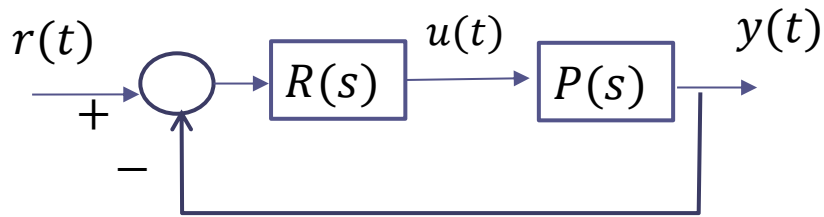


# Controlli Automatici

## Sintesi diretta

**Prof. Alessandro Pisano**  
apisano@unica.it

## Sintesi diretta per un sistema di controllo single-loop



La sintesi diretta è una metodologia di progetto che fissa, come passo preliminare, una **funzione di trasferimento desiderata**  $W_d(s)$  per il sistema a ciclo chiuso.

$$W_d(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)}$$

Successivamente, e molto banalmente, si determina quale debba essere la FdT  $R(s)$  del regolatore tale da garantire che la FdT a ciclo chiuso coincida con la FdT desiderata  $W_d(s)$

La risposta è:

$$W_d(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} \quad \longleftrightarrow \quad R(s) = \frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)}$$

Si verifica facilmente che tale scelta per il regolatore conduce alla FdT desiderata a ciclo chiuso

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} = \frac{\frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)} P(s)}{1 + \frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)} P(s)} = \frac{\frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)}}{1 + \frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)}} \\ &= \frac{W_d(s)}{1 - W_d(s) + W_d(s)} = W_d(s) \end{aligned}$$

**Espressione semplificata del controllore** in funzione dei polinomi a numeratore e denominatore delle FdT del processo e della FdT desiderata

Sia:

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \qquad W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}$$

$$R(s) = \frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)} = \frac{\frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}}{1 - \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)}$$

## Scelta della $W_d(s)$

La scelta della FdT desiderata deve tenere conto di diversi fattori

A. Il regolatore ottenuto a fronte della applicazione della «formula»

$$R(s) = \frac{W_d(s)}{1-W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)} \text{ deve essere fisicamente realizzabile}$$

B. Il comportamento del sistema a ciclo chiuso, cioè il legame che si instaura fra il set-point e l'uscita (tipicamente la risposta ad un set point costante) deve essere soddisfacente, deve in altri termini soddisfare determinate **specifiche sul comportamento di regime e sul comportamento transitorio.**

C. Il sistema di controllo che si ottiene deve essere esternamente ed internamente stabile

## Vincoli sulla scelta della $W_d(s)$

A. Il regolatore ottenuto a fronte della applicazione della «formula»

$$R(s) = \frac{W_d(s)}{1-W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)} \text{ deve essere fisicamente realizzabile}$$

Il primo e fondamentale vincolo sulla scelta per la FdT desiderata  $W_d(s)$  è che **il suo grado relativo** (cioè la differenza fra il grado del polinomio a denominatore ed il grado del polinomio a numeratore) **deve essere maggiore o al più uguale al grado relativo del processo  $P(s)$**

Se la FdT desiderata  $W_d(s)$  viola tale requisito si ottiene un regolatore  $R(s)$  non fisicamente realizzabile (cioè con un numeratore avente grado superiore a quello del denominatore).

Nella pratica **sceghieremo sempre  $W_d(s)$  avente grado relativo uguale a quello del processo  $P(s)$ .**

- B. Il comportamento del sistema a ciclo chiuso, cioè il legame che si instaura fra il set-point e l'uscita (tipicamente la risposta ad un set point costante) deve essere soddisfacente, deve in altri termini soddisfare determinate **specifiche sul comportamento di regime e sul comportamento transitorio**.

## Specifiche sul comportamento a regime

Vediamo come garantire la più comune specifica inerente il comportamento a regime della variabile di uscita a fronte della applicazione di un set-point costante.

La proprietà di un sistema di controllo di garantire che il valore di regime dell'uscita replichi esattamente l'ampiezza di un set-point costante viene detta **Precisione Statica**

Sulla base del T.F.R.G., al fine di garantire la precisione statica la FdT desiderata  $W_d(s)$  dovrà essere scelta **asintoticamente stabile** ed avere **guadagno statico unitario**.

## Specifiche sul comportamento transitorio

Studiamo **due tipologie di specifiche sul comportamento transitorio**, entrambe formulate con riferimento alla risposta a ciclo chiuso ad un set-point costante:

- Una specifica sulla **massima sovraelongazione** percentuale tollerata
- Una specifica sul **massimo tempo di assestamento** consentito

Tali specifiche saranno garantite ponendo a frutto le proprietà e le relazioni viste nell'ambito dello studio dei sistemi dinamici elementari.

Saremo in grado di imporre una specifica sulla massima sovraelongazione vincolando lo smorzamento delle coppie di poli complessi coniugati della FdT desiderata  $W_d(s)$  (eventualmente imponendoli reali negativi, se la specifica prevedesse sovraelongazione nulla)

Una specifica sul tempo di assestamento si tradurrà invece in un vincolo sulle costanti di tempo dei poli della  $W_d(s)$

C. Il sistema di controllo che si ottiene deve essere esternamente ed internamente stabile

**Se il processo  $P(s)$  ha tutti i poli e tutti gli zeri e parte reale negativa** (processo «a fase minima») la scelta di una FdT desiderata asintoticamente stabile garantisce nel contempo sia la stabilità esterna che la stabilità interna del sistema di controllo



**Se il processo  $P(s)$  ha poli e/o zeri a parte reale positiva o nulla** sussistono ulteriori vincoli sulla scelta di  $W_d(s)$ , che descriviamo un po' più avanti.

**Vediamo un primo esempio di sintesi diretta per un processo asintoticamente stabile che non possiede nessuno zero a parte reale positiva.**

## Sintesi diretta per uno scambiatore di calore

Uno scambiatore di calore a fascio tubiero è composto da un mantello cilindrico ("shell") che racchiude un insieme di tubi ("tube bundle"). I due fluidi coinvolti nello scambio termico scorrono in percorsi separati: uno nel mantello e l'altro all'interno dei tubi.

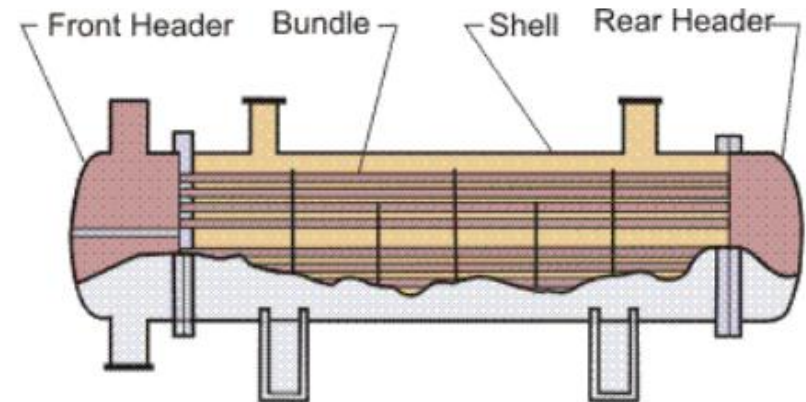


Figure 1. Shell and tube exchanger.

### Sistema SISO affetto da disturbi

**Ingresso manipolabile (u):** La portata  $Q_c$  del fluido caldo che scorre all'interno dei tubi. Tale portata viene variata mediante una valvola di regolazione.

**Uscita (y):** La temperatura  $T$  in uscita del fluido freddo che circola all'esterno dei tubi (nel mantello) e che si desidera riscaldare

**Disturbo(d):** La portata  $Q_f$  del fluido freddo (e anche la sua temperatura d'ingresso)

L'obiettivo del controllo è mantenere ad un prefissato valore di set-point la temperatura in uscita del fluido riscaldato, a fronte di possibili variazioni nella sua portata o nella sua temperatura di ingresso.

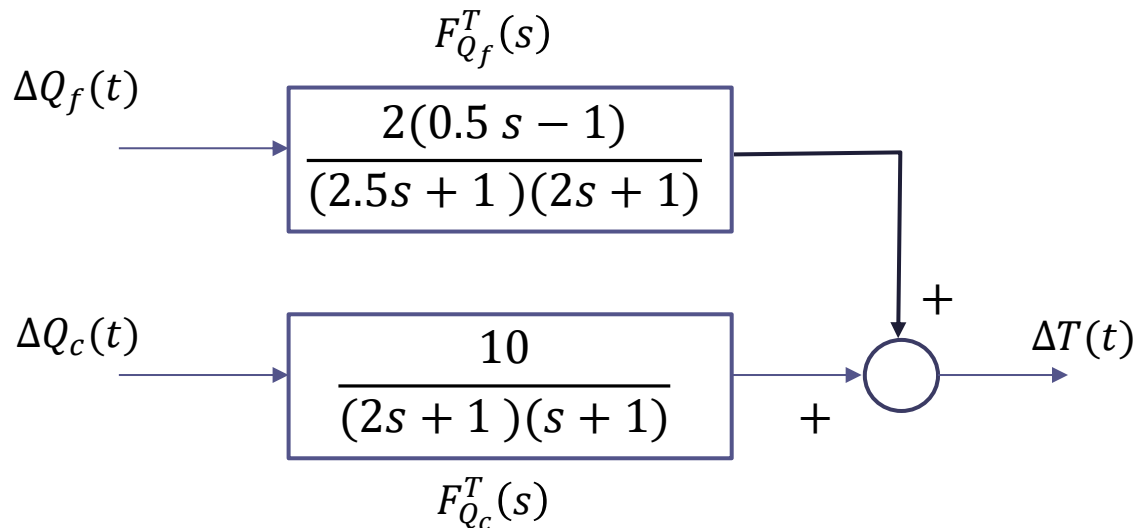
La dinamica di uno scambiatore di calore è complessa e non lineare, ma può essere approssimata da un modello LTI del secondo ordine per piccole **variazioni attorno a un punto di lavoro nominale**.

La funzione di trasferimento del processo, che lega la **portata del fluido caldo** (l'ingresso manipolabile) alla temperatura in uscita del fluido freddo, sarà una FdT del secondo ordine, con poli reali negativi e, in genere, nessuno zero.

La funzione di trasferimento che lega invece la **portata del fluido freddo** (il disturbo) alla temperatura in uscita del fluido freddo ha una forma diversa.

Si osserva infatti un fenomeno di **risposta inversa**: se si aumenta la portata del fluido freddo, la sua temperatura in uscita inizialmente aumenta leggermente per poi diminuire, stabilizzandosi al nuovo valore.

