31-10-25

Soluzioni esercizi dello scorso tutoraggio:

- Studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(y+3)+3|y|}{x^2+|y|}$$

DIREZIONI PRIVILEGIATE:

$$x=0 \rightsquigarrow \lim_{y\to 0} \frac{3\cancel{|y|}}{\cancel{|y|}} = 3$$

$$y=0 \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(0+3)}{\cancel{x^2}} = 3$$

Pertanto, se esiste, il limite vale 3. Si possono usare le coord. polari per mostrarlo, qui usiamo la definizione: $\forall \varepsilon>0$ vogliamo trovare $\delta>0$ tale che

$$\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\left| \frac{x^2(y+3)+3|y|}{x^2+|y|} - 3 \right|} < \varepsilon$$

quindi l'obiettivo é maggiorare in termini di $\|(x,y)-(0,0)\| =$ $= \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Abbiamo:

$$\left| \frac{x^2(y+3)+3|y|}{x^2+|y|} - 3 \right| = \left| \frac{x^2y+\cancel{3x^2}+\cancel{3|y|}-\cancel{3x^2}-\cancel{3|y|}}{x^2+|y|} \right| = \left| \frac{x^2y}{x^2+|y|} \right| =$$

$$= \frac{x^2|y|}{x^2+|y|} \le \frac{x^2\cancel{|y|}}{\cancel{|y|}} = x^2 \le x^2+y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

ossia basta prendere $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

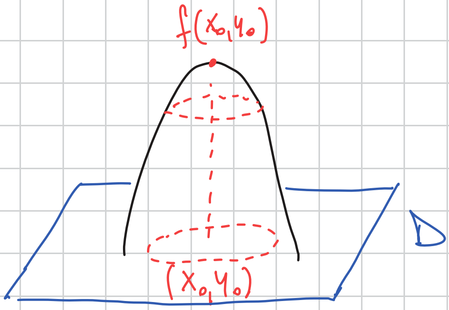
Lista 3 – Massimi e Minimi.

Definizione di max / min relativo.
Condizioni sufficienti per la loro esistenza.

DEF: Sia f definita in un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Il punto $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ si definisce:

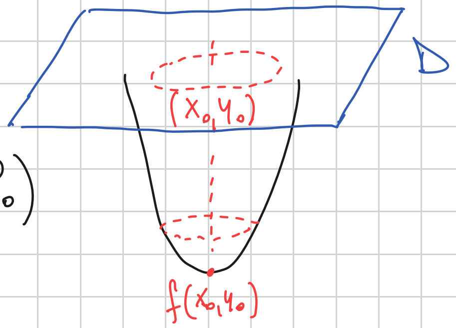
- PUNTO DI MAX RELATIVO per f se $\exists B_\delta(P_0)$ tale che

$$f(P) \leq f(P_0), \quad \forall P \in B_\delta(P_0)$$



- PUNTO DI MIN RELATIVO per f se $\exists B_\delta(P_0)$ tale che

$$f(P) \geq f(P_0), \quad \forall P \in B_\delta(P_0)$$



Esercizio: scrivere la def. di punto di sella.

Condizioni sufficienti: Sia $f \in C^2(D)$ e $P_0 \in D$, $P_0 = (x_0, y_0)$.

1) Se:
   a. $\nabla f(P_0) = 0$ (P_0 é punto critico)
   b. $\det(Hess_f(P_0)) > 0$, $f_{xx}(P_0) > 0$

$\Rightarrow$ P_0 é punto di minimo relativo per f.

2) Se:
   a. $\nabla f(P_0) = 0$
   b. $\det(Hess_f(P_0)) > 0$, $f_{xx}(P_0) < 0$

$\Rightarrow$ P_0 é punto di massimo relativo per f.

3) Se:
   a. $\nabla f(P_0) = 0$
   b. $\det(Hess_f(P_0)) < 0$

$\Rightarrow$ P_0 é un punto di sella per f.

[Ricordiamo: la matrice Hessiana contiene le derivate parziali seconde di f, ossia

$$\text{Hess}_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

[Ricorda che $f_{xy} = f_{yx}$ per il Teo. di Schwarz]
]

Esercizi:

3.1. Trovare max/min relativi per $f(x,y) = 2x^3 + y^2 - 2xy + 5$

Dominio di f: $\mathbb{R}^2$.

