttivamente validi. Tutti gli assiomi in cui non compare la negazione sono accettabili. Un enunciato della forma $\neg\alpha$, invece, si può interpretare in due modi:

- come la proibizione di considerare α vero;
- come l'affermazione che il suo predicato è incompatibile col suo soggetto.

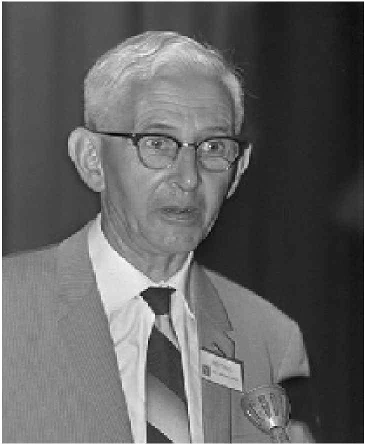
Solo la prima interpretazione (negazione come "assurdità") è costruttivamente accettabile. Quindi gli assiomi

$$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$$
$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$$

vengono depennati e sostituiti da

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$$

Arend Heyting (1898-1980)



Heyting: la rivalutazione della logica formale

Per Heyting, anche in una prospettiva intuizionista il linguaggio simbolico e il metodo assiomatico hanno una loro funzione: i linguaggi formali sono ausili alla memoria, mentre il metodo assiomatico ha una funzione descrittiva che si esplica nel suo impiego come sistemazione ed abbreviazione.
Heyting formalizza la logica intuizionista del primo ordine, ma chiarisce che i connettivi e i quantificatori non hanno la stessa interpretazione che hanno in logica classica. Il loro significato non viene espresso in termini di *condizioni di verità*, ma di *condizioni di asseribilità*.

Heyting: l'interpretazione delle costanti logiche

α	la costruzione matematica espressa da α
$\vdash \alpha$	è stata eseguita la costruzione espressa da α
$\vdash \neg\alpha$	supposta eseguita la costruzione espressa da α, si può derivare una contraddizione
$\vdash \alpha \wedge \beta$	sono state eseguite le costruzioni espresse da α e da β
$\vdash \alpha \vee \beta$	è stata eseguita o la costruzione espressa da α o quella espressa da β
$\vdash \alpha \rightarrow \beta$	si sa eseguire la costruzione espressa da β ogniqualvolta si sa eseguire quella espressa da α
$\vdash \exists x\alpha$	si sa indicare un individuo che gode della proprietà α
$\vdash \forall x\alpha$	per ogni elemento x si può far vedere che gode della proprietà α

Brouwer: la matematica intuizionista

Le definizioni costruttivamente accettabili dei numeri reali hanno un carattere discreto e numerabile, ma ogni matematica seria non può fare a meno di un'analisi del *continuo*.

Brouwer introduce allora le *successioni di libera scelta*, operazioni che associano ai numeri naturali oggetti appartenenti a una determinata *specie* (l'analogo intuizionista del concetto di insieme). Non tutte le successioni di libera scelta sono determinate da leggi. I numeri reali sono definiti da successioni arbitrarie di scelta. Le successioni di scelta sono oggetti *in fieri*, incompleti, che noi riusciamo a studiare attraverso i loro segmenti iniziali. In questo modo Brouwer riesce a ottenere teoremi più forti di quelli che valgono in analisi classica: ad es. ogni funzione dall'intervallo $[0, 1]$ in $[0, 1]$ è continua.

Brouwer vede la matematica intuizionista non come una mutilazione della matematica classica, ma come una matematica in cui le nozioni tradizionali si spezzano in concetti più fini.