Questo legame si rappresenta, come visto in precedenza, con uno zero a parte reale positiva.



$$\Delta Q_f(t) = Q_f(t) - Q_f^*$$

$$\Delta Q_c(t) = Q_c(t) - Q_c^*$$

$$\Delta T(t) = T(t) - T^*$$

**Scostamenti dal punto di lavoro nominale.**

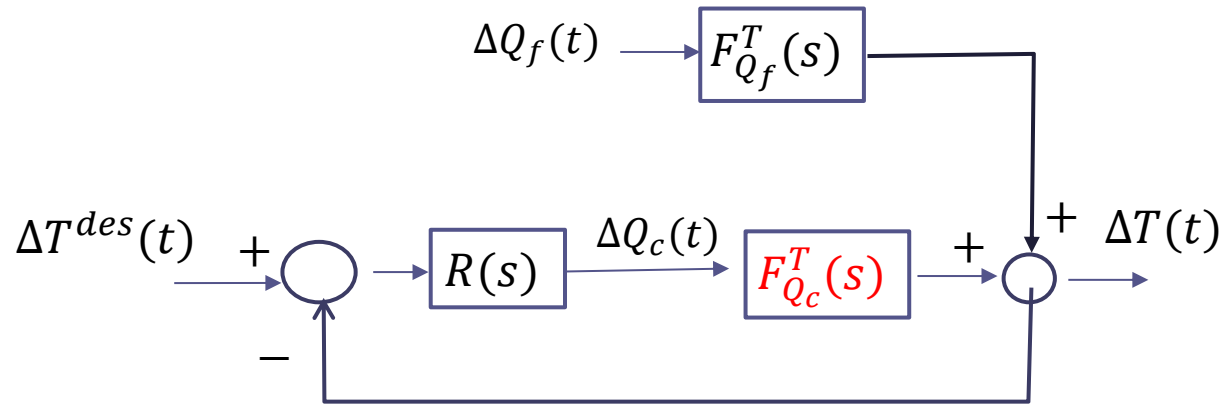
$$F_{Q_c}^T(s) = \frac{10}{(2s + 1)(s + 1)} \frac{^\circ\text{C}}{\ell/\text{m}}$$

Un incremento di 1 l/m nella portata del fluido caldo comporta, a regime, un incremento di 10° C nella temperatura di uscita del fluido riscaldato

$$F_{Q_f}^T(s) = \frac{2(0.5s - 1)}{(2.5s + 1)(2s + 1)} \frac{^\circ\text{C}}{\ell/\text{m}}$$

Un incremento di 1 l/m nella portata del fluido freddo comporta, a regime, un **decremento** di 2° C nella temperatura di uscita del fluido riscaldato

## Schema a blocchi



$$P(s) = F_{Q_c}^T(s) = \frac{10}{(2s + 1)(s + 1)} \frac{^{\circ}\text{C}}{\ell/m}$$

$$F_{Q_f}^T(s) = \frac{2(0.5s - 1)}{(2.5s + 1)(2s + 1)} \frac{^{\circ}\text{C}}{\ell/m}$$

### Specifiche

S1 Precisione statica

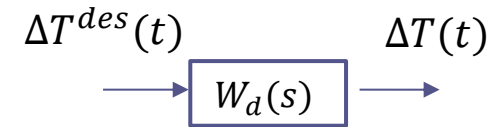
S2 Risposta al gradino monotona esponenziale

S3  $T_a \leq 5s$

S1 Precisione statica

S2 Risposta al gradino monotona esponenziale

S3  $T_a \leq 5s$



Il processo  $P(s) = \frac{10}{(2s+1)(s+1)}$  ha grado relativo pari a due. Affinché sia garantita la fisica realizzabilità del controllore dobbiamo scegliere una FdT desiderata a ciclo chiuso avente anch'essa grado relativo pari a due (o eventualmente grado relativo superiore, scelta peraltro mai adottata in quanto non apporta alcun beneficio). Ipotizziamo la scelta di una FdT desiderata nella forma di un processo asintoticamente stabile con due poli reali negativi coincidenti:

$$W_d(s) = \frac{\mu}{(Ts + 1)^2}$$

Per garantire la specifica S1 il guadagno statico  $\mu = W_d(0)$  deve essere **unitario**

$$W_d(s) = \frac{1}{(Ts + 1)^2}$$

S1 Precisione statica

S2 Risposta al gradino monotona esponenziale

S3  $T_a \leq 5s$

$$W_d(s) = \frac{1}{(Ts + 1)^2}$$

S2 è soddisfatta perché il processo  $W_d(s)$  esibisce, come sappiamo, una risposta al gradino monotona esponenziale

Per garantire il soddisfacimento della specifica S3 dobbiamo scegliere la costante di tempo  $T$  in modo che sia soddisfatta la disequaglianza

$$6.6 T \leq 5 \quad \Rightarrow \quad T \leq \frac{5}{6.6} = 0.75$$

Scegliamo per la costante di tempo  $T$  un valore un pò inferiore alla soglia teorica

$$W_d(s) = \frac{1}{(0.7s + 1)^2}$$

Scelta la  $W_d(s)$ , determiniamo ora la FdT del regolatore  $R(s)$  tale da garantire che la FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita sia effettivamente pari alla  $W_d(s)$  scelta. Usiamo l'espressione semplificata della formula in funzione dei polinomi a numeratore e denominatore della FdT  $P(s)$  del processo e della FdT desiderata  $W_d(s)$ :

$$R(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}$$

$$P(s) = \frac{10}{(2s + 1)(s + 1)} = \frac{10}{2s^2 + 3s + 1}$$



$$N_P(s) = 10$$

$$D_P(s) = (2s + 1)(s + 1)$$

$$W_d(s) = \frac{1}{(0.7s + 1)^2} = \frac{1}{0.49s^2 + 1.4s + 1}$$



$$N_{W_d}(s) = 1$$

$$D_{W_d}(s) = 0.49s^2 + 1.4s + 1$$

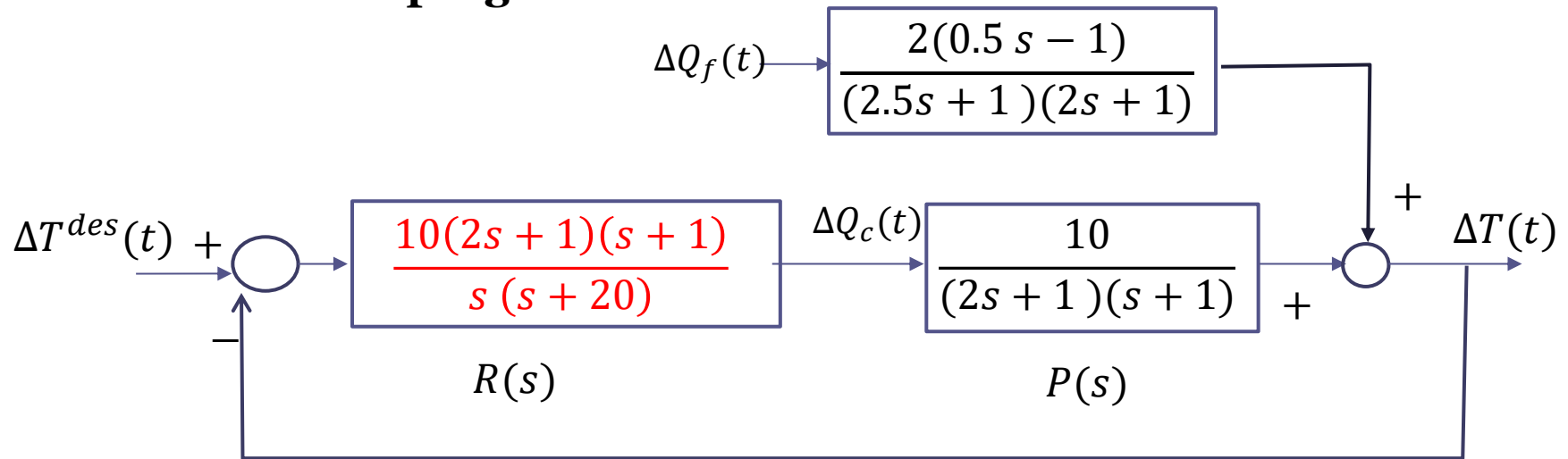


$$\Rightarrow D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s) = 0.49s^2 + 1.4s = 0.49s(s + 2.857)$$

$$R(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} = \frac{1}{0.49s(s + 2.857)} \cdot \frac{(2s + 1)(s + 1)}{10} =$$

$$= \frac{(2s + 1)(s + 1)}{4.9s(s + 2.857)} = \frac{0.204(2s + 1)(s + 1)}{s(s + 2.857)}$$

## Sistema di controllo progettato



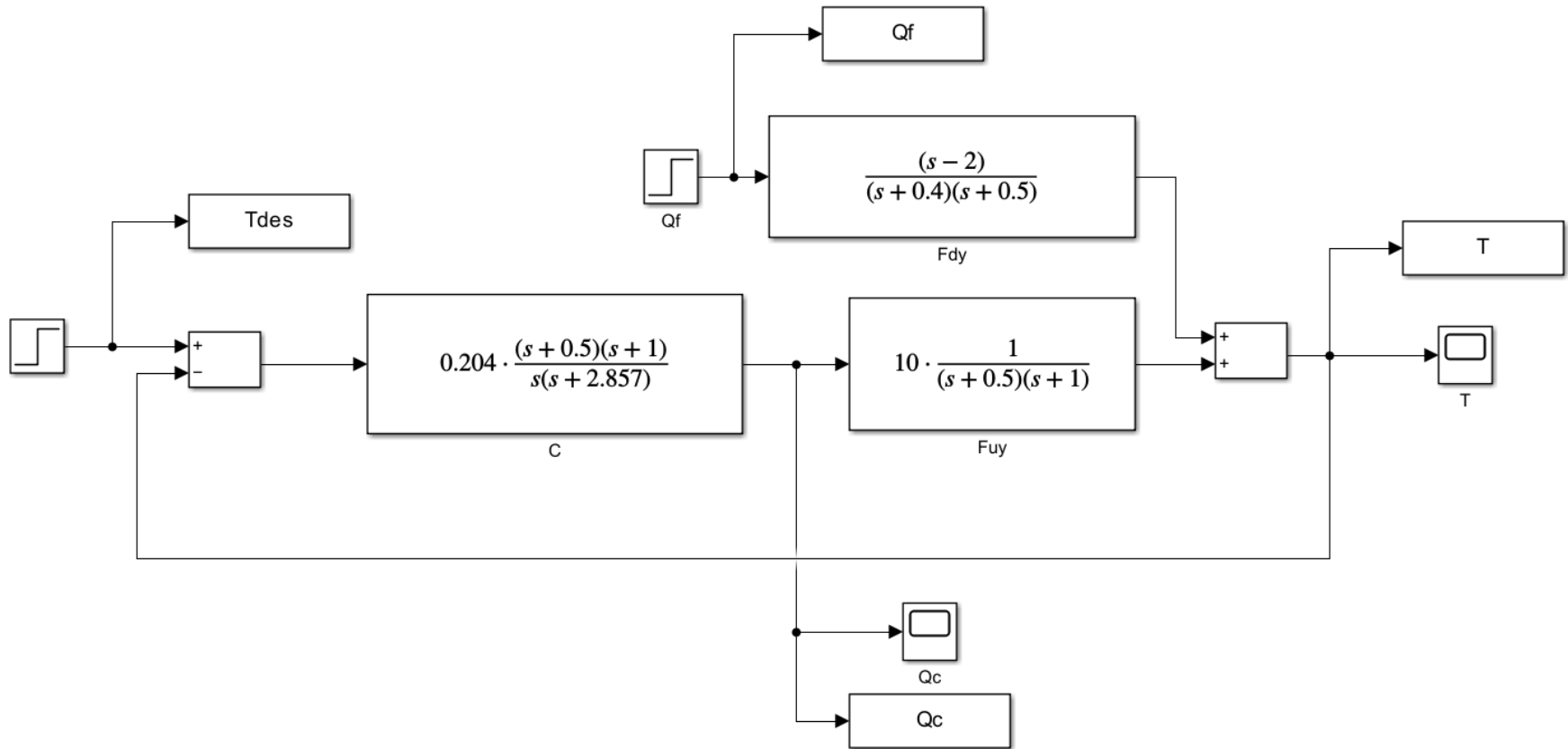
Si osservi come il controllore «cancelli» attraverso i suoi due zeri i due poli del processo.

Il fatto che il processo  $P(s)$  abbia tutti i poli e gli zeri nel semipiano sinistro garantisce che le cancellazioni siano tutte «stabili», cioè tali da non compromettere la stabilità interna del sistema di controllo. Avendo scelto una FdT desiderata asintoticamente stabile, il sistema di controllo risulta essere pertanto non solo esternamente stabile a ciclo chiuso ma anche internamente stabile.



