Analisi Matematica 2

Ottimizzazione in due variabili

Ottimizzazione.

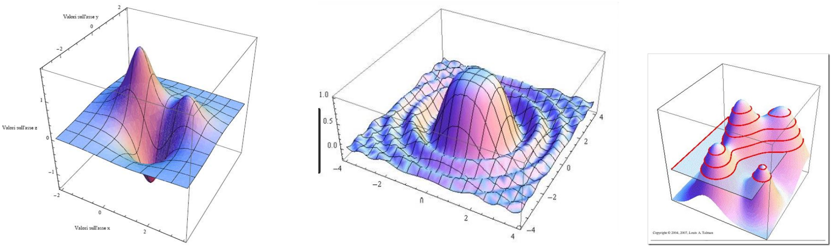


Figure: Massimi e minimi relativi (o locali), Massimi e minimi assoluti (o globali)

Ottimizzazione.

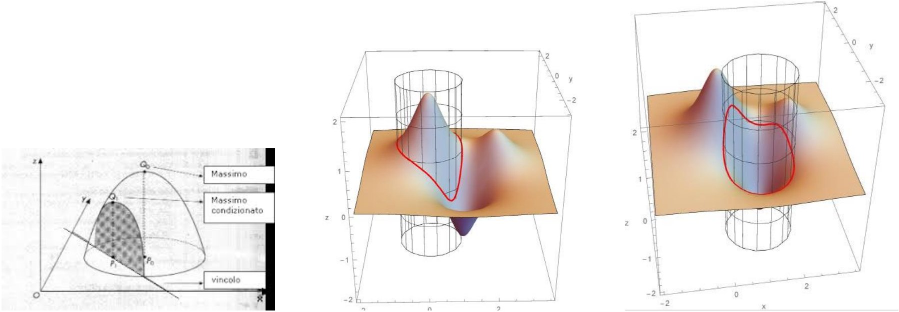


Figure: Massimi e minimi vincolati

Definizione di massimo assoluto (o globale)

Sia f definita in $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Il punto $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ si definisce punto di massimo assoluto per la $f(x, y)$ se

$$f(P) \leq f(P_0), \quad \forall P \in D,$$

$f(P_0)$ e' il valore del massimo.

Definizione di minimo assoluto (o globale)

Sia f definita in $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Il punto $P_1 \in D$ si definisce punto di minimo assoluto per la $f(x, y)$ se

$$f(P) \geq f(P_1), \quad \forall P \in D$$

$f(P_1)$ e' il valore del minimo.

Definizione di massimo e minimo relativo (o locale)

Sia f definita in $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Il punto $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ si definisce
- punto di massimo relativo per la $f(x, y)$ se $\exists B_\delta(P_0)$ tale che

$$f(P) \leq f(P_0), \quad \forall P \in B_\delta(P_0),$$

- punto di minimo relativo per la $f(x, y)$ se $\exists B_\delta(P_0)$ tale che

$$f(P) \geq f(P_0), \quad \forall P \in B_\delta(P_0),$$

Teorema di Fermat. Condizione necessaria (del primo ordine)

Se f é definita in un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ed é derivabile in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ di massimo o minimo relativo per f interno a D allora

$$\nabla f(P_0) = 0.$$

La condizione é solo necessaria: esistono dei punti $\bar{P}$, detti critici, tali che $\nabla f(\bar{P}) = 0$ e possono essere sia massimi, che minimi relativi, che punti di sella, punti cioé nell'interno dei quali la f puó assumere valori maggiori e/o minori di $f(\bar{P})$.

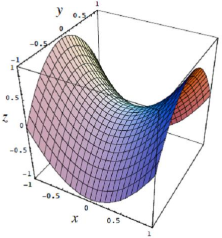


Figure: $z = y^2 - x^2$ con $\bar{P} = (0,0)$ punto di sella

Dimostrazione del Teorema di Fermat

Sia P_0 un punto di massimo relativo per f, interno a D. Allora $\exists B_\delta(P_0) \subset D$:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \quad \forall\ (x, y) \in B_\delta(P_0).$$

In particolare, fissato $y = y_0$ la funzione $F(x) = f(x, y_0)$, con $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, soddisfa la diseguaglianza:

$$F(x_0) \geq F(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

e quindi x_0 é un punto di massimo relativo per la funzione di una variabile $F(x)$, per la quale vale il Teorema di Fermat: $F'(x_0) = 0$,

$$\Rightarrow \quad F'(x_0) = f_x(x_0, y_0) = 0.$$

Analogamente si dimostra che $f_y(x_0, y_0) = 0$ e quindi $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

Un modo per classificare un punto critico (x_0, y_0) è quello di utilizzare la formula di Taylor per analizzare il segno di $f(x, y) - f(x_0, y_0)$.

