Università degli Studi di Cagliari

Corso di laurea in Fisica

Analisi II – anno 2025

PROF. ANTONIO GRECO

Elenco degli esercizi proposti a lezione

Il 2025-12-19 18:38 Antonio Greco ha scritto:

> Ieri ho assegnato questo esercizio:

> trovare l'integrale generale dell'equazione $y'' = -\omega^2 y + \text{sen}\ \alpha t$ per fissati $\alpha,\omega\in(0,+\infty)$ con $\alpha\neq\omega$. Basterà trovare due costanti M,N tali che la funzione $\psi(t) = M \cos \alpha t + N \text{ sen } \alpha t$ soddisfi l'equazione, e poi utilizzare i noti teoremi sulla struttura dello spazio delle soluzioni delle equazioni lineari.

Il 2025-12-16 20:14 Antonio Greco ha scritto:

> Ieri ho assegnato questi esercizi:

> 1. Trovare l'integrale generale delle equazioni a variabili separabili $y'=1+y$ e $y'=1+y^2$.

> 2. Risolvere il problema di Cauchy $y'=|y|^{1/2}$, $y(0)=0$ (esistono molteplici soluzioni).

Il 2025-12-11 20:41 Antonio Greco ha scritto:

> Oggi ho assegnato questo esercizio:

> Posto y_0(t) = 1 per ogni t∈ℝ, e y_{k+1}(t) = 1 + l'integrale da 0 a t di y_k(x) dx per k≥0, determinare l'espressione di y_k(t) e verificare che la successione delle y_k(t) converge alla funzione esponenziale uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato (basta invocare il teorema dimostrato nella lezione del 4/12).

Il 2025-12-10 11:32 Antonio Greco ha scritto:

> Ieri ho assegnato questo esercizio:

> supponiamo che la serie di a_k x^k abbia raggio di convergenza r>0. Determinare il raggio di convergenza r' della serie derivata, cioè della serie di k a_k x^(k-1) per k≥1 (si deve trovare r'=r).

> La soluzione è facile se facciamo l'ipotesi aggiuntiva che il rapporto fra |a_k| e |a_{k+1}| ammetta limite r: questo per me è sufficiente.

> Se invece gli studenti vogliono una soluzione generale, possiamo ragionare come segue.

> Prima parte: prendiamo x_0 nell'intervallo (-r,r) e verifichiamo che la serie derivata è assolutamente convergente in tale punto.

> Fissiamo a piacere un punto x ∈ (|x_0|,r). Sappiamo che la serie di a_k x^k (la serie data) converge per ipotesi, quindi (condizione necessaria) a_k x^k → 0, e perciò (definizione di limite) risulta |a_k x^k| ≤ 1 per k ≥ k_0 opportuno.

> D'altro canto, per ragioni algebriche, il termine |k a_k (x_0)^(k-1)| si può scrivere sotto la forma

> |k a_k (x_0)^(k-1)| = k |a_k| x^k q^(k-1) /x

> dove q = |x_0|/x < 1. Usando la maggiorazione trovata prima si ha

> |k a_k (x_0)^(k-1)| ≤ k q^(k-1) /x per k ≥ k_0,

> e siccome la serie numerica di k q^(k-1) è convergente per il criterio del rapporto, si deduce per confronto che la serie derivata converge assolutamente nel punto x_0. Infine, per l'arbitrarietà di x_0 segue che r'≥r.

> Nel caso in cui r=+∞ l'esercizio è già concluso. Se, invece, r<+∞, passiamo alla seconda parte del ragionamento. Sappiamo dalla lezione del 4 dicembre che la serie derivata, che è una serie di potenze, converge uniformemente in ogni intervallo chiuso [a,b] ⊂ (-r',r').

> Quindi la serie derivata si può integrare termine a termine da 0 a t, qualunque sia t ∈ (-r',r'). Integrando termine a termine si trova la serie di a_k t^k per k≥1, quindi si può dire che questa converge almeno in tutto l'intervallo (-r',r').

> Infine, poiché la serie data differisce da quest'ultima solo per la presenza del termine a_0, e poiché il carattere di una serie non cambia aggiungendo o togliendo un numero finito di termini (lezione di lunedì 1/12) deduciamo che anche la serie data converge in tutto l'intervallo (-r',r'), dunque r≥r'.

> La prima e la seconda parte del ragionamento mostrano che r'=r.

Il 2025-11-25 19:03 Antonio Greco ha scritto:

> Oggi ho assegnato questi esercizi:

>

> 1. Determinare il piano tangente alla superficie di equazioni parametriche x=u, y=v, z=u^2+v^2 nel punto (u_0,v_0) = (0,1).

>

> 2. Trovare l'area della superficie di equazioni parametriche x = R sen ψ cos θ, y = R sen ψ sen θ, z = R cos ψ per θ∈(0,2π) e ψ∈(0,π) (vedere il Pagani-Salsa, vol. 2, pag. 420, esempio 1.14).