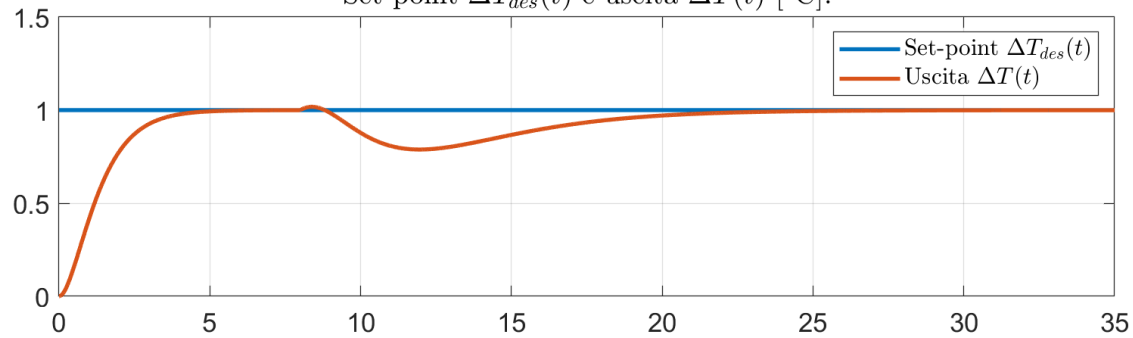
Quando il processo  $P(s)$  ha tutti i poli e gli zeri nel semipiano sinistro è pertanto possibile una scelta **completamente arbitraria** della FdT desiderata (ovviamente asintoticamente stabile, con grado relativo uguale o superiore a quello del processo, e compatibile con le specifiche sul comportamento a regime e sul comportamento transitorio)

## Simulazione dinamica

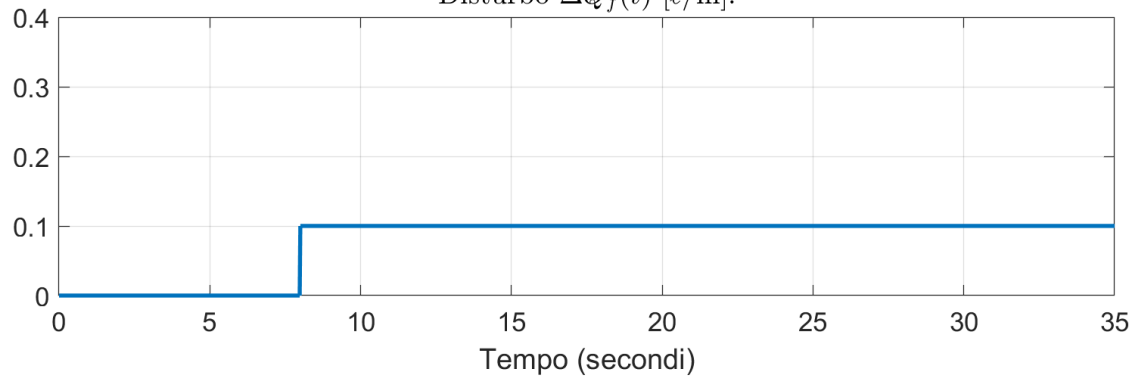


SintesiDiretta\_scambiatore.slx

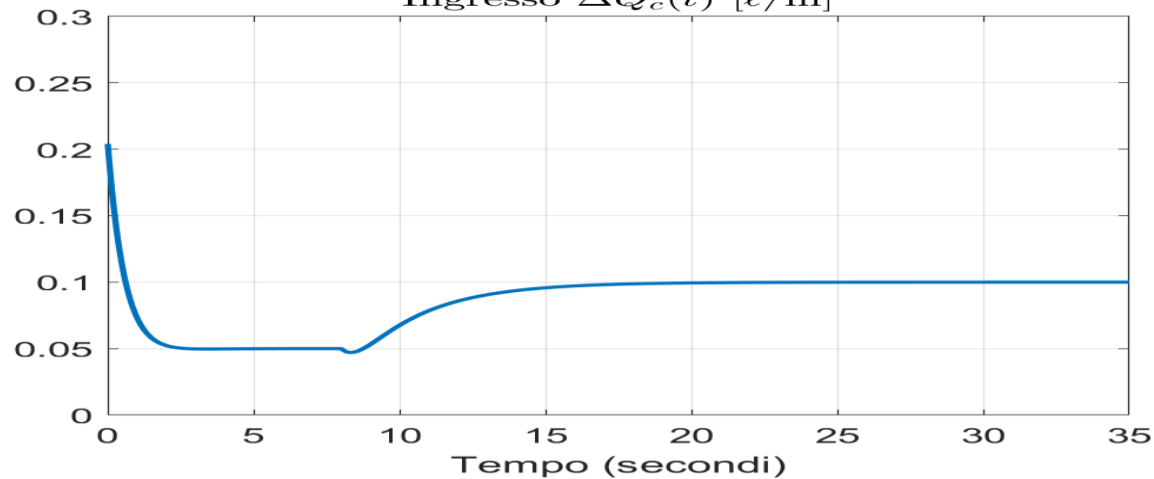
SintesiDiretta\_scambiatore\_mfile.m

Set-point  $\Delta T_{des}(t)$  e uscita  $\Delta T(t)$  [ $^{\circ}\text{C}$ ].

Uscita e set-point

Disturbo  $\dot{\Delta Q}_f(t)$  [ $\ell/\text{m}$ ].

Disturbo

Ingresso  $\Delta Q_c(t)$  [ $\ell/\text{m}$ ]

Ingresso manipolabile

Torniamo ad una delle slides precedenti:

C. Il sistema di controllo che si ottiene deve essere esternamente ed internamente stabile

**Se il processo  $P(s)$  ha tutti i poli e tutti gli zeri e parte reale negativa (processo «a fase minima») la scelta di una FdT desiderata che sia asintoticamente stabile garantisce nel contempo anche la stabilità interna del sistema di controllo**

Se il processo  $P(s)$  ha poli e/o zeri a parte reale positiva o nulla sussistono ulteriori vincoli e accorgimenti operativi, che descriviamo un po' più avanti.

**E' tempo di precisare quali siano gli «ulteriori vincoli» sulla scelta della FdT desiderata da imporre quando il processo possiede poli e/o zeri a parte reale positiva o nulla.**

Per comprendere la ragione di tali vincoli addizionali sulla scelta della FdT desiderata  $W_d(s)$ , da imporre quando il processo possiede poli e/o zeri a parte positiva o nulla, è conveniente riferirsi alla formula «semplificata» per il calcolo della FdT del controllore

$$R(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}$$

Si nota come a numeratore del controllore sia presente il termine  $D_P(s)$ . Ciò significa che in genere gli zeri del controllore operano una cancellazione completa di tutti i poli del processo, e se il **processo ha dei poli a parte reale positiva o nulla** si vanno a effettuare quelle cancellazioni non consentite che compromettono la stabilità interna del sistema di controllo.

Il modo per evitare questo fenomeno è **scegliere la FdT desiderata  $W_d(s)$  in modo che il polinomio  $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$  ammetta fra le proprie radici tutti i poli del processo aventi parte reale positiva o nulla**. In tal modo, la cancellazione «non consentita» fra zeri del controllore e poli del processo non avrà più luogo e sarà preservata la stabilità interna del sistema di controllo.

In altri termini, quando il processo possiede poli a parte reale positiva o nulla deve aversi che:

$$D_{W_d}(p_i) = N_{W_d}(p_i)$$

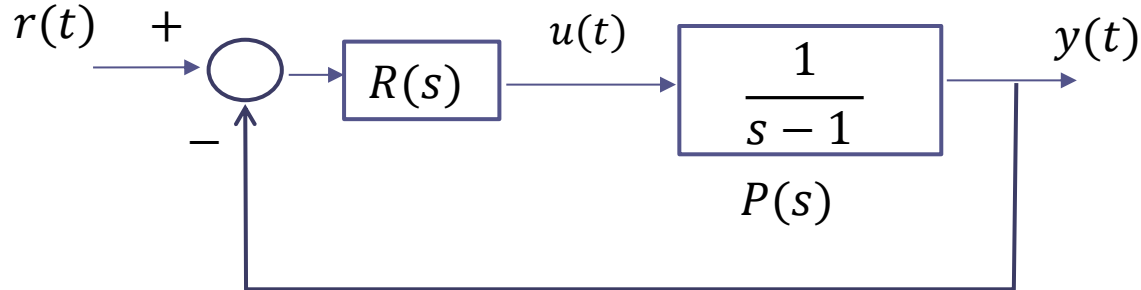
$\forall$  polo  $p_i$  del processo avente parte reale positiva o nulla



Quando il **processo ha un polo nell'origine**, per garantire che il polinomio  $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$  ammetta fra le proprie radici un polo nell'origine è sufficiente **scegliere la FdT desiderata  $W_d(s)$  con guadagno statico unitario.**

Come verifica di questa affermazione si analizzi l' esempio preliminare di progetto mediante sintesi diretta sviluppato alcune slides fa, in cui si scelse una FdT desiderata avente guadagno statico unitario e come risultato di questa scelta il polinomio  $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$  aveva fra le proprie radici proprio un polo nell'origine

Si noti come la scelta di una FdT desiderata avente guadagno statico unitario è molto comune, in quanto serve a garantire che il sistema di controllo goda della proprietà di precisione statica.



## Specifiche

S1 Precisione statica

S2 Risposta al gradino esente da oscillazioni

S3  $T_a \leq 1s$

Il processo  $P(s) = \frac{1}{s-1}$  ha grado relativo unitario. Affinché sia garantita la fisica realizzabilità del controllore dobbiamo scegliere una FdT desiderata a ciclo chiuso avente anch'essa grado relativo unitario.

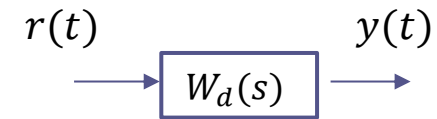
Ignorando, **temporaneamente**, i vincoli sulla scelta della FdT desiderata derivanti dal fatto che **il processo possiede un polo a parte reale positiva**, ipotizziamo la scelta di una FdT desiderata nella forma di un processo STC asintoticamente stabile con **guadagno statico unitario** per soddisfare la specifica S1:

$$W_d(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

S1 Precisione statica

S2 Risposta al gradino esente da oscillazioni

S3  $T_a \leq 1s$



$$W_d(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

Anche la specifica S2 è soddisfatta perché un processo STC esibisce una risposta al gradino esente da oscillazioni

Per garantire il soddisfacimento della specifica S3 impieghiamo l'espressione esplicita del tempo di assestamento di un processo STC (che vale  $4.6 T$ ) e imponiamo che il suo valore non ecceda la soglia massima consentita:

$$4.6 T \leq 1 \quad \Rightarrow \quad T \leq 0.217$$

Scegliamo:  $T = 0.2$

$$W_d(s) = \frac{1}{0.2s + 1}$$

Determiniamo la FdT del controllore applicando la formula:

$$R(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}$$

Ricaviamo in forma esplicita i polinomi a numeratore e denominatore nella FdT desiderata ed in quella del processo

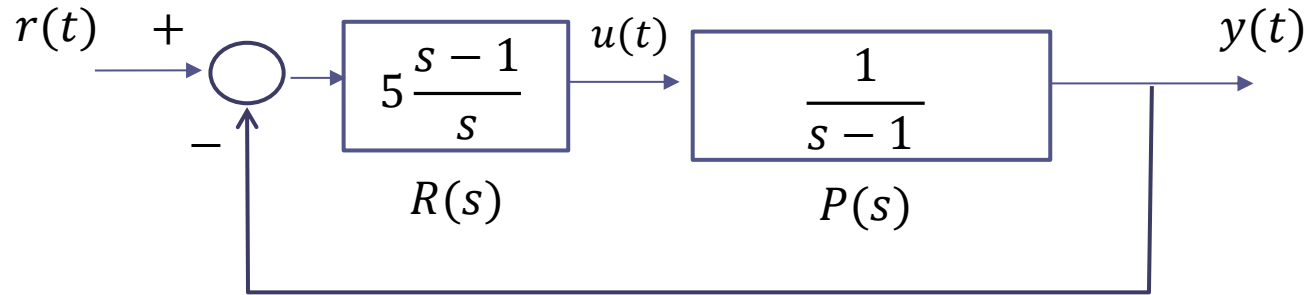
$$P(s) = \frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N_P(s) &= 1 \\ D_P(s) &= s-1 \end{aligned}$$

$$W_d(s) = \frac{1}{0.2s+1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N_{W_d}(s) &= 1 \\ D_{W_d}(s) &= 0.2s+1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s) = 0.2s$$

Si ha quindi:

$$R(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} = \frac{1}{0.2s} \cdot \frac{s-1}{1} = 5 \frac{s-1}{s}$$

## Sistema di controllo progettato



Cancellazione instabile fra uno zero del regolatore ed un polo del processo. Il sistema di controllo è esternamente stabile ma **internamente instabile**

**La risposta libera** con condizione iniziale  $y(0)$  non nulla **diverge** (v. TEST 2 nelle slides «Stabilità» per un esempio del tutto analogo)

La FdT desiderata non soddisfa il vincolo enunciato in precedenza in quanto il polinomio  $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s) = 0.2s$  **non ammette** fra le proprie radici il polo del processo avente parte reale positiva (polo in  $s = 1$ ).