Per funzioni di una variabile abbiamo visto che la formula di Taylor fermandosi al secondo ordine è (ponendo $x = x_0 + h$)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2) \quad per \quad h \to 0$$

Se x_0 è un punto critico allora $f'(x_0) = 0$ e quindi si ha

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2) \quad per \ h \to 0.$$

Se $f''(x_0) \neq 0$ allora il segno di $f(x_0 + h) - f(x_0)$ è "definitivamente[1]" quello di $f''(x_0)$. Se anche $f''(x_0) = 0$ allora dobbiamo proseguire con l'analisi delle derivate successive.

Per le funzioni di più variabili si procede in modo analogo.

(1) Ricorda: Definitivamente significa che la proprietà è vera in un intorno del punto (quindi vicino al punto)

Consideriamo ora la funzione $f(x, y)$ e scriviamo la formula di Taylor in (x_0, y_0) al secondo ordine con resto di Peano:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k \\ + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2\right] + o(h^2+k^2)$$

o anche in forma abbreviata:
$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0) + o(h^2+k^2)$
Se (x_0, y_0) è un punto critico allora $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ e si ottiene

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0) + o(h^2+k^2)$$

Quindi il segno di $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ dipende "definitivamente" dal segno di $d^2f(x_0, y_0)$ cioè dal segno della forma quadratica

$$q(h, k) = f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2$$

Alla forma quadratica $f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2$ viene associata la matrice (Hessiana)

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

il cui determinate è il determinante Hessiano o Hessiano:

$$H_f(x, y) = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

per studiare il segno della forma quadratica vedremo che è importante il segno dell'Hessiano.

Studio del segno di $d^2 f$

Scriviamo la forma quadratica in questo modo:

$$q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2,$$

dove $a = f_{xx}(x_0, y_0),\ b = f_{xy},\ c = f_{yy}(x_0, y_0)$
Vogliamo studiare il segno di $q(h,k)$. Si ha: (per $a \neq 0$)

$$\begin{aligned} q(h,k) &= ah^2 + 2bhk + ck^2 \pm \frac{b^2}{a}k^2 = a\big(h^2 + 2\frac{b}{a}hk + \frac{b^2}{a^2}k^2\big) + \frac{ac-b^2}{a}k^2 \\ &= a\big(h + \frac{b}{a}k\big)^2 + \frac{ac-b^2}{a}k^2 \end{aligned}$$

Quindi il segno di $q(h,k)$ dipende da a e da $\frac{ac-b^2}{a}$.
Per $c \neq 0$ si può procedere in modo analogo considerando c anzichè a e aggiungendo i termini $\pm\frac{b^2}{c}h^2$.

La matrice associata alla forma quadratica $q(h,k)$ è

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

il cui determinante è proprio $det(A) = ac - b^2$ dove a è l'entrata della matrice di posto $1,1$ (prima riga e prima colonna).

Quindi il segno di $q(h,k)$ dipende dal segno del determinante della matrice A e dal segno della sua entrata a. In particolare si ha:

Teorema

La forma quadratica $q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ è

- definita positiva (o negativa) se e solo se $det(A) > 0$ e $a > 0$ ($a < 0$).
- indefinita se e solo se $det(A) < 0$ (non so il segno)
- semidefinita positiva (o negativa) se e solo se $det(A) = 0$ e $a > 0$ ($a < 0$), oppure se $det(A) = 0$ e $c > 0$ ($c < 0$).

Utilizzando la teoria delle forme quadratiche possiamo quindi dire che se $f \in C^2$ e (x_0, y_0) è un punto critico per f cioè $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, se la matrice Hessiana di f è

- definita positiva (negativa) allora (x_0, y_0) è un punto di minimo (massimo) locale, (infatti se la forma quadratica ha segno > 0 allora la differenza $f(P) - f(P_0) > 0$ cioè P_0 è un punto di minimo)
- indefinita allora (x_0, y_0) è un punto di sella o colle (in questo caso la forma quadratica non ha sempre segno positivo o negativo ma varia e questo significa che il punto P_0 per certe curve è il minimo e per altre è un massimo perciò non è nè minimo nè massimo ma è un punto di sella).

