Il programma logicista

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2025-26

Gottlob Frege (1848-1925)

Frege: una cronologia sommaria

- 1879: *Begriffsschrift*. Frege presenta un simbolismo adeguato alla completa esplicitazione dei passi e delle ipotesi del processo deduttivo.
- 1884: *Grundlagen der Arithmetik*. La prima delle due grandi opere in cui Frege espone il suo programma logicista di fondazione della matematica.
- 1892: *Begriff und Gegenstand, Sinn und Bedeutung, Funktion und Begriff*. I saggi in cui Frege fonda la filosofia analitica e la moderna filosofia del linguaggio.
- 1893-1903: *Grundgesetze der Arithmetik*. La più compiuta e sistematica tra le opere fondazionali fregeane.

Frege: l’Ideografia

L’*Ideografia* di Frege è il primo calcolo logico in senso moderno, un sistema di assiomi per la logica dei quantificatori e dell’identità espresso in una notazione simbolica formale (benché molto ingombrante e complicata). Frege intende creare, più che un calcolo limitato alla logica tradizionalmente intesa, un linguaggio destinato a esprimere compiutamente tutta la matematica.

Per Frege non esiste una separazione netta tra logica dei termini e logica delle proposizioni. Introduce la distinzione tra proposizioni e *funzioni proposizionali* e (più avanti) quantifica anche su variabili per funzioni proposizionali (ottenendo un potere espressivo pari a quello della logica del secondo ordine).

Il programma logicista di Frege

Frege intende:

- definire in termini puramente logici i concetti della matematica pura, in particolare i concetti primitivi, irriducibili, come quello di numero naturale;
- derivare le verità della matematica pura a partire da principi meramente logici, impiegando metodi di ragionamento del tutto esplicitati.

Frege contro l'empirismo di J.S. Mill

Mill: apprendiamo le nozioni matematiche induttivamente, a partire dai fatti dell'esperienza. Frege: le proprietà dei numeri derivano dalla loro definizione; il metodo induttivo stesso può essere giustificato solo per mezzo dei teoremi generali dell'aritmetica.
Per Frege lo psicologismo in matematica è fuori strada: la base logica del ragionamento non va confusa con le condizioni soggettive interne al modo particolare con cui viene condotto.

Frege contro Kant

Kant: i giudizi matematici sono sintetici a priori, perché sono fecondi e non contengono le proprie conseguenze. Frege: un giudizio analitico contiene sì le proprie conseguenze, ma “come la pianta nel seme, non come la trave nella casa”. Nel giustificare i giudizi analitici si fa uso solo di leggi logiche generali e di definizioni.
Frege è però d'accordo con Kant nel ritenere la geometria sintetica a priori.

Frege contro Hilbert

Hilbert: per dimostrare che esistono enti matematici che cadono sotto un certo concetto bisogna dimostrare la *noncontraddittorietà* di quel concetto.
Frege: no, l'unico modo per dimostrare che un concetto è noncontraddittorio consiste nell'esibire oggetti che cadono sotto quel concetto.
In realtà Frege non comprende la nuova concezione dell'assiomatica di Hilbert e il fatto che i postulati di un sistema formale definiscono implicitamente i concetti che in essi compaiono.

Frege: concetto, rappresentazione, oggetto

I concetti sono oggettivi, se ne occupa la *logica*; le rappresentazioni sono soggettive, se ne occupa la *psicologia*.
Gli oggetti hanno una natura "satura", completa, mentre i concetti sono "insaturi". A livello simbolico, a un oggetto corrisponde un nome proprio, a un concetto un nome di funzione.(un predicato)
In *Funzione e concetto*, Frege identifica i concetti con le funzioni il cui valore è, per qualsiasi argomento, un valore di verità (Vero o Falso).

Frege: senso e significato

Il significato di un'espressione linguistica si pone a livello oggettuale, mentre il senso è intermedio tra questo e il piano puramente soggettivo della rappresentazione. Esempio: l'individuo Socrate è significato dei due termini "Il marito di Santippe" e "Il maestro di Platone", che hanno senso diverso. Per Frege:

- il significato di un **nome proprio** è un **oggetto**;
- il significato di un **predicato** è un **insieme** o una **relazione** (intesa come insieme di coppie ordinate);
- il significato di un **enunciato** è un **valore di verità.**

Frege: i principi di estensionalità e di comprensione

Per Frege, le estensioni di due concetti sono identiche sse sotto di essi cadono gli stessi oggetti (*principio di estensionalità*).
Inoltre, dato un qualsiasi concetto, esiste l'insieme di tutti e soli gli oggetti che cadono sotto quel concetto (*principio di comprensione*).
Questi principi sono impliciti nella teoria degli insiemi cantoriana, ma non vengono esplicitati.