Cerchiamo una FdT desiderata più generale che soddisfi tale vincolo

$$W_d(s) = \frac{1}{0.2s + 1} \cdot \frac{\tau_z s + 1}{T_p s + 1}$$

$\tau_z$  e  $T_p$  sono parametri da determinare  
 $T_p > 0$

$W_d(s)$  ha grado relativo unitario, e anche guadagno statico unitario.

$$N_{W_d}(s) = \tau_z s + 1$$

$$\Rightarrow D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s) = (0.2s + 1)(T_p s + 1) - (\tau_z s + 1)$$

$$D_{W_d}(s) = (0.2s + 1)(T_p s + 1)$$

$$= s \cdot [0.2T_p s + (0.2 + T_p - \tau_z)]$$

$D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$  ammette fra le proprie radici  $s = 1$  se vale la seguente relazione:

$$0.2T_p + (0.2 + T_p - \tau_z) = 0 \Rightarrow \tau_z = 1.2T_p + 0.2$$

I parametri  $\tau_z$  e  $T_p$  devono pertanto soddisfare questo vincolo

$$\tau_z = 1.2T_p + 0.2$$

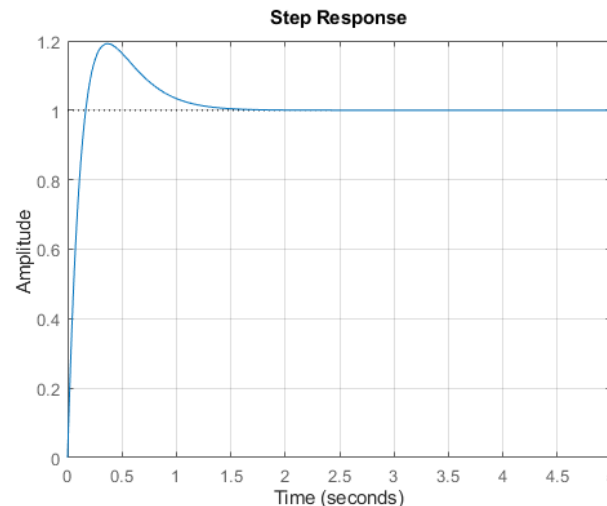
Fissiamo un valore per  $T_p$  e ricaviamo  $\tau_z$  di conseguenza.

Come scelta di primo tentativo, fissiamo  $T_p = 0.2$  in modo da aggiungere alla  $W_d(s)$  un ulteriore polo sovrapposto a quello già presente

Sostituendo  $T_p = 0.2$  nella relazione in alto si ottiene  $\tau_z = 0.44$

$$W_d(s) = \frac{1}{0.2s + 1} \cdot \frac{\tau_z s + 1}{T_p s + 1} = \frac{0.44s + 1}{(0.2s + 1)^2}$$

Verifichiamo mediante simulazione se il tempo di assestamento della  $W_d(s)$  soddisfa la specifica S3



**NON VA BENE**

```
s=tf('s')
```

```
Wd=(0.44*s+1)/((0.2*s+1)^2)
step(Wd,[0:0.01:5]),grid
```

```
Info=stepinfo(Wd,SettlingTimeThreshold=0.01);
Tal=Info.SettlingTime
```

$$\tau_z = 1.2T_p + 0.2$$

Per ridurre il tempo di assestamento della risposta al gradino di  $W_d(s)$  scegliamo un valore più piccolo per la costante di tempo  $T_p$  del polo:  $T_p = 0.1s$

Sostituendo  $T_p = 0.1s$  nella relazione in alto si ottiene  $\tau_z = 0.32s$

$$W_d(s) = \frac{1}{0.2s + 1} \cdot \frac{\tau_z s + 1}{T_p s + 1} = \frac{0.32s + 1}{(0.2s + 1)(0.1s + 1)}$$

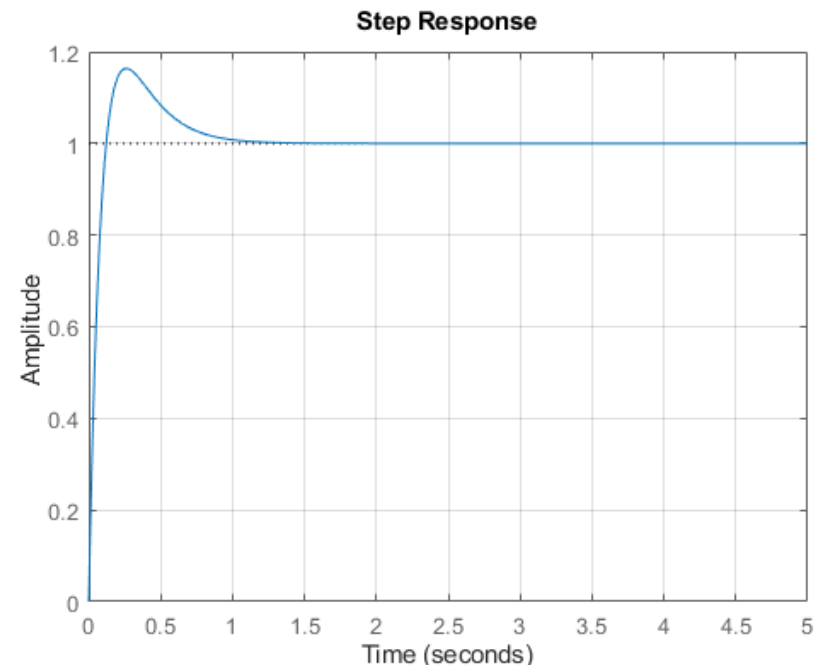
Verifichiamo mediante simulazione se il tempo di assestamento della  $W_d(s)$  così modificata soddisfa la specifica S3

```
s=tf('s')
Wd=(0.32*s+1)/((0.2*s+1)*(0.1*s+1))
step(Wd,[0:0.01:5]),grid

Info=stepinfo(Wd,SettlingTimeThreshold=0.01);
Tal=Info.SettlingTime
```

Tal =

0.9544

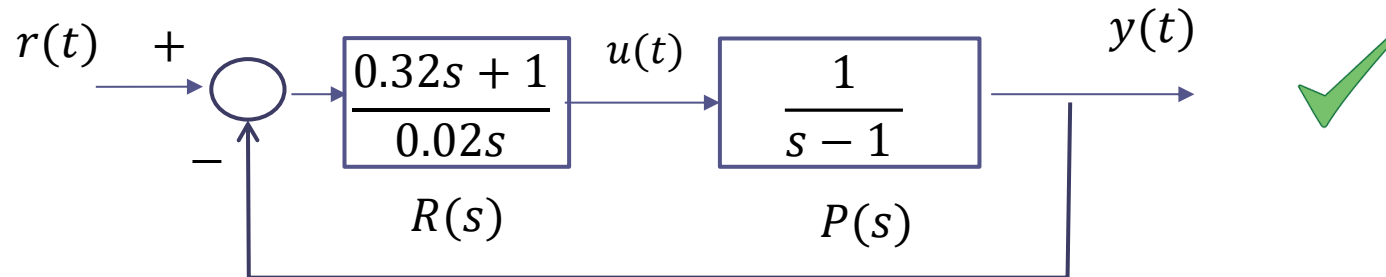


Avendo individuato  $W_d(s)$ , determiniamo la FdT del controllore:

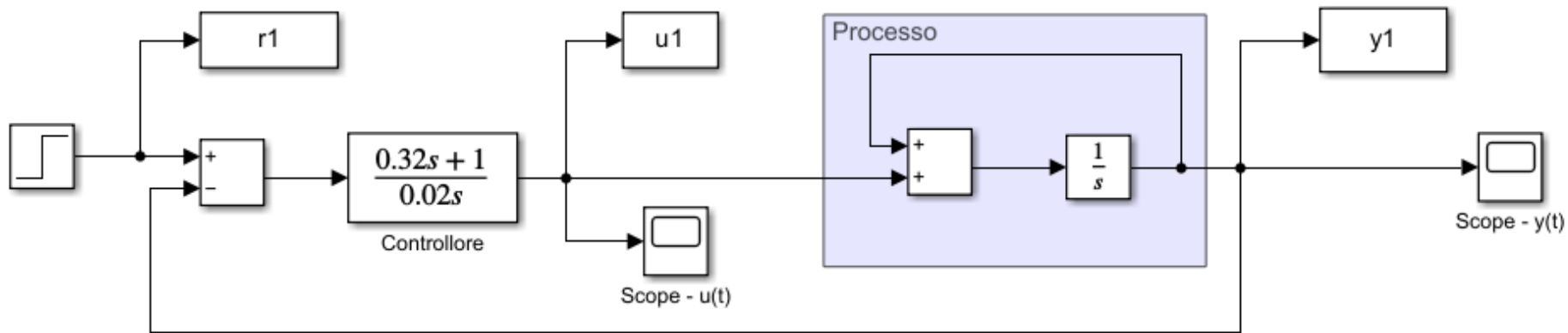
$$W_d(s) = \frac{0.32s + 1}{(0.2s + 1)(0.1s + 1)} = \frac{0.32s + 1}{0.02s^2 + 0.3s + 1} \quad P(s) = \frac{1}{s - 1}$$

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} = \frac{0.32s + 1}{0.02s^2 - 0.02s} \cdot \frac{s - 1}{1} \\ &= \frac{0.32s + 1}{0.02s(s - 1)} \cdot \frac{\cancel{(s - 1)}}{1} = \frac{0.32s + 1}{0.02s} \end{aligned}$$

Sistema di controllo progettato:



$$W_r^y(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} = \frac{0.32s + 1}{(0.2s + 1)(0.1s + 1)}$$



```
Tsim=3; % durata simulazione
y0=2; % condizione iniziale uscita
```