Altro modo più semplice per dimostrare che il segno della forma quadratica dipende dall'Hessiano $H_f(x_0, y_0)$ e dal segno di $f_{xx}(x_0, y_0)$ o da $f_{yy}(x_0, y_0)$: si riscrive la forma quadratica $q(h, k)$ in modo da avere un polinomio di secondo grado in una sola incognita per esempio volendo studiare il segno di $ah^2 + 2bhk + ck^2$:

$ah^2 + 2bhk + ck^2 > 0$, si divide per $k^2 \neq 0$ e si pone $\frac{h}{k} = t$, si ha così

$$q(t) = at^2 + 2bt + c > 0$$

a seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - ac$ (Δ è l'opposto del determinante Hessiano) si ha

- se $b^2 - ac < 0$, e $a > 0$ allora $q(t) > 0$ per ogni t,
- se $b^2 - ac < 0$, e $a < 0$ allora $q(t) < 0$ per ogni t,
- se $b^2 - ac > 0$ allora $q(t)$ cambia segno (non ha segno costante),

(se anzichè dividere per $k^2 \neq 0$ si divide per $h^2 \neq 0$ si arriva allo stesso risultato ma con c al posto di a)

Si hanno quindi le seguenti condizioni sufficienti per l'esistenza dei massimi e minimi relativi.

Condizioni sufficienti per l'esistenza dei massimi e minimi relativi

Condizioni sufficienti per un massimo o minimo relativo

Sia $f(x,y) \in C^2(D)$, $D \in \mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) interno a D. Se

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = 0, \quad f_y(x_0,y_0) = 0, \\ f_{xx}(x_0,y_0) > 0, \quad f_{yy}(x_0,y_0) > 0, \\ H_f(x_0,y_0) > 0, \end{cases}$$

allora (x_0, y_0) é un punto di minimo relativo per f su D.

Se invece

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = 0, \quad f_y(x_0,y_0) = 0, \\ f_{xx}(x_0,y_0) < 0, \quad f_{yy}(x_0,y_0) < 0, \\ H_f(x_0,y_0) > 0, \end{cases}$$

allora (x_0, y_0) é un punto di massimo relativo per f su D.

Se infine

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0, \\ H_f(x_0, y_0) < 0, \end{cases}$$

allora (x_0, y_0) é un punto di sella per f su D, cioé non é né di massimo né di minimo per f.

Inoltre se

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0, \\ H_f(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

abbiamo il "caso dubbio": si deve studiare la funzione in un intorno del punto P_0 utilizzando altre vie.

NOTA: nelle ipotesi sul massimo e minimo relativo, i segni di f_{xx} e f_{yy} sono concordi e basterebbe verificarne solo uno. Infatti se $H_f(x_0, y_0) > 0$ allora $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) > f_{xy}^2(x_0, y_0) \geq 0$.

Dimostrazione

Ricordando la formula di Taylor si ha

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) + o(h^2+k^2)$$

il segno del primo membro è definitivamente dato dal segno di $d^2 f(x_0, y_0)$. Allora ricordando quanto detto sul segno della forma quadratica si ha:

i) se $d^2 f(x_0, y_0)$ è definita positiva (cioè $H_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx} > 0$, $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$) allora $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) > 0$ e quindi (x_0, y_0) è un punto di minimo per f,

se $d^2 f(x_0, y_0)$ è definita negativa (cioè $H_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx} < 0$, $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$) allora $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) < 0$ e (x_0, y_0) è un punto di massimo per f,

ii) se $d^2 f(x_0, y_0)$ è indefinita (cioè $H_f(x_0, y_0) < 0$) allora il segno di $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ cambia e (x_0, y_0) è un punto di sella per f.

Esercizio.
Calcolare i massimi e minimi relativi della
$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.
Calcoliamo ∇f ed eguagliamolo a zero.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3 = 0 \\ f_y = 3y^2 - 12 = 0, \end{cases}$$

I punti critici per f sono:
$P_1 = (1, 2),\ P_2 = (-1, -2),\ P_3 = (-1, 2),\ P_4 = (1, -2).$
Calcoliamo il $det(H_f)(P_i)$

$$det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} = 36xy$$

$det(H_f)(1,2) > 0, \quad det(H_f)(-1,-2) > 0,$

$det(H_f)(-1,2) < 0, \quad det(H_f)(1,-2) < 0.$

Calcoliamo il segno di f_{xx} nei punti dove $det(H_f) > 0$.