Calcoliamo le derivate parziali prime:

$f_x = 6x^2 + 0 - 2y + 0 = 6x^2 - 2y$; $\quad f_y = 0 + 2y - 2x + 0 = 2y - 2x$;

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (6x^2 - 2y,\ 2y - 2x)$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 6x^2 - 2y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 3x^2 - x = 0 \\ y = x \end{cases} ; \begin{cases} x(3x-1) = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$ ossia i punti $A = (0,0)$, $B = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Usiamo le cond. suff. per capire la natura di tali punti: calcoliamo la matrice Hessiana:

$f_{xx} = 12x$; $\quad f_{xy} = -2$; $\quad f_{yy} = +2$;

$$\Rightarrow \text{Hess}_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -2 \\ -2 & +2 \end{pmatrix}$$

Punto $A = (0,0) \rightsquigarrow \text{Hess}_f(A) = \begin{pmatrix} 12 \cdot 0 & -2 \\ -2 & +2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det(\text{Hess}_f(A)) = 0 \cdot 2 - (-2)^2 = 0 - 4 = -4 < 0$$

$\Rightarrow$ A è un punto di sella.

Punto $B = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \rightsquigarrow \text{Hess}_f(B) = \begin{pmatrix} 12 \cdot \frac{1}{3} & -2 \\ -2 & +2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det\left(\text{Hess}_f(B)\right) = 4 \cdot 2 - (-2)^2 = 8 - 4 = 4 > 0 \quad , \quad f_{xx}(B) = 4 > 0$

$\Rightarrow$ B è un punto di min relativo.

3.2. $f(x,y) = (x^3 - x)(y^2 - 1)$

$f_x = (3x^2 - 1)(y^2 - 1)$; $\qquad f_y = (x^3 - x)(2y)$;

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (3x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0 \\ (x^3 - 1) \cdot 2y = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} (3x^2 - 1)(0 - 1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (3x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \end{cases}$; $\qquad (x - 1)\overbrace{(x^2 + 1 + x)}^{\text{non ha soluz.}} = 0$

$\begin{cases} 3x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (3 - 1)(y^2 - 1) = 0 \\ x = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{3} \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases} \longrightarrow$ $A = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right)$, $B = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right)$, $C = (1, 1)$, $D = (1, -1)$ sono i punti stazionari.

Matrice Hessiana:

$f_{xx} = (6x)(y^2 - 1)$; $\quad f_{xy} = (3x^2 - 1) \cdot 2y$; $\quad f_{yy} = (x^3 - x) \cdot 2$;

$$\to \text{Hess}_f(A) = \begin{pmatrix} f_{xx}(A) & f_{xy}(A) \\ f_{xy}(A) & f_{yy}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(6 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}\right)(0 - 1) & \cancel{\left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right)} \cdot 2 \cdot 0 \\ \cancel{\left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right)} \cdot 2 \cdot 0 & \left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(Hess_f(A)\right) = +\frac{8}{3} > 0 \quad , \quad f_{xx}(A) = -2\sqrt{3} < 0$$

$\Rightarrow$ A punto di max relativo.

Esercizio: Punto $B = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right)$.

Punto C: $Hess_f(C) = \begin{pmatrix} f_{xx}(C) & f_{xy}(C) \\ f_{xy}(C) & f_{yy}(C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 1\cancel{(1-1)} & (3-1)\cdot 2\cdot 1 \\ (3-1)\cdot 2\cdot 1 & \cancel{(1-1)}\cdot 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(Hess_f(C)\right) = -16 < 0$$

$\Rightarrow$ C punto di sella.

Esercizio: Punto $D = (1, -1)$

$g(x,y) = xy\, e^{-(x^2+y^2)}$

Dominio: $D = \mathbb{R}^2$.

$$g_x = y e^{-(x^2+y^2)} + xy e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) = e^{-(x^2+y^2)}\left[y - 2x^2 y\right] ;$$

$$g_y = x e^{-(x^2+y^2)} + xy e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) = e^{-(x^2+y^2)}\left[x - 2xy^2\right]$$

$$\nabla g = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \cancel{e^{-(x^2+y^2)}}\left[y - 2x^2 y\right] = 0 \\ \cancel{e^{-(x^2+y^2)}}\left[x - 2xy^2\right] = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} y - 2x^2 y = 0 \\ x - 2xy^2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} y(1-2x^2) = 0 \\ x(1-2y^2) = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(1-0) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - 2x^2 = 0 \\ x(1-2y^2) = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\,(1-2y^2) = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = +\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} ;$$

ossia abbiamo ottenuto 5 punti stazionari:

$$M=(0,0)\ ,\quad N=\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\ ,\quad P=\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}},-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\ ,\quad Q=\left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}},\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right),\quad R=\left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}},-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$$