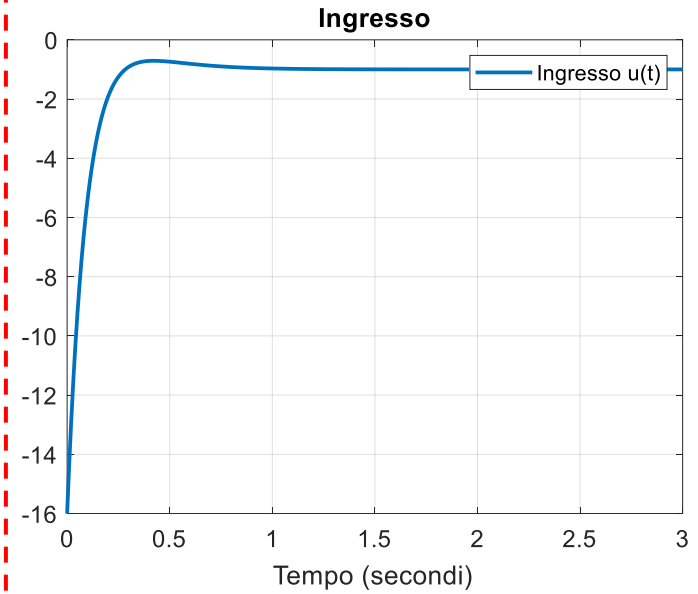
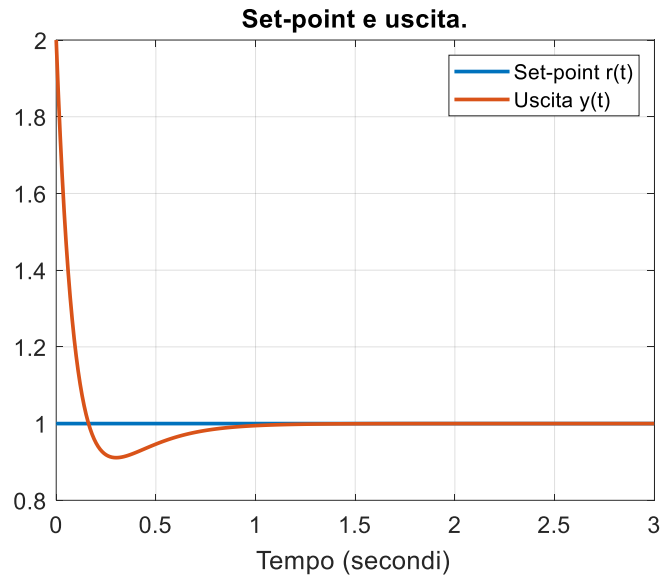
```
sim('SintesDirettaProcessoInstabile.slx')
```

```
figure(1)
plot(r1,'LineWidth',2), hold on
plot(y1,'LineWidth',2), hold off
set(gca,'FontSize',13)
grid
legend('Set-point r(t)', 'Uscita y(t)')
xlabel('Tempo (secondi)')
ylabel('')
title('Set-point e uscita.')
```

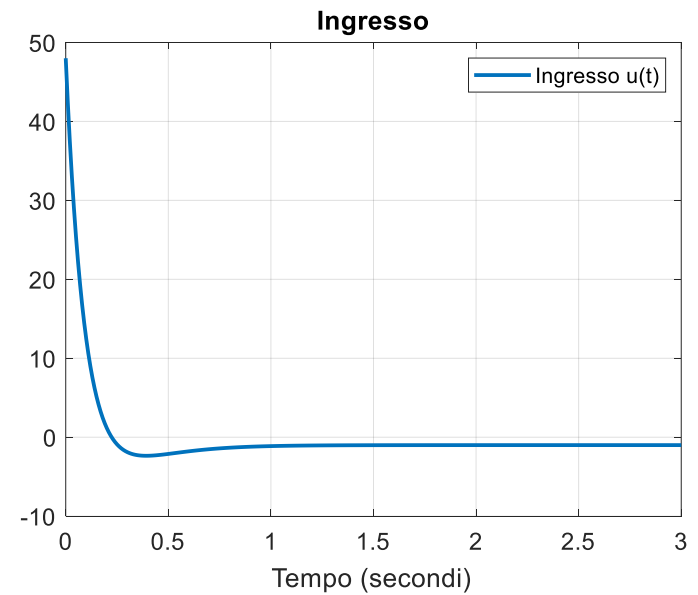
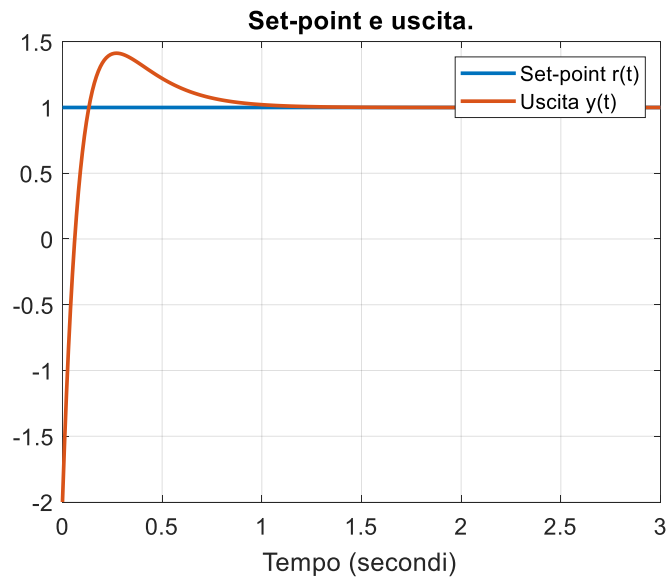
```
figure(2)
plot(u1,'LineWidth',2), grid
set(gca,'FontSize',13)
xlabel('Tempo (secondi)')
ylabel('')
title('Ingresso')
legend('Ingresso u(t)')
```

SintesDirettaProcessoInstabile.slx  
SintesDirettaProcessoInstabile\_mfile.m

$$y(0) = 2$$



$$y(0) = -2$$



Abbiamo visto che quando il **processo ha dei poli a parte reale positiva o nulla** non è sufficiente che la FdT desiderata  $W_d(s)$  abbia un grado relativo maggiore o uguale di quello del processo, ma si deve anche scegliere  $W_d(s)$  in modo che il polinomio  $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$  ammetta fra le proprie radici («fattorizzi») tutti i poli del processo aventi parte reale positiva o nulla. Se non si ottempera a questo vincolo si realizza un **sistema di controllo internamente instabile** in cui la risposta in presenza di condizioni iniziali diverse da zero diverge.

Ulteriori accorgimenti vanno adottati quando il processo possiede degli **zeri a parte reale positiva**.

$$R(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}$$

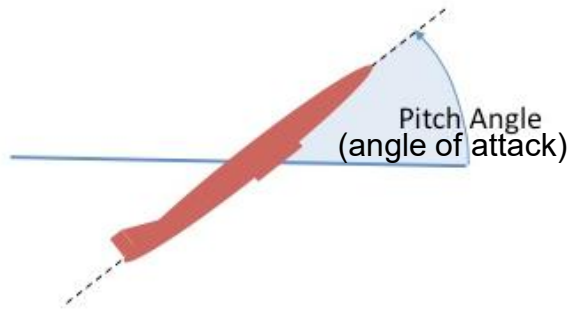
Si nota come a denominatore del controllore sia presente il termine  $N_P(s)$ , cioè il numeratore della FdT del processo. Ciò implica che **se il processo ha degli zeri a parte reale positiva questi diventano dei poli del controllore**, e anche stavolta si vanno a effettuare quelle cancellazioni non consentite che compromettono la stabilità interna del sistema di controllo (il segnale di ingresso al processo diverge).

Il modo per evitare questo fenomeno è **scegliere la FdT desiderata  $W_d(s)$  in modo che il polinomio  $N_{W_d}(s)$  ammetta fra le proprie radici tutti i poli del processo aventi parte reale positiva (in altri termini, la FdT desiderata deve avere fra i propri zeri tutti gli zeri a parte reale positiva dal processo)**. In tal modo, la cancellazione non consentita fra zeri del controllore e poli del processo non avrà più luogo e sarà preservata la stabilità interna del sistema di controllo.

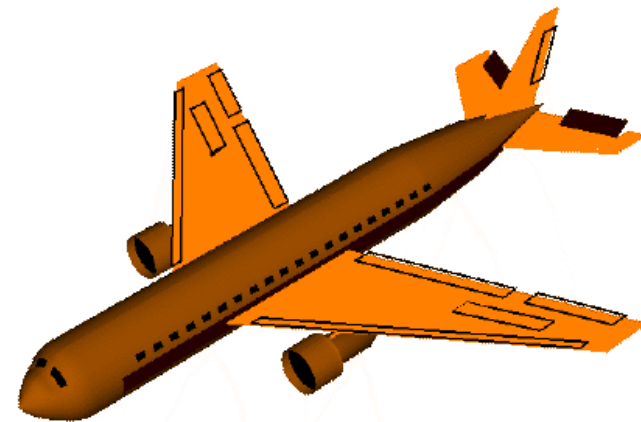
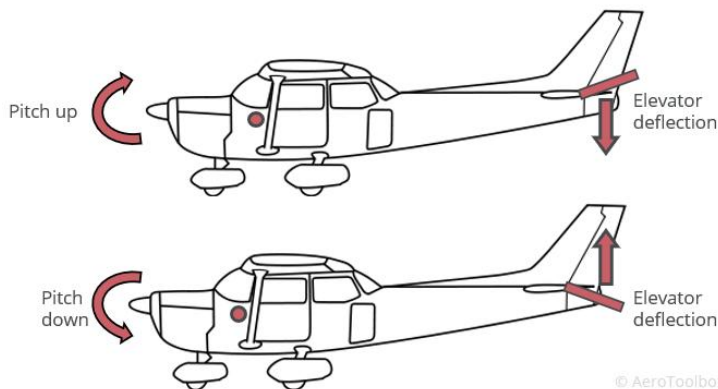
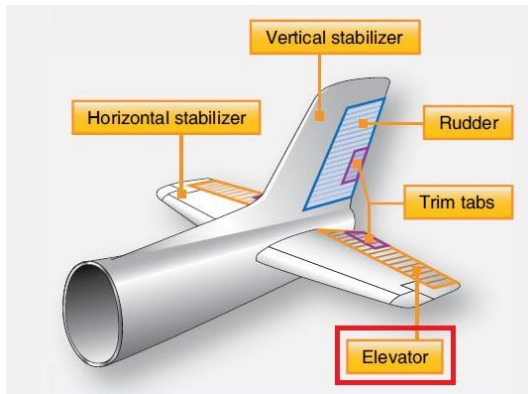
In altri termini, quando il processo possiede zeri a parte reale positiva deve aversi che:

$$N_{W_d}(z_i) = 0$$

$\forall$  zero  $z_i$  del processo avente parte reale positiva



In un velivolo, il controllo dell'angolo di beccheggio (detto «pitch angle» o anche «angle of attack») - e di riflesso il controllo dell'altitudine - si realizza ruotando le superfici di controllo denominate «elevators», tipicamente collocate nella coda del velivolo.



## Airplane Control Surfaces: Ailerons, Rudder, Elevators, Spoilers, Flaps, and Slats

### Ailerons

- Purpose: Control roll.
- Location: Outer edges of the wings.
- Function: Move in opposite directions to tilt the plane's wings.

### Rudder

- Purpose: Control yaw.
- Location: Vertical stabilizer (tail fin).
- Function: Moves left or right to steer the plane left or right.

### Elevators

- Purpose: Control pitch.
- Location: Horizontal stabilizer (tailplane).
- Function: Move up or down to make the nose of the plane go up or down.

### Spoilers

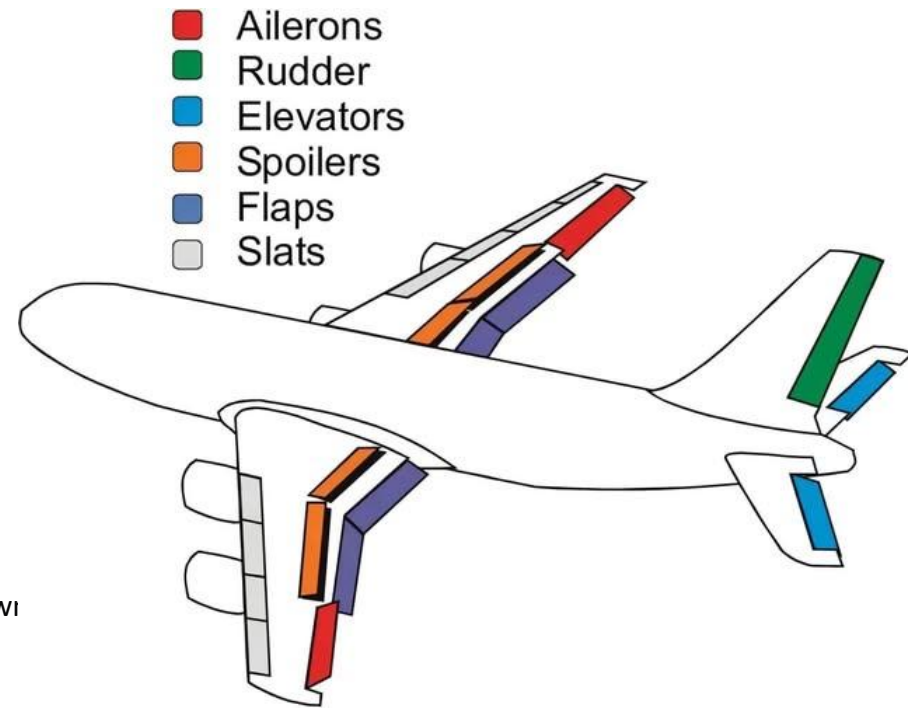
- Purpose: Reduce lift and increase drag.
- Location: Top surface of the wings.
- Function: Deploy upwards to disrupt airflow over the wing.