$f_{xx}(1,2) > 0, \quad f_{xx}(-1,-2) < 0.$

Allora in $P_1 = (1,2)$ ci sara' un minimo relativo, in $P_2 = (-1,-2)$ ci sara' un massimo relativo.

Infine, poiché in P_3 e P_4 , risulta $det(H_f) < 0$, questi sono punti di sella.

Massimi e minimi assoluti.

Ricerca dei massimi e minimi assoluti:

$$\begin{cases} 1) Relativi\ \nabla f = 0 \\ 2) \nexists\ \nabla f, \\ 3) Frontiera\ del\ dominio\ D:\ (FD) \end{cases}$$

Paragonando i valori della funzione in tutti questi punti, il piú grande sará il massimo assoluto, il piú piccolo il minimo assoluto.

Esercizio

Calcolare il massimo e il minimo assoluti di
$f(x,y) = x - x^2 - y^2$ in $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

Svolgimento

1) Cerchiamo i massimi e minimi relativi:

$\nabla f = (1 - 2x, -2y) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad P_0 = (\frac{1}{2}, 0)$,
e $f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4}$

2) Non ci sono punti in cui non esiste il gradiente.

3) Studiamo la funzione lungo la frontiera del dominio $D : x^2 + y^2 \leq 1$, che é la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ si ha

$f(x, y(x)) = g(x) = x - 1, \;\; -1 \leq x \leq 1$, $g' = 1$ non ci sono punti critici, peró essendo $g' > 0$, g cresce al crescere di x quindi assumerá il massimo in $x = 1$ e il minimo in $x = -1$ con $g(1) = 0, \; g(-1) = -2$.

Riassumendo:

$f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4}$,
$f(1,0) = 0$,
$f(-1,0) = -2$.
Quindi il minimo assoluto é -2 e si ottiene in $(-1,0)$, il massimo assoluto é $\frac{1}{4}$ e si ottiene in $(\frac{1}{2}, 0)$.

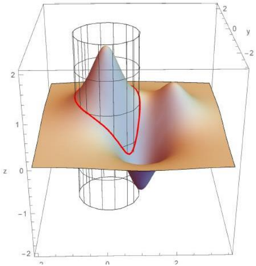
Massimi e minimi condizionati per funzioni di 2 variabili

Sia $f(x, y) \in C^1(D)$ si vogliano determinare gli estremi di f sotto la condizione espressa da $g(x, y) = 0$, con $g(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (funzione vincolo).

Il primo metodo che consideriamo é legato alla possibilitá di esplicitare il vincolo.

- Se $g(x, y) = 0$ definisce una funzione $y = y(x),\ x \in I$ (e si puó esplicitare), il problema é ricondotto allo studio di una funzione di una variabile.
$$F(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I.$$
- Se $y = y(x)$ ammette una rappresentazione parametrica
$$x = x(t), y = y(t), t \in [a, b],$$
ancora il problema si trasforma nella ricerca di un massimo e minimo di funzione di una variabile
$$F(t) = f(x(t), y(t)),\ t \in [a, b].$$

Geometricamente, se chiamiamo con γ la curva piana data in forma cartesiana dall'equazione $y = y(x)$, o in forma parametrica dalle equazioni $\{x = x(t), y = y(t),\ t \in [a, b]\}$, trovare il massimo e il minimo sotto la condizione $g(x, y) = 0$ significa calcolare il massimo e il minimo della curva intersezione della superficie di equazione $z = f(x, y)$ con la superficie cilindrica generata da γ.



esercizio:

Calcolare i massimi e minimi della funzione $z = x^2 + 9y$, sotto la condizione $x^2 + y^2 = 4$.

Riscriviamo la circonferenza in forma parametrica

$$\begin{cases} x = 2\ cos\ t, \\ y = 2\ sen\ t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Studiamo la funzione f sotto il vincolo, qui curva in forma parametrica.

$F(t) = 2(2cos^2 t + 9sent)$, $F'(t) = 2cos\ t\ (9 - 4sent) = 0$ per $t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{3\pi}{2}$.