>

> 3. Trovare il flusso del versore k=(0,0,1) attraverso la superficie di equazioni parametriche x=u, y=v, z=½v per u,v∈[0,1].

> Il 2025-11-24 15:07 Antonio Greco ha scritto:

>> Oggi ho assegnato questo esercizio:

>> Consideriamo una curva regolare γ parametrizzata da $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ per $t\in[a,b]$. Verificare che l'integrale curvilineo di prima specie (integrale di f ds) esteso alla curva γ non cambia segno se si riparametrizza la curva effettuando il cambiamento di variabile $t = a+b-\tau$, il quale cambia il verso di percorrenza della curva.

>>> Il 2025-11-10 15:41 Antonio Greco ha scritto:

>>>> Oggi ho assegnato questi esercizi:

>>>>

>>>> 1. Consideriamo la funzione $f(x,y)=x$ sul quadrato $Q=[0,1]x[0,1]$. Per ogni intero $n>0$ effettuiamo la partizione D_n data da $x_k=k/n$ per $k=0,...,n$ e $y_h=h/n$ per $h=0,...,n$. Calcolare la somma inferiore $s(D_n)$ e la somma superiore $S(D_n)$, verificare che ammettono lo stesso limite per $n\to+\infty$, infine calcolare l'integrale doppio di $f(x,y)dxdy$ esteso al quadrato Q applicando la definizione.

>>>>

>>>> 2. Consideriamo la funzione $f(x,y)=C$ (costante) sul rettangolo $Q=[a,b]x[c,d]$. Calcolare l'integrale doppio di $f(x,y)dxdy$ esteso al rettangolo Q applicando la definizione.

>>>>

>>>> 3. Verificare che la funzione $f(x,y)=1$ non è integrabile né sull'insieme $\Omega = \{(x,y)\in[0,1]x[0,1] : x,y\in\mathbb{Q}\}$ né sull'insieme $\Omega = ([0,1]\cap\mathbb{Q})x[0,1]$.

Il 2025-11-06 13:00 Antonio Greco ha scritto:

> Oggi ho assegnato questo esercizio:

>

> Si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 - y^2 + \alpha(x^3 + (y-1)^3)$. Determinare tutti i valori reali del parametro α tali che f abbia almeno un punto di minimo relativo.

>

> Gli studenti dovrebbero cercare innanzitutto i punti critici, e poi vedere se la matrice hessiana è definita positiva in tali punti.

Il 2025-11-04 15:33 Antonio Greco ha scritto:

> Oggi ho assegnato questo esercizio:

>

> Stabilire se la funzione $f(x,y)=x/\mathrm{sqrt}(x^2+y^2)$, studiata il 10 ottobre, ammette massimo e minimo. In caso affermativo, determinare max f, min f ed i punti estremanti.

> Il 2025-10-29 14:27 Antonio Greco ha scritto:

> Ieri ho assegnato questo esercizio: fissati i parametri a,b,c, verificare che $ax^2 + 2bxy + cy^2 = o(\mathrm{sqrt}(x^2+y^2))$ per $(x,y)\to(0,0)$.

Il 2025-10-24 15:36 Antonio Greco ha scritto:

Oggi ho assegnato questo esercizio:

Posto $f(x) = \mathrm{sqrt}(R^2-x^2)$ con R = 6.000.000, verificare che la retta di equazione $y=R$ è tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$. Servendosi di una calcolatrice, calcolare la differenza $R-f(x)$ nel punto di ascissa $x=2$. L'esercizio si riferisce al significato del simbolo di Landau $o(x)$.

Il 2025-10-17 17:49 Antonio Greco ha scritto:

> Oggi ho assegnato questi esercizi:

>

> verificare, applicando la definizione, che la funzione $g(x,y)=\mathrm{sqrt}(x^2+y^2)$ non è differenziabile nell'origine, e che la funzione $h(x,y)=\mathrm{sqrt}(1-x^2-y^2)$ lo è.

Il 2025-10-16 15:22 Antonio Greco ha scritto:

> Oggi ho assegnato questi esercizi:

>

> A. Verificare, applicando la definizione, che la funzione $f(x,y)=x^2+y^2$ è continua nell'origine. Cioè, per ogni $\varepsilon\in(0,+\infty)$, determinare un r che soddisfi la definizione.

>

> B. Tracciare il grafico della funzione $g(x,y)=\mathrm{sqrt}(x^2+y^2)$.

>

> C. Verificare, applicando la definizione, che la funzione $g(x,y)=\mathrm{sqrt}(x^2+y^2)$ è continua nell'origine.