### Flaps

- Purpose: Increase lift at lower speeds.
- Location: Trailing edge of the wings.
- Function: Extend downwards to increase wing area and curvature.

### Slats

- Purpose: Increase lift at lower speeds.
- Location: Leading edge of the wings.
- Function: Extend forward to smooth airflow over the wing at high angles of attack.



La variazione di altezza del centro di massa del velivolo conseguente ad una variazione dell'angolo degli «elevators» mostra un fenomeno di **undershooting**, che si traduce in un modello matematico (linearizzato) della dinamica del velivolo caratterizzato dalla presenza di uno zero nel semipiano destro.

“When a pilot wants to gain altitude, he/she first has to rotate the aircraft to increase the angle of attack. To rotate the aircraft, a downward force of the tail is obtained by raising the elevator. That causes an overall downward force on the aircraft that initially lowers the center of gravity before the increased upward force on the main wings from the increased angle of attack raises the aircraft. High performance fighter aircraft often use canards\* instead to remove this undershooting behavior.”

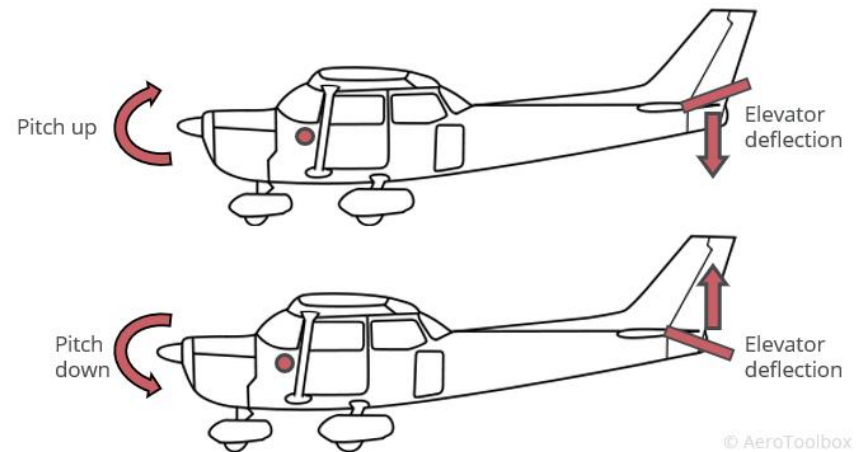


\*: “canards” denota **degli elevators montati sulle ali anziche in coda**

Funzione di trasferimento (dedotta a seguito di **linearizzazione**) fra l'angolo  $\delta_e(t)$  degli elevators (in gradi) e l'altezza  $h(t)$  (in metri) relativa ad un Boeing 747-200 che vola a velocità  $V=900$  km/h [Mach 0.85] ad una quota di 8500 m

$$H(s) = \frac{h(s)}{\delta_e(s)} = \frac{30(s-6)}{s(s^2+4s+13)}$$

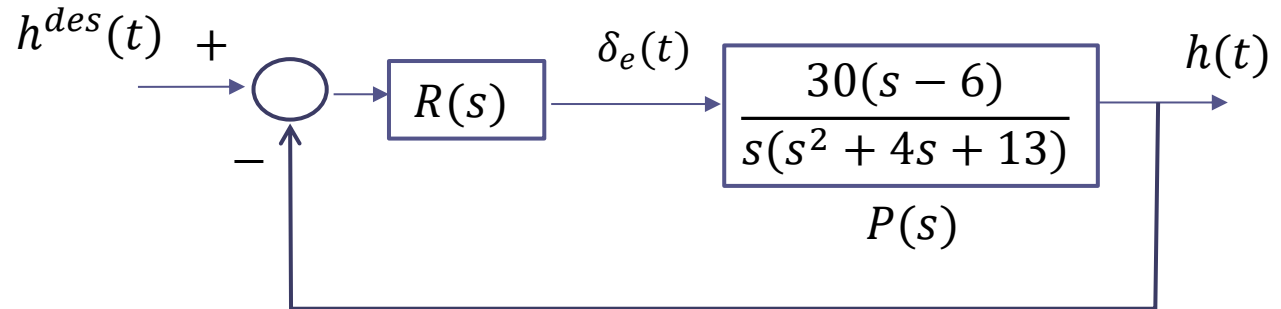
- $h$ : altitude
- $\delta_e$ : elevator deflection
  - (downward is positive.)



## Un altro esempio di sistema dinamico con undershooting



Durante un parcheggio parallelo in retromarcia, il centro di massa del veicolo esibisce un comportamento simile a quello di un velivolo durante una variazione di altitudine



## Specifiche

- S1 Precisione statica
- S2 Risposta al gradino esente da oscillazioni
- S3  $T_a \leq 5s$

Progettiamo mediante sintesi diretta il sistema di controllo.

Il grado relativo della FdT del processo è pari a 2, quindi anche la FdT desiderata la sceglieremo a grado relativo 2.

In questo esempio si devono fronteggiare due diverse situazioni potenzialmente in grado di mettere in crisi la stabilità interna del sistema di controllo:

- Il processo ha uno zero a parte reale positiva
- Il processo ha un polo nell'origine, quindi a parte reale nulla.

S1 Precisione statica

S2 Risposta al gradino esente da oscillazioni

S3  $T_a \leq 5s$

$$P(s) = \frac{30(s-6)}{s(s^2+4s+13)} = \frac{-180 \cdot (1 - \frac{1}{6}s)}{s(s^2+4s+13)}$$

FdT desiderata: 
$$W_d(s) = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{(1 + Ts)^3}$$

$W_d(s)$  ha grado relativo 2, quindi il regolatore è fisicamente realizzabile.

$W_d(s)$  ha guadagno statico unitario quindi è garantita la specifica S1.

Il fatto che  $W_d(s)$  ha guadagno statico unitario garantisce anche (come detto in precedenza) che il controllore non cancellerà con un proprio zero il polo nell'origine del processo.

$W_d(s)$  ha lo stesso zero a parte reale positiva del processo, quindi il controllore non cancellerà con un suo polo lo zero a parte reale positiva del processo.

$W_d(s)$  ha solo poli reali (ok specifica S2)

Ricerchiamo un valore di  $T$  sufficientemente piccolo tale da garantire la specifica S3.

Ricerchiamo un valore di  $T$  sufficientemente piccolo tale da garantire la specifica S3.

$$W_d(s) = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{(1 + Ts)^3}$$

**Se** avessimo  $W_d(s) = \frac{1}{(1+Ts)^2}$  sceglieremmo  $T$  in modo che sia soddisfatta la disuguaglianza

$$7T \leq 5 \quad T \leq \frac{5}{7} = 0.71$$

Ponendo  $T = 0.7$ :

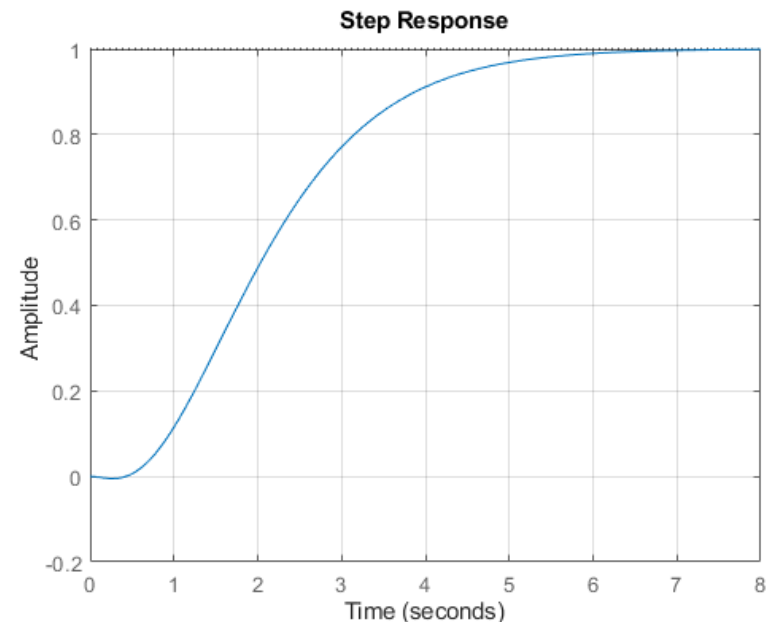
$$W_d(s) = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{(1 + 0.7s)^3}$$

```
s=tf('s')
Wd=(1-(s/6))/((0.7*s+1)^3)
step(Wd,[0:0.01:8]),grid
```

```
Info=stepinfo(Wd,SettlingTimeThreshold=0.01);
Tal=Info.SettlingTime
```

```
Tal =
    6.0373
```

**NON VA BENE**

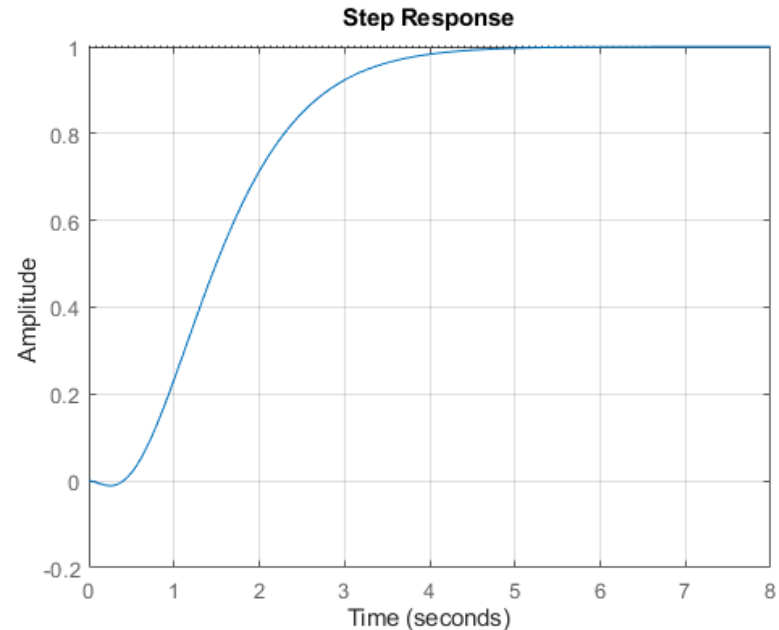


Per ridurre il tempo di assestamento della risposta al gradino di  $W_d(s)$ , scegliamo un valore più piccolo per la costante di tempo  $T$  :  $T = 0.5s$

```
s=tf('s')
Wd=(1-(s/6))/((0.5*s+1)^3)
step(Wd,[0:0.01:8]),grid

Info=stepinfo(Wd,SettlingTimeThreshold=0.01);
Tal=Info.SettlingTime
```

```
Tal =
    4.3514
```