$F(\frac{\pi}{2}) = 18$, $F(\frac{3\pi}{2}) = -18$

$F(0) = F(2\pi) = 4$.

Concludiamo che il massimo viene assunto nel punto $(0, 2)$ e vale $z = 18$, il minimo viene assunto nel punto $(0, -2)$ e vale $z = -18$.

Esercizio

Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x, y) = xy$ con il vincolo $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$

Vincolo non esplicitabile: Teorema del Dini: esistenza e unicitá dela funzione implicita

Teorema del DINI per funzioni di una variabile

Sia $g(x, y)$ una funzione di classe C^1 in un aperto $D \subset \mathbb{R}^2$.

Se in $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ risulta $g(x_0, y_0) = 0, \quad e \quad g_y(x_0, y_0) \neq 0$,

allora esiste un intorno $I_\delta(x_0)$ e un intorno $J_\sigma(y_0)$ tali che ad ogni $x \in I_\delta(x_0)$ corrisponde un solo $y \in J_\sigma(y_0)$, cioé esiste un'unica funzione $h(x) : I_\delta(x_0) \to J_\sigma(y_0)$ (funzione implicita) tale che $g(x, h(x)) = 0$, e $h(x_0) = y_0$. Inoltre h é derivabile in $I_\delta(x_0)$ e si ha

$$h'(x_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}, \quad \forall\, x \in I_\delta(x_0).$$

Se $g(x, y)$ é di classe $C^k(D)$, $k \in \mathbb{N}$, allora anche la funzione implicita $h(x)$ é di classe $C^k(I_\delta(x_0))$.

Osservazione

Se nel Teorema del Dini sostituiamo l'ipotesi $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ con $g_x(x_0, y_0) \neq 0$ allora l'equazione $g(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $x = h(y)$ nell'intorno di y_0.

In ogni caso il grafico della funzione ha retta tangente di equazione:

$$g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Se risulta

$$g(x_0, y_0) = g_x(x_0, y_0) = g_y(x_0, y_0) = 0$$

il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ si dice punto singolare della curva di equazione $g(x, y) = 0$ (perché non é possibile applicare il Teorema del Dini).

Se una delle due derivate parziali prime nel punto P_0 non é zero, allora P_0 si dice punto regolare.

Esercizio: Data la funzione $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ dire se in un intorno di $P_0 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ l'equazione $x^2 + y^2 = 1$ definisce una funzione implicita $y = h(x)$

Svolgimento

g é continua con derivate continue in tutto $\mathbb{R}^2$. $g(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$, $g_y(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3} \neq 0$.

Per il teorema del Dini esiste un intorno rettangolare del punto $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ nel quale esiste il grafico di un'unica funzione (implicita) $y = h(x)$ definita in $I_\delta(\frac{1}{2})$.

Inoltre $h'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Infatti derivando rispetto ad x ambo i membri di $x^2 + y^2(x) - 1 = 0$ si ha $2x + 2yy' = 0$ quindi $y' = h' = -\frac{x}{y}$

(Il teorema del Dini assicura l'esistenza della funzione implicita $y = h(x)$ ma non fornisce un metodo di calcolo. In questo caso, la funzione implicita, definita in $I_\delta(\frac{1}{2})$, é possibile calcolarla. Attraverso semplici passaggi si arriva a scrivere $y = \sqrt{1 - x^2}$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange per il calcolo dei massimi e minimi vincolati.

Teorema dei moltilicatori di Lagrange in due dimensioni

Siano $f, g \in C^1(D)$ e $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ un punto regolare. Se P_0 é un punto di massimo (o di minimo) relativo vincolato per f (con vincolo espresso dalla relazione $g(x, y) = 0$), allora esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) - \lambda g_x(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) - \lambda g_y(x_0, y_0) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

λ é detto moltiplicatore di Lagrange.

Esercizio.

Determinare gli estremi della funzione $f(x, y) = xy$ soggetti al vincolo $g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$

Esercizio.

Determinare gli estremi della funzione $f(x,y) = xy$ soggetti al vincolo $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$

Svolgimento

Le funzioni f e g sono $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. I punti critici vincolati sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = y - \lambda(2x - y) = 0, \\ f_y - \lambda g_y = x - \lambda(-x + 2y) = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $x = y\dfrac{1+\lambda}{2\lambda}$, sostituendo nella seconda si ha

$y(1 + 2\lambda - 3\lambda^2) = 0$, se $y = 0$, allora dalla prima equazione anche $x = 0$, ma $(0,0)$ non soddisfa la terza equazione (il vincolo).

allora $3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ da cui si ottiene $\lambda = 1$ e $\lambda = -\frac{1}{3}$.

