Calcolo differenziale per funzioni di una variabile

Derivata di una funzione

Def. Sia f: (a,b)→R, si dice che f è derivabile nel punto $x_0 \in (a,b)$ *se* ∃ *finito il limite del rapporto incrementale*:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

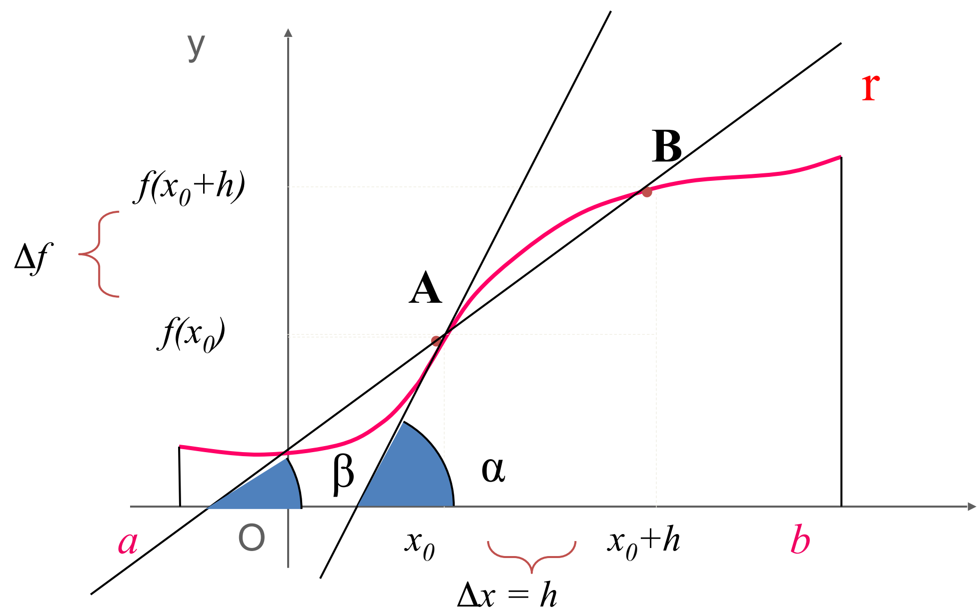
$$f'(x_0),\ y'(x_0), \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0},\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}, Df(x_0),\quad Dy(x_0)$$

Derivata di una funzione

Significato geometrico della derivata in un punto e equazione della retta tangente

Sia $x_0 \in (a, b)$: $x_0 + h \in (a, b)$

rapporto incrementale
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = tg\beta$$
coeff. angolare di r