Matrice Hessiana:

$$g_{xx}=-2x\,e^{-(x^2+y^2)}\left[y-2x^2y\right]+e^{-(x^2+y^2)}\left[0-4xy\right]$$

$$=e^{-(x^2+y^2)}\left[-2x\left(y-2x^2y\right)-4xy\right]=e^{-(x^2+y^2)}\left[-2xy+4x^3y-4xy\right]$$

$$=e^{-(x^2+y^2)}\left[2xy\left(2x^2-3\right)\right];$$

$$g_{xy}=-2y\,e^{-(x^2+y^2)}\left[y-2x^2y\right]+e^{-(x^2+y^2)}\left[1-2x^2\right]$$

$$=e^{-(x^2+y^2)}\left[-2y\left(y-2x^2y\right)+1-2x^2\right]=e^{-(x^2+y^2)}\left[-2y^2+4x^2y^2+1-2x^2\right];$$

$$g_{yy}=e^{-(x^2+y^2)}\left[2xy\left(2y^2-3\right)\right];$$

Punto $M=(0,0)\longrightarrow \text{Hess}_f(M)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

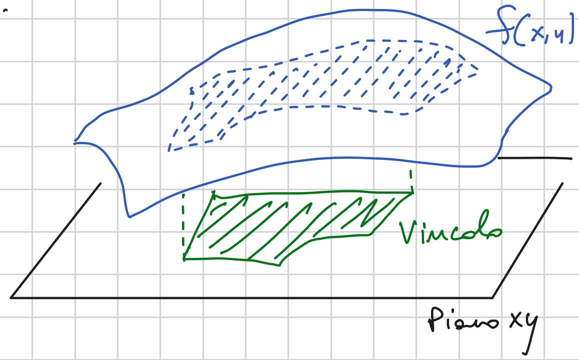
$\Rightarrow \det\left(\text{Hess}_f(M)\right)=0-1=-1<0 \Rightarrow M$ p.to di sella.

Esercizio: Punti N, P, Q, R.

Punti di massimo e minimo vincolati.

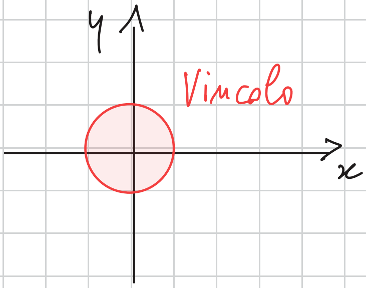
Si trovano tra:

- punti stazionari $(\nabla f=0)$ nei punti interni al vincolo;
- punti in cui grad $f=\nabla f$ non è definito;
- sul bordo del dominio.



Esercizi:

3.4. Calcolare i punti di estremo relativi e assoluti della funzione $f(x,y) = e^{x+y}$ sotto il vincolo $x^2+y^2 \leq 1$.



Vincolo $\rightarrow$ INTERNA : $x^2+y^2<1$

BORDO : $x^2+y^2=1$

$$\nabla f = (f_x, f_y) = \left(e^{x+y}, e^{x+y}\right) \neq 0 \quad \forall (x,y)$$

$\rightarrow$ f non ha max/min relativi.

Però dato che il vincolo è un insieme chiuso (comprende il bordo) e limitato, vale il Teo. di Weierstraß, ossia $\exists$ max/min assoluti.

- non ci sono punti in cui ∇f non è definito.
- resta da controllare il bordo. Abbiamo 2 metodi:
  a. Parametrizzazione;
  b. Moltiplicatori di Lagrange.

Bordo $x^2+y^2=1 \rightarrow \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$

Studiamo f con x, y della parametrizzazione:

$$f(x(t), y(t)) = e^{\cos t + \operatorname{sen} t}$$

FUNZIONE DI 1 VARIABILE
$\rightarrow$ MAX/MIN COME ANALISI 1.

$$f'(t) = e^{\cos t + \operatorname{sen} t} \cdot (-\operatorname{sen} t + \cos t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen} t + \cos t = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} t = \cos t \overset{\cos t \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = 1;$$

$$\operatorname{tg} t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{5}{4}\pi$$

ossia i punti $A = \left(x\left(\frac{\pi}{4}\right), y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e

$$B = \left(x\left(\frac{5\pi}{4}\right), y\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Per capire quale è MAX e quale MIN assoluto, calcoliamo

$$f(A) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = e^{\frac{2\sqrt{2}}{2}} = e^{\sqrt{2}} \quad \leftarrow \text{MAX ASSOLUTO}$$

$$f(B) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = e^{-\frac{2\sqrt{2}}{2}} = e^{-\sqrt{2}} \quad \leftarrow \text{MIN ASSOLUTO}$$

3.5. $f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{3} x + y$, vincolo $= \{ x^2 + y^2 \leq 4 \}$

Esercizio: calcolare ∇f e mostrare che non ci sono punti di estremo relativo o in cui ∇f non è definito.

