Le filosofie della matematica pre-fregeane

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2025-26

Immanuel Kant (1724-1804)

Kant: la conoscenza matematica (1)

- Nella *Critica della ragion pura* (Introduzione, B14-17, e Estetica trascendentale, B33-73), Kant descrive la matematica come una scienza sintetica a priori fondata sull'intuizione spazio-temporale.

> *I giudizi matematici sono sempre sintetici. Sino ad oggi questo fatto, per quanto incontestabilmente vero e molto importante per le sue conseguenze, sembra essere sfuggito agli analisti della mente umana [...] Poiché si è visto che le conclusioni matematiche procedono secondo il principio di contraddizione (il che è richiesto dalla natura di ogni certezza apodittica), ci si è convinti che anche i principi fondamentali di questa scienza siano riconosciuti e ammessi nello stesso modo [...] Ma la nozione è fallace; un giudizio sintetico può essere accettato mediante il principio di contraddizione, ma solo quando è preceduto e dedotto da un altro giudizio sintetico. (Critica della ragion pura, Introduzione, B14-15.)*

Kant: la conoscenza matematica (2)

I giudizi della matematica sono sempre giudizi a priori, e non empirici, poiché portano con sé il concetto della necessità, che non può essere dato dall'esperienza. In verità, a prima vista, si potrebbe pensare che la proposizione $7 + 5 = 12$ *sia una proposizione semplicemente analitica, derivante dal concetto di una somma di sette e cinque in base al principio di contraddizione. Ma, se si considera più da vicino la cosa, risulta chiaro che il conctto della somma di* 7 *e* 5 *ltro non racchiude che l'unione dei due numeri in uno solo, il che non implica per nulla che si pensi quale sia quest'unico numero che racchiude gli altri due [...]*

E' necessario andare al di là di questi concetti, facendo appello all'intuizione che corrisponde a uno dei due numeri, ad esempio alle proprie cinque dita [...] ed aggiungere, una dopo l'altra, al concetto del sette le unità del numero cinque quale è dato nell'intuizione. (Critica della ragion pura, Introduzione, B15-16.)

Kant: la conoscenza matematica (3)

- Nella Dialettica trascendentale (B376), Kant definisce un'intuizione come una rappresentazione singolare e immediata di un oggetto, mentre i concetti hanno un riferimento generale e mediato.
- Quando Kant afferma che le operazioni algebriche di somma e prodotto sono costruzioni, intende dire che sono operazioni su simboli individuali il cui risultato è nuovamente un simbolo individuale (si tratta dunque dell'esibizione di un'intuizione).

Kant: la dottrina del metodo (1)

- Nella Dottrina del metodo (B741-766), caratterizza la conoscenza matematica (in contrapposizione a quella filosofica) come conoscenza razionale per *costruzione* di concetti. Costruire un concetto significa esibire a priori la corrispondente intuizione.

La conoscenza filosofica è la conoscenza della ragione per mezzo di concetti; la conoscenza matematica è conoscenza per mezzo della costruzione di concetti. La costruzione di un concetto è la presentazione a priori dell'intuizione che corrisponde al concetto. Per questo scopo è richiesta un'intuizione non empirica, la quale, in quanto intuizione, è un oggetto individuale; mentre, in quanto costruzione di un concetto (idea generale), dev'essere vista come universalmente valida per tutte le possibili intuizioni che cadono sotto quel concetto. (Critica della ragion pura, Dottrina del metodo, B741.)

Kant: la dottrina del metodo (2)

Così, io costruisco un triangolo presentando l'oggetto che corrisponde a questo concetto, o per mera immaginazione, nell'intuizione pura, o su carta, nell'intuizione empirica; in entrambi i casi, completamente a priori, senza prendere in prestito la figura dall'esperienza. La particulare figura disegnata è empirica, ma serve a indicare il concetto anche nella sua universalità, perché in questa intuizione empirica badiamo solo all'atto della costruzione del concetto, non ai vari modi per determinarla, come le sue dimensioni, la lunghezza dei lati, la misura degli angoli, cose che non modificano in alcun modo il carattere essenziale del concetto (ibid.)