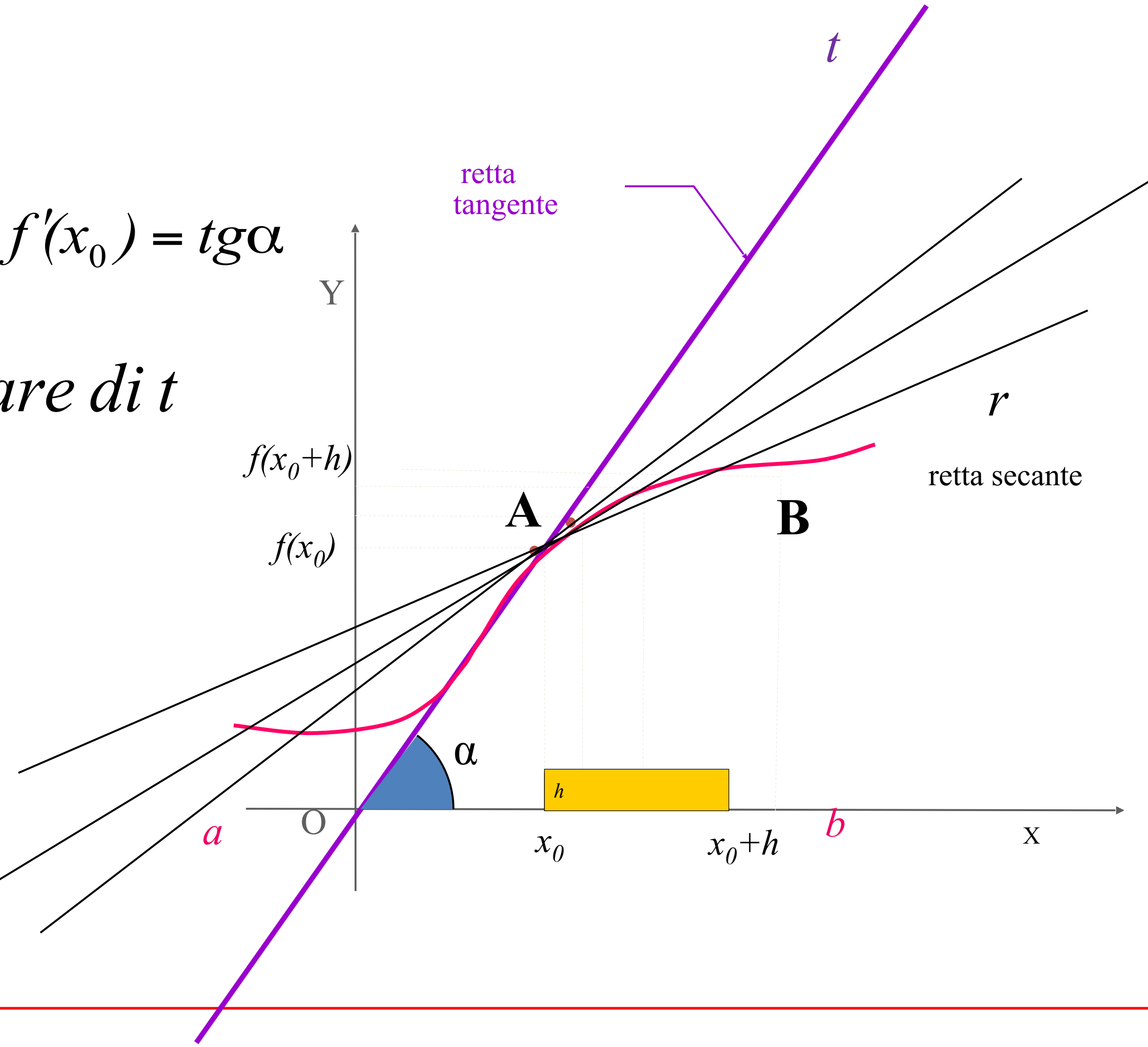
Derivata di una funzione

Significato geometrico della derivata in un punto e equazione della retta tangente

Quando $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = tg\alpha$$

$$tg\alpha = coeff.\, angolare\ di\ t$$



$$A = (x_0, f(x_0))$$

$$B = (x_0 + h, f(x_0 + h))$$

Derivata di una funzione

Significato geometrico della derivata in un punto e equazione della retta tangente

Equazione della retta tangente al grafico di f(x) nel punto di ascissa x_0:

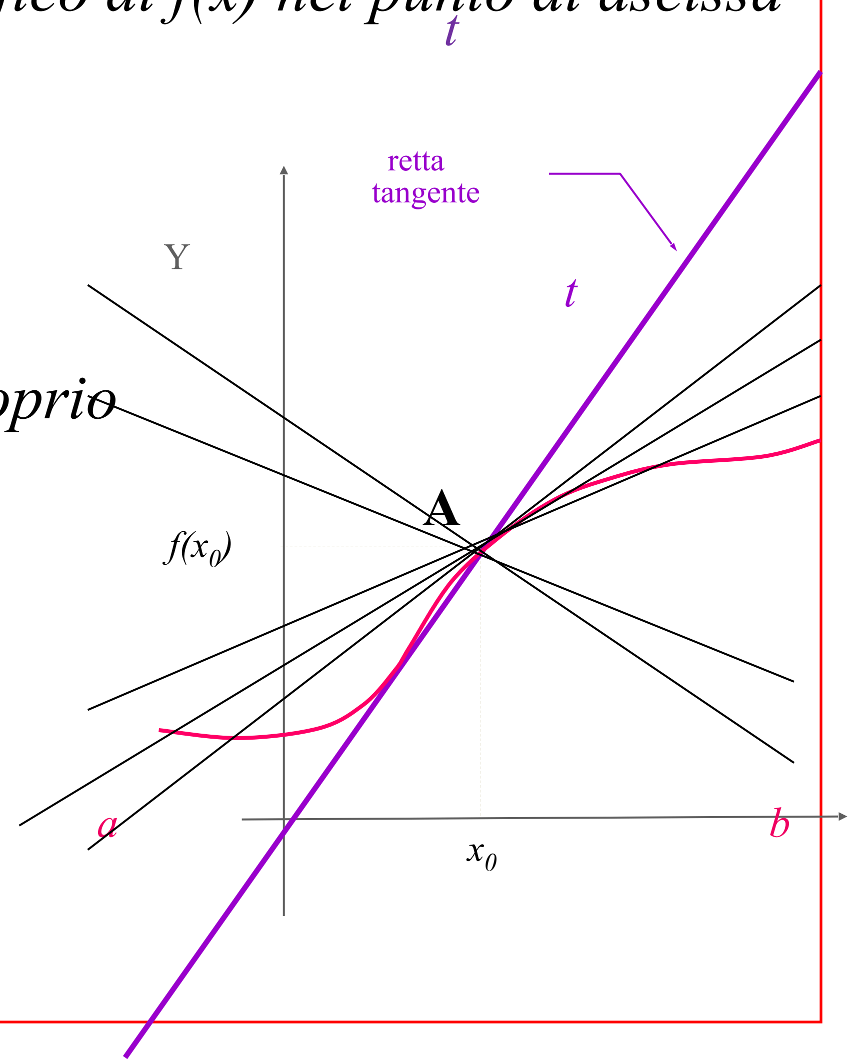
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Infatti tra tutte le rette del fascio proprio passanti per $A(x_0, f(x_0))$ di eq.

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

per $m = f'(x_0)$

si ottiene l'equazione di t



Derivata di una funzione

Se $f'(x)$ *è definita* $\forall x \in (a,b)$ *allora f(x) è derivabile in* (a,b) *e risulta definita la funzione* $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ *detta derivata prima di f(x)*

f(x) è derivabile in $[a,b]$*, se è derivabile* $\forall x \in (a,b)$ *e ammette derivata destra in* $x = a$ $(si\ scrive\ f'_+(a))$ *e derivata sinistra in* $x = b$ $(si\ scrive\ f'_-(b))$

Derivata di una funzione

Definizione

Derivata destra

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_+(x_0)$$

Derivata sinistra

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_-(x_0)$$

Se $f'_+(x)=f'_-(x)$ *f è derivabile in x*

Derivata di una funzione

Continuità e derivabilità

<u>*Teorema*</u>.

Sia f: (a,b)→R. Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ *allora f è continua in* x_0.

Dimostrazione

$$Sia\ h \neq 0\ tale\ che\ x_0 + h \in (a, b)$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = \lim_{h\to 0} \overbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}^{\to f'(x_0)} h = 0$$

Da cui si ottiene $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Cioè f(x) è continua in x_0

Derivata di una funzione

Continuità e derivabilità

Quindi

derivabilità $\Longrightarrow$ *continuità*

<u>Non è vero il viceversa</u>

Esempio: y=|x| è continua ma non è derivabile in x=0.

Infatti $\quad y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad$ *e* $\quad y' = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$$f'_{+}(0) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{h}{h} = 1 \neq f'_{-}(0) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{-h}{h} = -1$$