Bordo: $x^2 + y^2 = 4 \longrightarrow g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange: costruiamo

$$F = f + \lambda g$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3} x + y + \lambda (x^2 + y^2 - 4)$$

I punti di max/min sul bordo sono i punti stazionari di F, ossia tali che $\nabla F = (F_x, F_y, F_\lambda) = 0$

$F_x = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\lambda x$; $\quad F_y = 1 + 2\lambda y$; $\quad F_\lambda = x^2 + y^2 - 4$;

$$\nabla F = 0 \iff \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{6\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} ;$$

$$\frac{3}{36\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 4 = 0 ; \quad \frac{3 + 9 - 144\lambda^2}{\cancel{36\lambda^2}} = 0 ; \quad 144\lambda^2 = 12 ;$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{12} \quad ; \quad \lambda^2 = \pm\sqrt{\frac{1}{12}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{6} \longrightarrow \quad x = -\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{6}}} = -1 \, , \quad y = -\frac{1}{2\,\frac{\sqrt{3}}{6}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{6} \longrightarrow \quad x = +1 \, , \quad y = +\sqrt{3}$$

ossia i punti $C = (-1, -\sqrt{3})$, $D = (1, \sqrt{3})$

Per concludere, valutiamo f nei punti C, D ottenendo:

$$f(C) = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1) + (-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \longrightarrow \text{MIN ASSOLUTO}$$

$$f(D) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1) + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \longrightarrow \text{MAX ASSOLUTO.}$$

3.7. Funzioni Armoniche:

DEF: Una funzione $f(x,y)$ é ARMONICA se $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

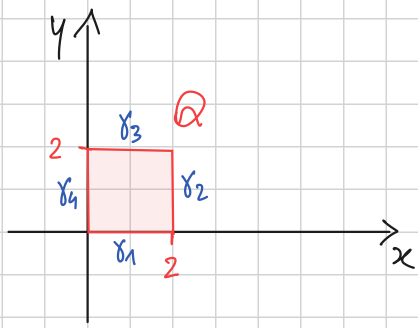
<u>Teorema</u>: se $f(x,y)$ é armonica, allora i max/min assoluti stanno sul bordo del vincolo.

$$f(x,y) = 2x - 3y - 1 \qquad f_x = 2 \quad f_y = -3 \qquad f_{xx} = 0 \quad f_{yy} = 0$$

$$\Rightarrow f_{xx} + f_{yy} = 0 + 0 = 0 \, , \quad f \text{ é armonica.}$$

Calcoliamo max/min assoluto nel quadrato $Q = [0,2] \times [0,2]$

VINCOLO



Per il teo. precedente, mi basta fare lo studio del bordo del vincolo:

$$\partial Q = BQ = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

Parametrizzazioni:

γ_1 sta sulla retta $y=0$ e va da $(0,0) \to (2,0)$.

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \quad t \in [0,2]$$

$$f_{\gamma_1} = 2t - 3 \cdot 0 - 1 = 2t - 3$$

$f'_{\gamma_1} = 2 \neq 0 \longrightarrow$ non ci sono punti stazionari.

γ_2 sta sulla retta $x=2$ e va da $(2,0) \to (2,2)$

$$\gamma_2 = \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [0,2]$$

$$f_{\gamma_2} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot t - 1 = 3 - 3t$$

$f'_{\gamma_2} = -3 \neq 0 \longrightarrow$ non ci sono punti stazionari.

(Se ripetete il procedimento anche per γ_3, γ_4 ottenete che non ci sono punti stazionari).

Se il bordo del vincolo è una curva regolare a tratti, tra i candidati punti di estremo vanno considerati anche quelli dove cambia la curva (in questo esempio gli spigoli del quadrato).

Come regola generale: considerate sempre gli estremi della parametrizzazione!

$\leadsto$ $A=(0,0)$, $B=(2,0)$, $C=(2,2)$, $D=(0,2)$

$f(A) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 1 = -1$

$f(B) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 1 = 3 \quad \leftarrow$ MAX ASSOLUTO

$f(C) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 1 = -3$

$f(D) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 - 1 = -7 \quad \leftarrow$ MIN ASSOLUTO.