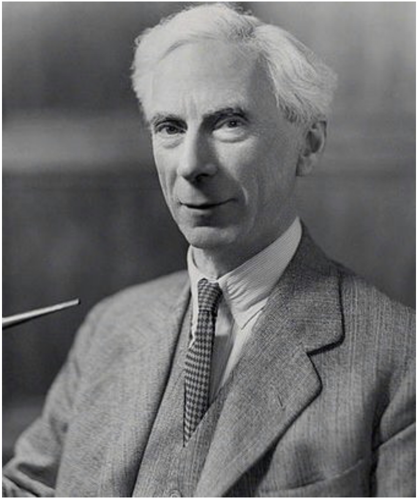
Frege: la definizione di numero naturale

Frege: il numero cardinale di un insieme A è la classe di equivalenza di A rispetto alla relazione di equipotenza.
In particolare:

- lo $\mathbf{0}$ è la classe di equivalenza dell'insieme vuoto;
- il **successore** del numero cardinale di A è il numero cardinale della classe formata da A assieme a un elemento x che non appartiene ad A;
- un numero naturale è qualunque oggetto possa essere ottenuto dallo 0 applicando ripetutamente l'operazione di successore.

In base a questa definizione, Frege è in grado di *dimostrare* gli assiomi di Peano.

Bertrand Russell (1872-1970)



Russell e i fondamenti della matematica

Partito da posizioni filosofiche neo-idealiste (era allievo di F.H. Bradley), dopo l'incontro con Peano al Congresso Internazionale di Filosofia del 1900 rivaluta la logica simbolica e si dedica a rivisitare il programma logicista fregeano.
Le sue opere principali sui fondamenti della matematica sono i *Principi della matematica* (1903) e soprattutto i *Principia Mathematica* (1910-1913), scritti con A.N. Whitehead.

Il paradosso di Russell

In base al principio fregeano di comprensione, esiste l'insieme

$$R = \{x : x \notin x\}$$

Si vede facilmente che $R \in R$ se e solo se $R \notin R$.
Frege viene annichilito dalla scoperta di questa antinomia e si ritira dalla ricerca logica attiva:

> *"A uno scrittore di scienza ben poco può giungere più sgradito del fatto che, dopo completato un lavoro, venga scosso uno dei fondamenti della sua costruzione."*

Russell: la diagnosi delle antinomie

Per Russell, la radice comune di tutte le antinomie è la nozione di *autoriferimento*:

Antinomia di Russell: se tutte le classi che non sono elementi di se stesse sono elementi di una classe R, questo vale *in particolare* per R.

Antinomia di Cantor: l'insieme il cui numero cardinale causa la difficoltà e proprio l'insieme di *tutti gli insiemi*.

Antinomia di Burali-Forti: la successione il cui numero ordinale causa la difficoltà e proprio la successione di *tutti gli ordinali*.

Russell vuole escludere l'esistenza di totalità che, se ammesse come legittime, potrebbero essere ampliate mediante l'aggiunta di elementi definiti in termini delle totalità stesse (*principio del circolo vizioso*).

Russell: la teoria dei tipi

L'universo insiemistico viene stratificato in tipi (individui, insiemi di individui, insiemi di insiemi di individui, ecc.): quando parliamo di tutti gli oggetti che soddisfano una data condizione, dobbiamo intendere tutti gli oggetti *di un determinato tipo* che soddisfano quella condizione.
Se ad esempio x^n rappresenta un insieme di tipo n, un enunciato del tipo $x^n \in x^{n+1}$ è sintatticamente ben formato, mentre $x^n \in x^n$ no. L'enunciato che dà luogo all'antinomia di Russell, quindi, è un "errore sintattico".
A questa gerarchia dei tipi, Russell affianca una parallela gerarchizzazione degli insiemi in *ordini*, volta a proibire definizioni di insiemi che possano violare il principio del circolo vizioso.

La teoria dei tipi: pro e contro

Pro	Contro
Si risolvono tutte le antinomie	Non si dimostra più il teorema di Cantor
	Non è possibile definire la nozione di numero reale
	Non si può dare una definizione soddisfacente di identità
	Non si può parlare di tutti i reali che soddisfano una certa condizione

Per ovviare a queste pecche, Russell introduce il controverso *assioma di riducibilità*.

L'altro assioma controverso è quello dell'*infinito*, che afferma l'esistenza di almeno un insieme infinito (assiomi esistenziali sono particolarmente problematici per una fondazione logicista della matematica).