$cioe'\ f'_{+}(0) \neq f'_{-}(0)$

Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

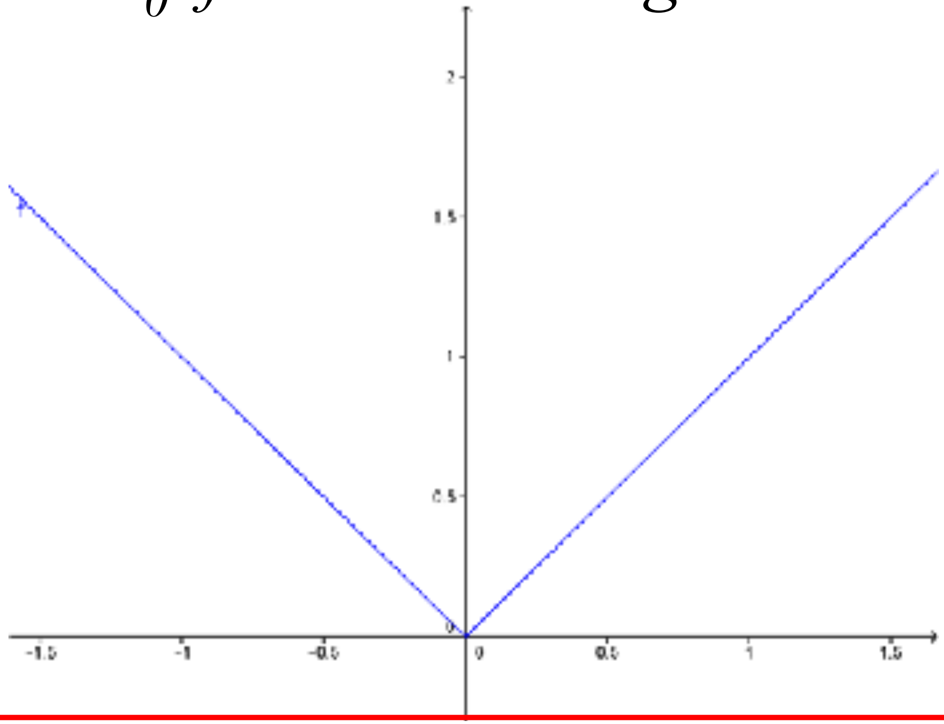
Se $f'_{+}(x_0) \neq f'_{-}(x_0)$ *e almeno una* $\exists$ *finita*

x_0 *si dice* ***punto angoloso****, in quanto le rette tangenti alla f(x) nel punto di ascissa* x_0 *formano un angolo.*

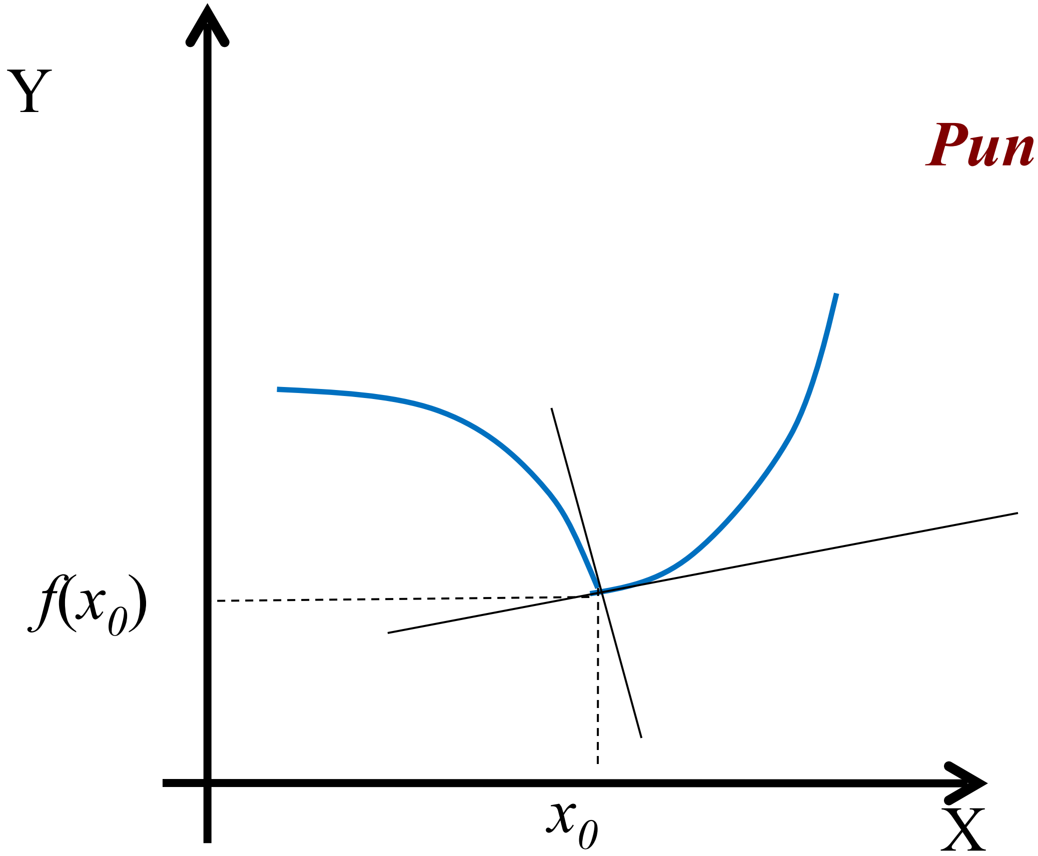
Es.