**Scegliamo pertanto la FdT desiderata come segue:**

$$W_d(s) = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{(1 + 0.5s)^3}$$

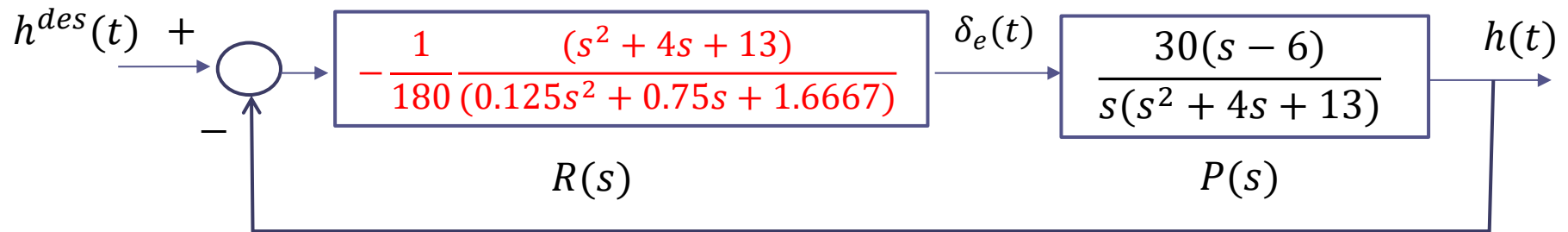
Avendo individuato  $W_d(s)$ , determiniamo la FdT del controllore:

$$W_d(s) = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{(1 + 0.5s)^3} = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{0.125s^3 + 0.75s^2 + 1.5s + 1} \quad P(s) = \frac{-180 \cdot (1 - \frac{1}{6}s)}{s(s^2 + 4s + 13)}$$

$$D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s) = 0.125s^3 + 0.75s^2 + 1.5s + 1 - \left(1 - \frac{1}{6}s\right) = 0.125s^3 + 0.75s^2 + 1.6667s$$

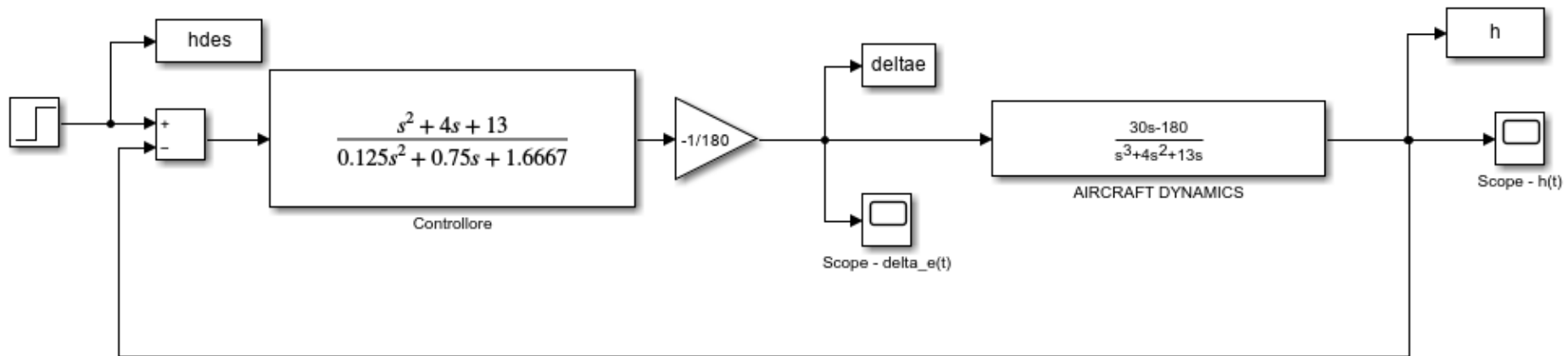
$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} = \frac{\cancel{(1 - \frac{1}{6}s)}}{0.125s^3 + 0.75s^2 + 1.6667s} \cdot \frac{s(s^2 + 4s + 13)}{-180 \cdot \cancel{(1 - \frac{1}{6}s)}} \\ &= \frac{1}{\cancel{s}(0.125s^2 + 0.75s + 1.6667)} \cdot \frac{\cancel{s}(s^2 + 4s + 13)}{-180} \\ &= -\frac{1}{180} \frac{(s^2 + 4s + 13)}{(0.125s^2 + 0.75s + 1.6667)} \end{aligned}$$

Sistema di controllo progettato:



Nessuna cancellazione «proibita».

$$W_{h^{des}}^h(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} = W_d(s) = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{(1 + 0.5s)^3}$$





```
Tsim=15; % durata simulazione
h0=8500; % condizione iniziale altitudine

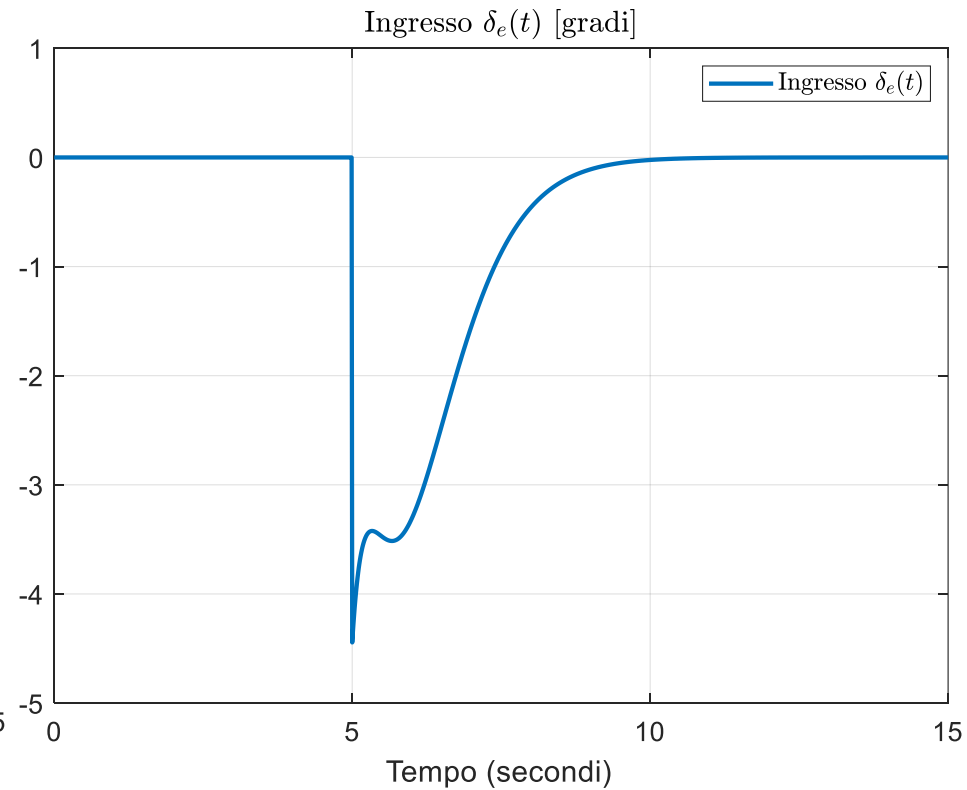
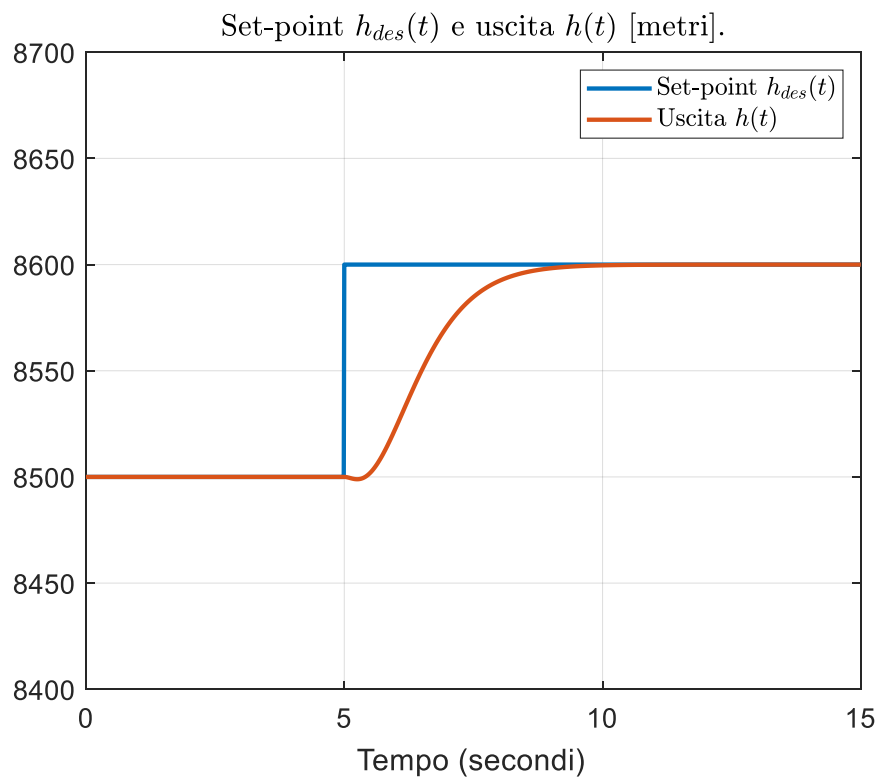
sim('SintesDirettaBoeing747.slx')

figure(1)
plot(hdes,'LineWidth',2), hold on
plot(h,'LineWidth',2), hold off
set(gca,'FontSize',13)
grid
ylim([8400 8700])
legend('Set-point  $h_{des}(t)$ ', 'Uscita  $h(t)$ ','interpreter', 'latex')
xlabel('Tempo (secondi)')
ylabel('')
title('Set-point  $h_{des}(t)$  e uscita  $h(t)$  [metri].','interpreter', 'latex')

figure(2)
plot(deltae,'LineWidth',2), grid
ylim([-5 1])
set(gca,'FontSize',13)
xlabel('Tempo (secondi)')
ylabel('')
title('Ingresso  $\delta_e(t)$  [gradi]','interpreter', 'latex')
legend('Ingresso  $\delta_e(t)$ ','interpreter', 'latex')
```

Il set-point impone un aumento di quota di 100 metri all'istante  $t=5$ .

Undershooting dell'altitudine nei primi istanti successivi a  $t=5$



## Riassunto linee guida per la scelta della FdT desiderata

Il **grado relativo** della FdT desiderata  $W_d(s)$  deve essere maggiore o uguale al grado relativo del processo  $P(s)$ . Nella pratica conviene sempre che sia uguale.

La FdT desiderata  $W_d(s)$  deve essere **asintoticamente stabile**, e la sua risposta al gradino deve soddisfare le specifiche sul comportamento a regime e sul transitorio.

Quando il **processo ha dei poli a parte reale positiva o nulla** si deve scegliere  $W_d(s)$  in modo che il polinomio  $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$  ammetta fra le proprie radici («fattorizzi») tutti i poli del processo aventi parte reale positiva o nulla, cioè:

$$D_{W_d}(p_i) = N_{W_d}(p_i) \quad \forall \text{ polo } p_i \text{ del processo avente parte reale positiva o nulla}$$

N.B.: Quando il **processo ha un polo nell'origine**, per garantire che il polinomio  $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$  ammetta fra le proprie radici un polo nell'origine è sufficiente scegliere la FdT desiderata  $W_d(s)$  con guadagno statico unitario.

Quando il **processo ha degli zeri a parte reale positiva** la FdT desiderata  $W_d(s)$  deve ammettere fra i propri zeri tutti gli zeri a parte reale positiva del processo, cioè:

$$N_{W_d}(z_i) = 0 \quad \forall \text{ zero } z_i \text{ del processo avente parte reale positiva}$$

## **Una puntualizzazione che sarà chiara sulla base di argomenti che saranno trattati un po' più avanti (v. «comportamento a regime»)**

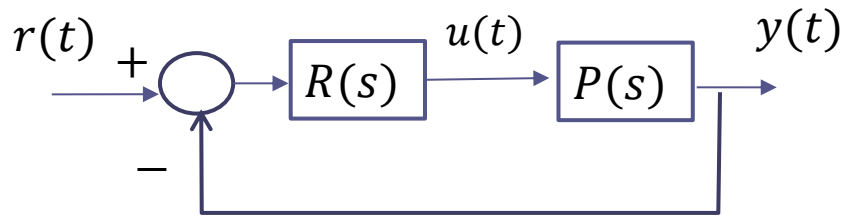
Se il processo  $P(s)$  non contiene poli nell'origine, la scelta di una FdT a ciclo chiuso con guadagno statico unitario, volta a garantire la precisione statica, conduce automaticamente ad un controllore avente (almeno) un polo nell'origine, che quindi garantisce anche la reiezione di un disturbo costante.