Sostituendo $\lambda = 1$ nelle equazioni, si ottiene $x = \pm 1$ con $y = x$ cioé si trovano le soluzioni $(x, y, \lambda) = (1, 1, 1), (-1, -1, 1)$.

Se $\lambda = -\frac{1}{3}$ allora si ottiene $y = -x$

che sostituito nell'equazione del vincolo:

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ e quindi le altre due soluzion del sistema sono:

$(x, y, \lambda) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3})$.

Quindi ci sono quattro punti critici vincolati:

$$P_0 = (1, 1),\ P_1 = (-1, -1),\ P_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}),\ P_3 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Riassumendo: se non é possibile esplicitare la $y(x)$ dal vincolo $g(x,y)=0$ globalmente, ma solo nell'intorno di un punto regolare $P_0=(x_0,y_0)$ (punto regolare per l'insieme dei punti $g(x,y)=0$) allora essendo $g_y(x_0,y_0)\neq 0$, per il Teorema del DINI, $g(x,y)=0$ definisce una funzione implicita $y=h(x)$ con $h(x_0)=y_0$

Supponiamo che x_0 sia un estremo relativo di $f(x,h(x)) \Longrightarrow$

$$f_x + f_y \ y' \ = 0.$$

Ma

$$y' = h'(x) = -\frac{g_x}{g_y} \implies f_x + f_y \ (-\frac{g_x}{g_y}) \ = 0$$

Si pone

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} = \lambda.$$

Riscriviamo le relazioni :

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0, \\ f_y - \lambda g_y = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

λ si chiama moltiplicatore di Lagrange. Interpretiamo questi risultati affermando che i punti di massimo e minimo di $f(x, y)$ vincolati da $g(x, y) = 0$, sono i massimi e minimi (liberi) relativi della funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\, g(x, y)$$

e annullano il $\nabla \mathcal{L} = 0$.

Il metodo si puo' generalizzare a funzioni di tre variabili $f(x, y, z)$ con due vincoli $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$.

Si cercheranno i massimi e minimi liberi della

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \; g_1(x, y, z) + \mu \; g_2(x, y, z)$$

Esercizio.
Trovare i massimi e minimi della curva intersezione del piano $x + y + 2z = 0$ con l'iperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Svolgimento

La funzione della quale individuare gli estremi e'

$$z = -\frac{(x+y)}{2}$$

sotto il vincolo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z = -\frac{(x+y)}{2} \end{cases} \implies x^2 + y^2 - \frac{(x+y)^2}{4} = 1.$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = -\frac{(x+y)}{2} + \lambda\Big(x^2 + y^2 - \frac{(x+y)^2}{4} - 1\Big)$$

Si trova $M = (-1, -1, 1)$ *e* $m = (1, 1, -1)$ sono il massimo e il minimo vincolato.

Principio del massimo per le funzioni armoniche

Definizione

Sia D un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(D)$. Se la funzione f soddisfa l'equazione differenziale lineare alle derivate parziali del secondo ordine:

$$f_{xx} + f_{yy} = 0 \quad (\Delta f = 0) \quad \textit{equazione di Laplace},$$

é detta funzione armonica.

Esempio: le seguenti funzioni sono armoniche nel loro campo di definizione

$f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

$f(x, y) = e^x \cos y$

$f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$

Principio del massimo per funzioni armoniche

Principio del massimo per funzioni armoniche

Sia D un insieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^2$, sia $f(x,y) \in C^0(\bar{D}) \cup C^2(D)$ una funzione armonica in D. Se m, M sono rispettivamente il minimo e il massimo di f sulla frontiera ∂D, allora

$$m \leq f(x,y) \leq M, \quad \forall (x,y) \in D$$

Conseguenza del principio del massimo é che la funzione armonica f non puó avere un punto di massimo o minimo stretto interno, cioé essa assume massimo e minimo sulla frontiera del dominio D.

Esercizio

Data la funzione $f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ in
$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\}$
a) dimostrare che é armonica,
b) trovare i massimi e i minimi in D