$f(x) = |x|$

$f'_{+}(0) = 1 \neq f'_{-}(0) = -1$



Derivata di una funzione



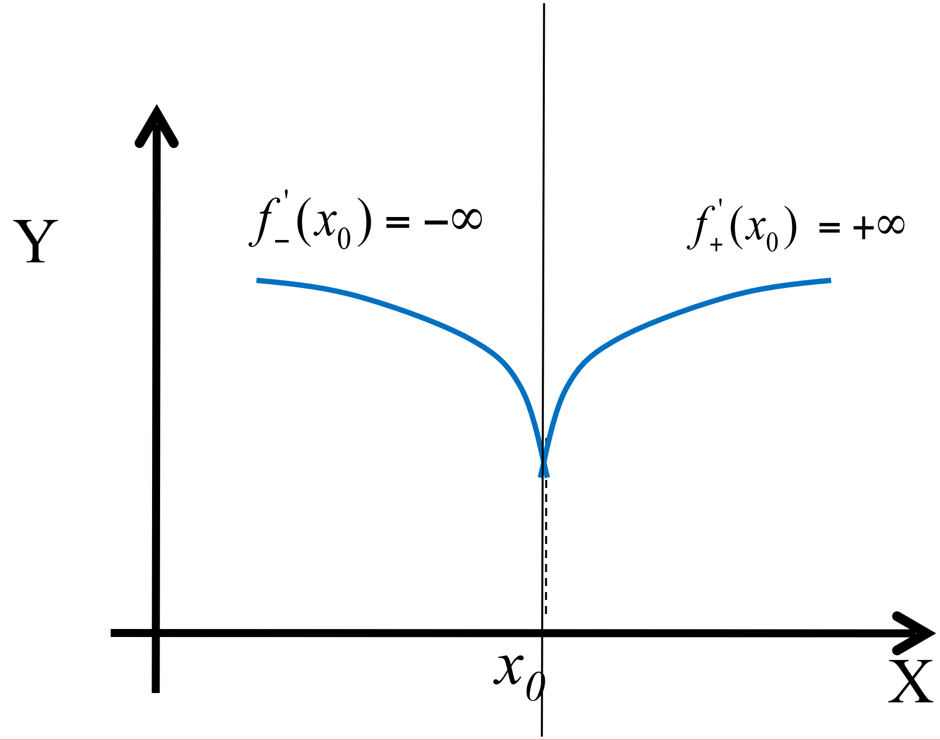
Punto angoloso

Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

Se $\quad f'_{+}(x_0) \neq f'_{-}(x_0) \quad$ *e sono* ∞

x_0 *si dice **punto cuspide**; la retta tangente alla f(x) nel punto di ascissa* x_0 *è verticale.*