### **Difetti della sintesi diretta**

- La sintesi diretta richiede la perfetta conoscenza del modello matematico del processo, e le sue prestazioni decadono in maniera difficilmente predicibile se il modello matematico del processo si scosta da quello nominale impiegato per la sintesi del controllore
- Se il processo è descritto da una FdT di ordine elevato la sintesi diretta produce dei controllori aventi FdT altrettanto complesse (il controllore «eredita» la complessità del processo). Altre metodologie di sintesi permettono di ottenere prestazioni analoghe o confrontabili con dei controllori molto più semplici (ad es. P, PI)

## Esercizi di approfondimento da svolgere autonomamente

**Esercizio** – Sintesi diretta per un processo asintoticamente stabile del secondo ordine



$$P(s) = \frac{2(s + 1)}{(s + 2)(s + 3)}$$

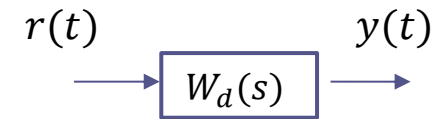
### Specifiche

S1 Precisione statica

S2 Risposta al gradino monotona crescente

S3  $T_a \leq 0.5s$

- S1 Precisione statica
- S2 Risposta al gradino monotona crescente
- S3  $T_a \leq 0.5s$



Il processo  $P(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)}$  ha grado relativo unitario. Affinché sia garantita la fisica realizzabilità del controllore dobbiamo scegliere una FdT desiderata a ciclo chiuso avente anch'essa grado relativo unitario (o eventualmente grado relativo superiore, scelta peraltro mai adottata in quanto non apporta alcun beneficio). Ipotizziamo la scelta di una FdT desiderata nella forma di un processo STC asintoticamente stabile:

$$W_d(s) = \frac{\mu}{T_s + 1}$$

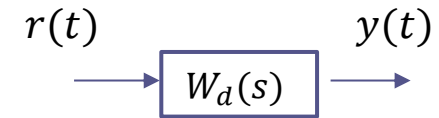
Per garantire la specifica S1 il guadagno statico  $\mu = W_d(0)$  deve essere unitario

$$W_d(s) = \frac{1}{T_s + 1}$$

S1 Precisione statica

S2 Risposta al gradino monotona crescente

S3  $T_a \leq 0.5s$



$$W_d(s) = \frac{1}{T_s + 1}$$

S2 è soddisfatta perché un processo STC esibisce una risposta al gradino monotona crescente

Per garantire il soddisfacimento della specifica S3 dobbiamo impiegando l'espressione esplicita del tempo di assestamento di un processo STC (che vale  $4.6T$ ) e imponendo che il suo valore non eccedesse la soglia massima consentita:

$$4.6T \leq 0.5$$



$$T \leq 0.108$$



$$T = 0.1$$

$$W_d(s) = \frac{1}{0.1s + 1}$$

Determiniamo la FdT del regolatore  $R(s)$  tale da garantire che la FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita sia effettivamente pari alla  $W_d(s)$  scelta. Usiamo l'espressione della formula in funzione dei polinomi a numeratore e denominatore della FdT  $P(s)$  del processo e della FdT desiderata  $W_d(s)$ :

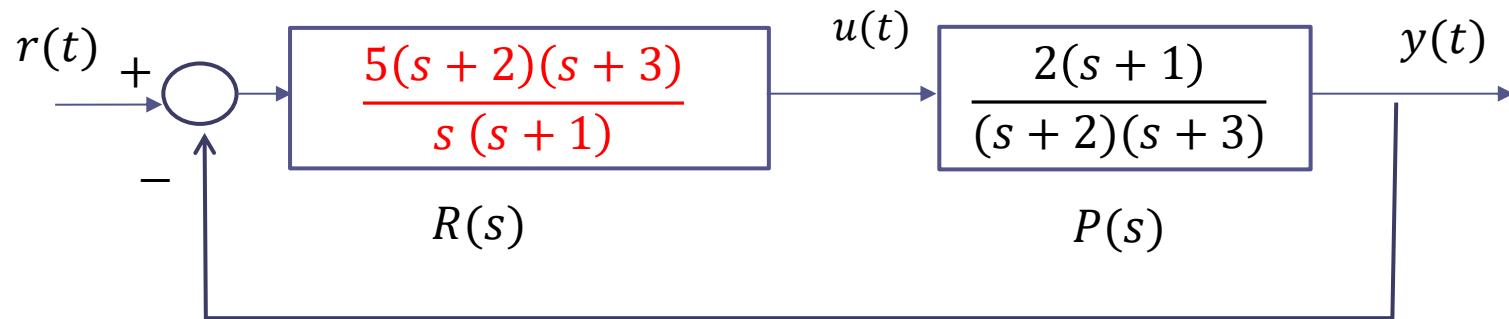
$$R(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}$$

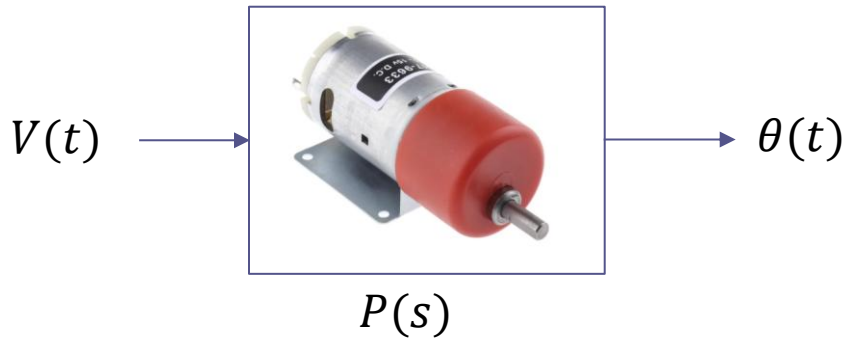
$$P(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N_P(s) &= 2(s+1) \\ D_P(s) &= (s+2)(s+3) \end{aligned}$$

$$W_d(s) = \frac{1}{0.1s+1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N_{W_d}(s) &= 1 \\ D_{W_d}(s) &= 0.1s+1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s) = 0.1s$$

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} = \frac{1}{0.1s} \cdot \frac{(s+2)(s+3)}{2(s+1)} = \\ &= \frac{(s+2)(s+3)}{0.2s(s+1)} = \frac{5(s+2)(s+3)}{s(s+1)} \end{aligned}$$

## Sistema di controllo progettato

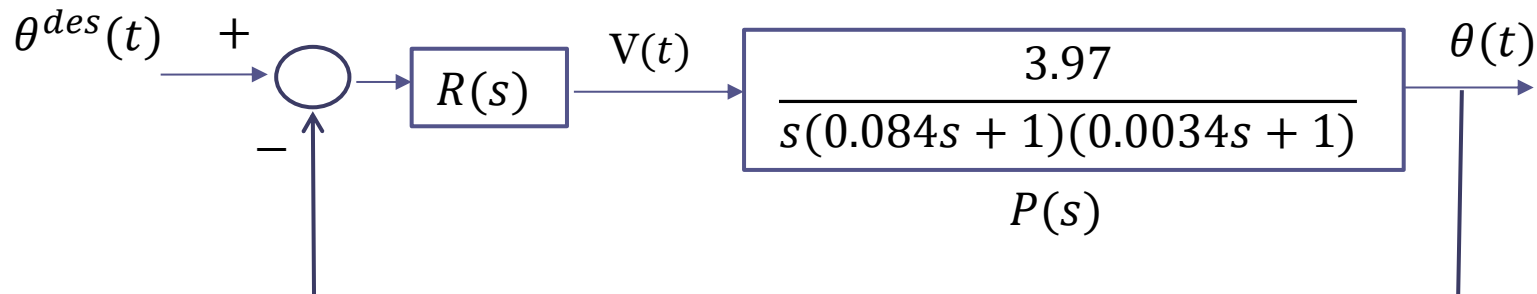




$$R=0.46 \Omega, L=15 \text{ mH}, J = 0.012 \text{ kg m}^2$$

$$B=0.0008 \text{ Ns/rad}, K=0.25 \text{ N/A}$$

$$P(s) = \frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s[(Ls + R)(Js + B) + K^2]} = \frac{3.97}{s(0.084s + 1)(0.0034s + 1)}$$



S1 Precisione statica

S2 Risposta monotona crescente

S3 Tempo di assestamento  $< 0.2$  secondi

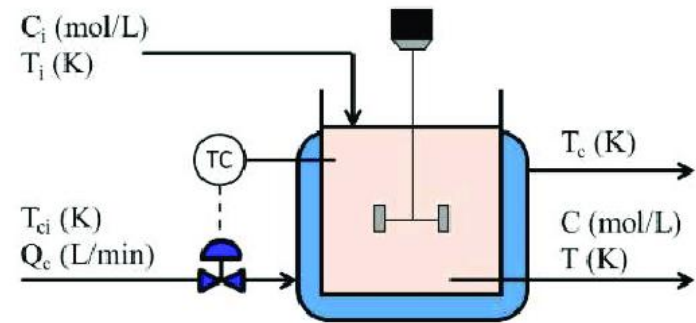
## Traccia soluzione

Sviluppare la sintesi trascurando nella FdT del processo il polo elettrico

$$P_{\text{appr}}(s) = \frac{3.97}{s(0.084s + 1)}$$

$$W_d(s) = \frac{1}{(1 + Ts)^2} \quad 6.6 T \leq 0.2$$

Un reattore chimico continuo (CSTR) con una reazione esotermica richiede un efficiente sistema di agitazione per garantire che la miscelazione sia omogenea e che il calore venga distribuito in modo uniforme, evitando surriscaldamenti localizzati. Le reazioni esotermiche producono calore, quindi il CSTR deve includere un **sistema di controllo della temperatura** (ad esempio, un sistema di raffreddamento esterno) per rimuovere l'eccesso di energia termica e mantenere la temperatura di reazione desiderata. .



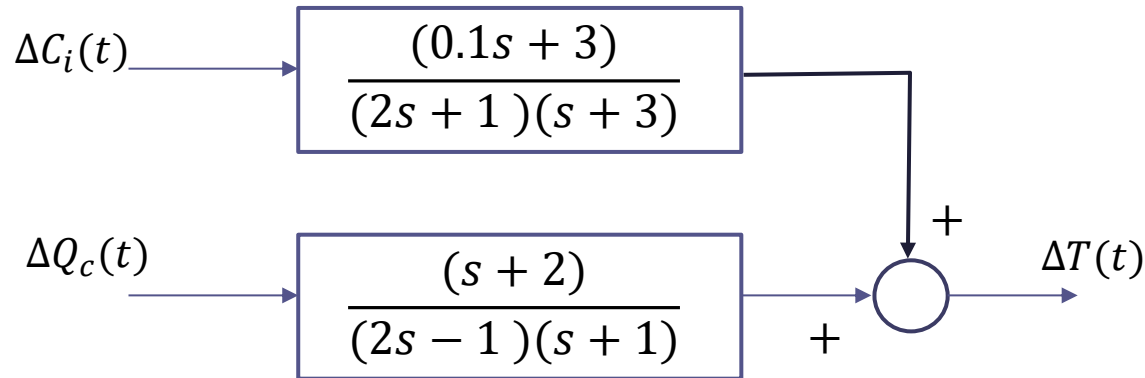
**Ingresso** Portata  $Q_c(t)$  del fluido di raffreddamento

**Uscita** La temperatura di reazione  $T$

**Disturbo** La concentrazione  $C_i(t)$  del reagente immesso nel reattore

L'instabilità termica deriva dalla relazione esponenziale tra la velocità di reazione e la temperatura.

## Schema a blocchi del processo linearizzato



Specifiche:

S1 Precisione statica

S2 Variazioni a gradino del set point o del disturbo non debbono indurre oscillazioni di temperatura