>

> D. Determinare tutti gli eventuali valori del parametro z_0 tali che la funzione $h(x,y)$ data da $h(0,0)=z_0$ e $h(x,y)=x$ diviso $g(x,y)$ per $(x,y)\neq(0,0)$ sia continua nell'origine (basta applicare la definizione della continuità mediante il limite).

>

> E. Verificare, applicando la definizione, che la funzione $g(x,y)=\mathrm{sqrt}(x^2+y^2)$ non è derivabile in nessuna direzione nel punto (0,0).

Il 2025-10-15 09:14 Antonio Greco ha scritto:

> Ieri ho lanciato agli studenti questa sfida: supponiamo che una funzione f, avente per dominio un sottoinsieme E dello spazio euclideo n-dimensionale, soddisfi la definizione topologica della continuità in un punto x∈E. Dunque per ogni intorno V di f(x) esiste una palla n-dimensionale B centrata in x e di raggio r tale che f(B∩E)⊂V. È possibile sostituire r con un r' diverso da r, oppure il valore ammissibile di r è unico?

> Ho poi assegnato i seguenti esercizi:

> Dimostrare, applicando la definizione topologica della continuità, che le funzioni costanti sono continue.

> Dimostrare, applicando la definizione topologica della continuità, che le proiezioni canoniche f_k aventi per dominio lo spazio euclideo n-dimensionale e definite da f(x)=x_k, sono continue. Dedurre da questo la continuità delle forme lineari f(x) = sommatoria di a_k x_k per k che va da 1 a n (basta invocare i teoremi sulla continuità).

Il 2025-10-11 13:57 Antonio Greco ha scritto:

> Ieri ho assegnato questo esercizio: verificare, applicando la definizione di limite, che il rapporto 1/norma di x tende a +∞ quando x tende al vettore nullo.

> Il 2025-10-10 08:49 Antonio Greco ha scritto:

>> Il 7 ottobre ho assegnato l'esercizio allegato (i campi centrali

>> ammettono potenziale).

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE I CAMPI CENTRALI AMMETTONO POTENZIALE:

ESERCIZIO. DATA UNA FUNZIONE CONTINUA $f(t)$, CONSIDERIAMO IL CAMPO CENTRALE $\bar{E}(x,y,z) =$

$$= f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \frac{x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

INDICATA CON $F(t)$ UNA QUALUNQUE PRIMITIVA DI $f(t)$, VERIFICARE CHE LA FUNZIONE $U(x,y,z) = F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ SODDISFA $\nabla U(x,y,z) = \bar{E}(x,y,z)$ PER $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

>> Stavo anche trovando i punti di accumulazione del cerchio aperto centrato nell'origine e di raggio 1: ho verificato che i punti interni sono punti di accumulazione. Ho lasciato per esercizio di verificare che i punti della circonferenza sono punti di accumulazione, mentre i punti esterni al cerchio non lo sono. Riferimento: esempio 2.5, lettera a, del Pagani-Salsa, vol. 1, pag. 136.

>> Il 9 ottobre ho invitato gli studenti a ridimostrare per esercizio il teorema dell'unicità del limite e il teorema del limite della somma di due funzioni.

>> Il 2025-10-02 15:58 Antonio Greco ha scritto:

>>> Oggi ho assegnato questo esercizio:

>>> trovare la matrice jacobiana DF della funzione F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(\rho,\theta) = (\rho \cos \theta, \rho \text{ sen } \theta)$. Riferimento: esempio 2.6 del Pagani-Salsa, vol. 1, pag. 384.

>>>>> Il Mar 30 Set 2025, 16:46 Antonio Greco <greco@unica.it> ha scritto:

>>>>>> Oggi ho assegnato questo esercizio:

>>>>>> Determinare, applicando la definizione, la derivata direzionale della funzione $f(x,y) = x^2+y^2$ rispetto ad un versore generico v.

>>>>>> Il riferimento è all'esempio 1.1 del Pagani-Salsa, vol. 1, pagina 350.

>>>>>> Il 2025-09-29 19:12 Antonio Greco ha scritto:

>>>>>>> Oggi ho assegnato questi esercizi:

>>>>>>> 1. Indicato con $A \subset \mathbb{R}^2$ il cerchio chiuso di raggio 1 centrato nell'origine, e con B l'intervallo [-1,1], stabilire se il sottoinsieme $\Gamma \subset A \times B$ dato da

>>>>>>> $\Gamma = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1\}$

>>>>>>> ha la proprietà funzionale. Il riferimento è alla definizione di funzione che si trova nel Pagani-Salsa, vol.1, pag. 24.

>>>>>>> 2. Determinare il dominio e gli insiemi di livello della funzione $f(x,y) = x^2+y^2$ e tracciare il grafico di f. Vedere il Pagani-Salsa, vol. 1, pag. 372.

>>>>>>> 3. Determinare i punti interni della corona circolare $E = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2 \leq 4\}$. Vedere il Pagani-Salsa, vol. 1, pag. 135.