Kant: la dottrina del metodo (3)

La differenza essenziale tra questi due modi di conoscenza consiste perciò nella sua qualità formale; non riguarda una differenza nella materia o nell'oggetto. Quei pensatori che cercano di distinguere la filosofia dalla matematica dicendo che la prima riguarda la qualità e la seconda la quantità sbagliano l'effetto con la causa. La conoscenza matematica può riferirsi solo alla quantità a causa della sua forma: solo le nozioni quantitative sono suscettibili di venire costruite, ovvero presentate a priori nell'intuizione, mentre le qualità possono essere date solo nell'intuizione empirica. [...] Possiamo formarci un'intuizione di un cono attraverso il mero concetto, senza l'aiuto dell'esperienza; ma il colore del cono lo possiamo conoscere solo mediante l'esperienza (ibid.)

Kant: la dottrina del metodo (4)

Date a un filosofo il concetto di un triangolo e chiedetegli di scoprire, attraverso il metodo filosofico, che relazione c'è tra la somma dei suoi angoli e un angolo retto. Questi non avrà dinanzi a sé niente se non il concetto di una figura racchiusa da tre segmenti, e di consequenza con tre angoli. Potrà analizzare quanto vorrà i concetti di segmento, di angolo o del numero tre, ma non scoprirà alcuna proprietà che non sia già contenuta in questi concetti (Critica della ragion pura, Dottrina del metodo, B744.)

Kant: la dottrina del metodo (5)

Ma, se la questione viene posta a un geometra, questi immediatamente costruirà un triangolo. Sa che la somma di angoli adiacenti è uguale a due angoli retti; quindi, produrrà un lato di questo triangolo, formando due angoli adiacenti nel complesso pari a due retti. Poi dividerà l'angolo esterno tracciando una linea parallela al lato opposto del triangolo, e percepirà immediatamente che avrà un angolo adiacente esterno uguale a quello interno. Procedendo così, attraverso una catena di inferenze, e sempre basandosi sull'intuizione, arriverà a una soluzione del problema chiara e universalmente valida (ibid.)

Kant: il modello euclideo (1)

- In Kant, il modello di riferimento per quanto riguarda il metodo assiomatico è senz'altro quello euclideo.
- Nelle dimostrazioni euclidee, si fa una chiara distinzione tra il momento costruttivo, consistente nell'esposizione (*ékthesis*) della figura e nel completamento di quest'ultima mediante linee, punti e cerchi (*kataskeué*) e il momento più strettamente dimostrativo, consistente in una catena di inferenze logiche (*apódeixis*).
- La distinzione tra *ékthesis* e *apódeixis* fornisce a Kant un potente strumento di analisi delle dimostrazioni matematiche, che gli consente di separare chiaramente l'aspetto contenutistico-intuitivo e quello logico-formale.

Kant: il modello euclideo (2)

- Quando Kant afferma che una certa proposizione, ad es. $7 + 5 = 12$, è "indimostrabile" (B204-205), si riferisce al momento dell'*apódeixis*: una volta eseguita la costruzione corrispondente all'operazione di somma, l'*apódeixis* si riduce a una mera constatazione di identità, in un certo senso si dissolve.
- Gemino (I sec. a.C.): le nozioni comuni euclidee, o assiomi, sono proposizioni che non necessitano di una dimostrazione, i postulati sono proposizioni che non necessitano di una costruzione.
- Kant, quando dà esempi di giudizi analitici in geometria, cita sempre nozioni comuni, mentre quando esemplifica il concetto di costruzione, si riferisce a postulati o teoremi del sistema di Euclide. La nozione kantiana di costruzione non è dunque del tutto estranea a un trattamento assiomatico della matematica.