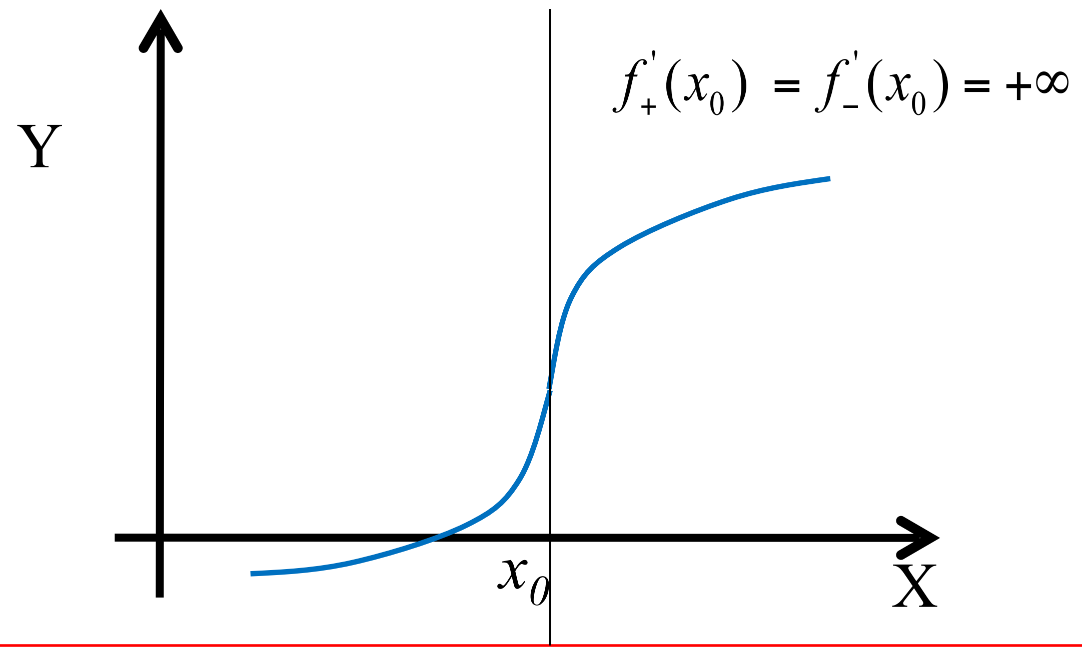
Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

Se $f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0) = \pm\infty$

x_0 *si dice* ***punto di flesso a tangente verticale****; la retta*

tangente alla f(x) nel punto di ascissa x_0 *è verticale.*



Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

Esempio

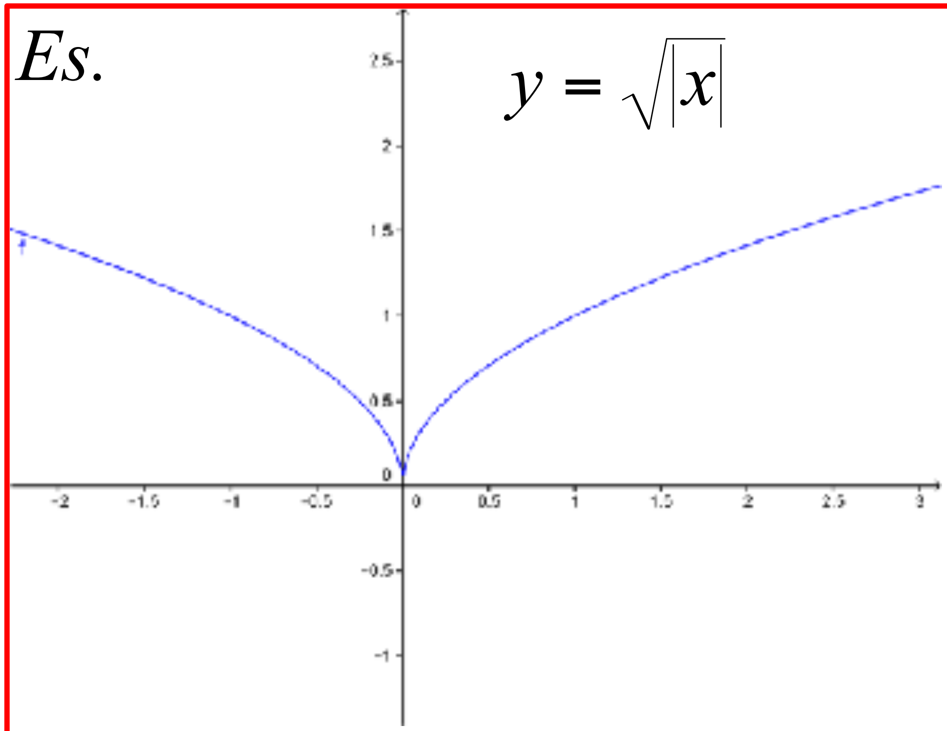
$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$$

Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

Es.



$$y = \sqrt{|x|}$$

$$f'_-(0) = -\infty$$

$$f'_+(0) = +\infty$$

Derivata di una funzione

Derivata delle funzioni elementari

$$D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

$$D(k) = 0$$

$$D(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$D(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$D(a^x) = a^x \ln a$$

$$D(e^x) = e^x$$

$$D(\sin x) = \cos x$$

$$D(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

$$D(\cos x) = -\sin x$$

Derivata di una funzione

Derivata delle inverse delle funzioni trigonometriche

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}$$

Derivata di una funzione

Esercizio

Utilizzando la definizione calcolare la derivata di

1) $f(x)=k.$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = 0$$

2) $f(x)=e^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x$$

Derivata di una funzione

3) $f(x)=lnx.$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \frac{1}{x}$$

Derivata di una funzione

4) f(x)=cosx

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}+$$

$$-\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\sin h}{h}=-\sin x$$

Derivata di una funzione

5) $f(x)=sinx$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{\sin h\cos x}{h}=\cos x$$

Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Se f e g sono derivabili in x, allora sono derivabili in x anche la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente (con il denominatore $\neq$ 0) e si ha:

a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

b) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \quad g \neq 0$

Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Dimostriamo la b) $\quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$(f \cdot g)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \pm f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)\left[f(x+h) - f(x)\right]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x)\left[g(x+h) - g(x)\right]}{h}$$

Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Per ipotesi f e g sono derivabili, quindi continue in x, perciò:

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x),$$

$$(f \cdot g)' = \cdots = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Derivata di una funzione

Esercizio.

1) Calcolare la derivata di $f(x) = \sin x \ln x$

$$f'(x) = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

2)Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di eq

$f(x) = 2e^x \sqrt[3]{x}$ *nel punto di ascissa x=1*

$$f'(x) = 2e^x \sqrt[3]{x} + 2\frac{e^x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione composta

Sia $g(x)$ *una funzione derivabile in* x*, e se* $f(x)$ *è una funzione derivabile nel punto* $g(x)$*, allora la funzione composta* $f(g(x))$ *è derivabile in* x*, e si ha:*

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione composta

Dimostrazione. *Se* $h \neq 0$ *si ha*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

in quanto se $h \to 0$ *allora* $k \to 0$
con $k = g(x+h) - g(x)$,
(*quando* $h \to 0$ *si ha* $k = g(x+h) - g(x) \to 0$ *essendo* $g(x)$
continua in x).

Derivata di una funzione

Esercizio.

1) *Calcolare la derivata di* $f(x) = \ln(\sin x)$.

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x$$

2) *Calcolare la derivata di* $f(x) = e^{\sqrt{2x^3 + x}}$.

$$f'(x) = e^{\sqrt{2x^3 + x}} \, \frac{6x^2 + 1}{2\sqrt{2x^3 + x}}$$

Derivata di una funzione

Esercizio.

3)Calcolare la derivata di $f(x) = \sin(\ln x)$.

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

Derivata di una funzione

Esercizio.

Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $f(x) = (xe^{2x} - 1)^3$ *nel punto di ascissa x=0*

Eq. retta tang. a f(x) in $x = x_0$ *:* $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Per noi x_0=0

$$f'(x) = 3(xe^{2x} - 1)^2(e^{2x} + 2xe^{2x}) \Rightarrow f'(0) = 3$$

$$f(0) = -1$$

Quindi l'equazione è: $y = 3x - 1$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Sia $f(x)$ una funzione continua e strettamente monotona in $[a,b]$. Se f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e se $f'(x_0) \neq 0$, allora anche la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0=f(x_0)$, e la derivata vale:

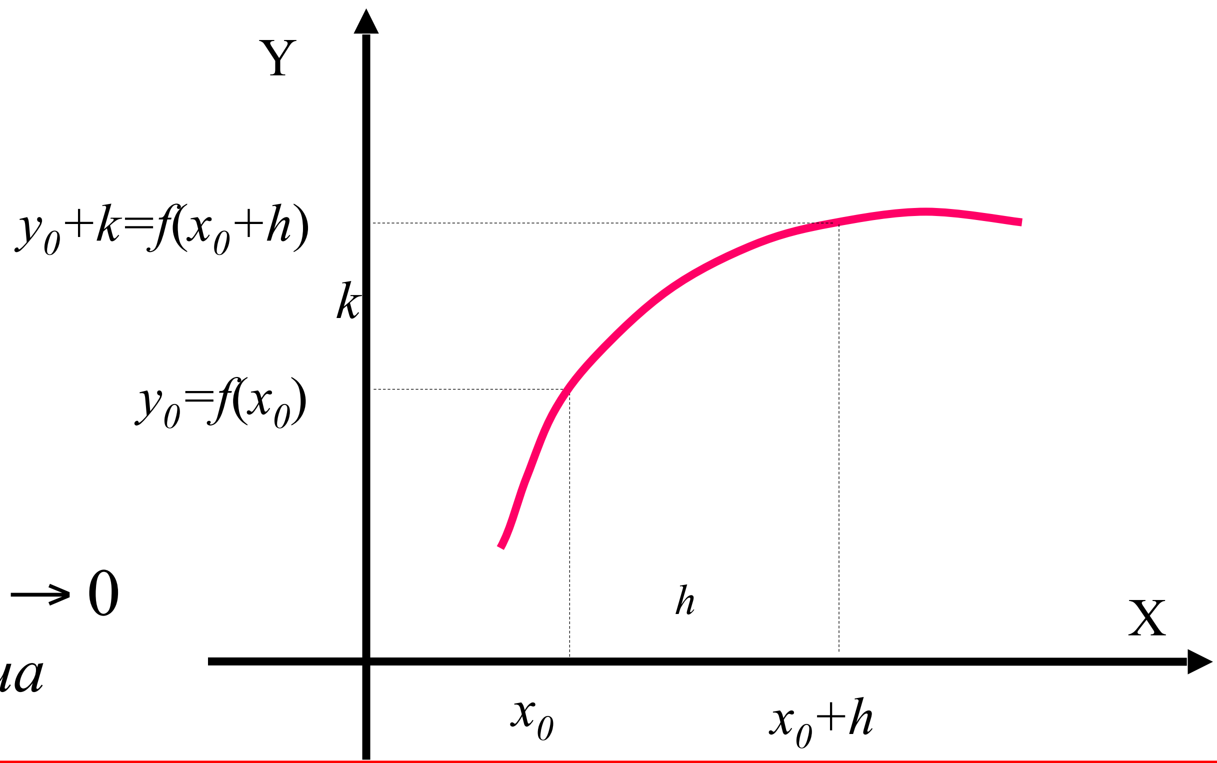
$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0)}{k}=\frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)}\xrightarrow[h\to 0]{}\frac{1}{f'(x_0)}$$



Se $k\to 0$ *anche* $h\to 0$
in quanto f^{-1} *è continua*

Derivata di una funzione

Esercizio. Utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa, calcolare la derivata della funzione inversa di $f(x) = \sin x$

In $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *si ha*

$$y = \sin x \Rightarrow x = \arcsin y$$

$$y' = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$$

Derivata di una funzione

Perciò, per il teorema della derivata della funzione inversa si ha

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Scambiando x con y: $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Derivata di una funzione

Es. Calcolare la derivata della funzione $y = e^x$,

vista come funzione inversa di $f(x) = \ln x$.

Per $x > 0$, *si ha* $x = f^{-1}(y) = e^y$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Perciò, per il teorema della derivata della funzione inversa si ha $\left(f^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{f'(x)} \Rightarrow (e^y)' = x = e^y$

Quindi $(e^x)' = e^x$

Derivata di una funzione

Es. Utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa, dimostrare che $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Sia $f(x) = tgx$, *in* $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *si ha* $x = f^{-1}(y) = arctgy$

$$f(x) = tgx \Rightarrow f'(x) = 1 + tg^2 x$$

Perciò, per il teorema della derivata della funzione inversa si ha

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (arctgy)' = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$