Kant: la nozione di deduzione

- Nella *Critica*, un intero capitolo del primo libro dell'Analitica trascendentale è dedicato alla *deduzione* dei concetti puri dell'intelletto.
- Kant mutua il termine dal gergo giuridico: una deduzione è un'argumentazione a carattere dimostrativo il cui intento è la giustificazione della legittimità di una certa tesi (*quaestio iuris*). Non risulta che Kant abbia mai applicato tale nozione al problema della giustificazione dei postulati di una teoria matematica.

Jakob Friedrich Fries (1773-1843)

Fries: il System der Metaphysik (1824)

- Per Fries, una *deduzione* è una giustificazione di un principio filosofico consistente in una dimostrazione del suo carattere di conoscenza immediata. La *critica della ragione* è una metateoria della metafisica, che deve chiarificarne criticamente i principi mediante deduzioni di questi ultimi.
- La metafisica è una teoria infinitaria, astratta e problematica che viene legittimata tramite una teoria meno sospetta, che utilizza i dati concreti dell'esperienza psicologica.
- Una deduzione non è una dimostrazione: hanno bisogno di una deduzione i principi di una teoria, per definizione indimostrabili. Fries riconosce la filiazione kantiana del termine, ma lo usa in un'accezione più vasta, che non esclude la possibilità di una deduzione per le idee della ragione.

Fries: la Mathematische Naturphilosophie (1822)

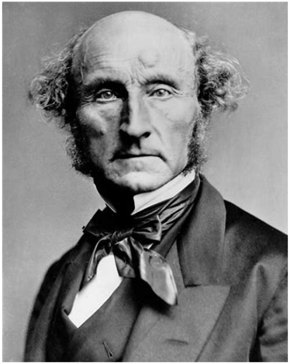
- La prima parte dell'opera è intitolata *Philosophie der Mathematik*. La filosofia della matematica è una disciplina scientifica che deve chiarificare criticamente i principi delle teorie matematiche mediante deduzioni.
- Una deduzione di un principio deve mostrarne il carattere di conoscenza immediata, proprietà che, nel caso della matematica, è fondata sull'intuizione pura.
- La scelta degli assiomi di una teoria matematica si fonda sull'isolamento di quell'insieme minimo di elementi contenutistici primitivi necessari per la costruzione logica della teoria. La filosofia della matematica deve separare l'elemento intuitivo e quello logico-formale nella matematica, per isolare le costruzioni primitive e logicamente irriducibili.

Fries: la Mathematische Naturphilosophie (1822)

- Come si fa? Fries: il metodo è quello dell'*astrazione*, la scissione puntuale dell'*ékthesis* dall'*apódeixis* in una dimostrazione. La prima è l'elemento predominante, la seconda ha una funzione solo ausiliaria.
- Fries applica il metodo dell'astrazione alla dimostrazione del teorema di Pitagora e alla dimostrazione della risolvente per le equazioni di secondo grado.

> *Nelle dimostrazioni matematiche le parti costruttive danno molto di più rispetto alle forme inferenziali logiche [...] In tutte queste dimostrazioni la forma logica è massimamente semplice e uniforme, mentre l'esibizione della verità della proposizione nell'intuizione è di gran lunga la cosa più importante.*

John Stuart Mill (1806-1873)



L'empirismo di Mill (1)

- L'acquisizione genuina di nuove conoscenze dev'essere giocoforza *induttiva*. La matematica è informativa proprio perché non può essere a priori. Le scienze matematiche possono essere *organizzate* in modo deduttivo, ma la cogenza di un assioma o di una regola dipende unicamente dalla giustificazione induttiva che la supporta.
- Le proposizioni matematiche asseriscono fatti. La validità delle trasformazioni aritmetiche si fonda su una generalizzazione induttiva da istanze specifiche: $2 + 1 = 3$ perché due sassi più un sasso fanno tre sassi, due gatti più un gatto fanno tre gatti ecc. Lo stesso vale per la giustificazione degli assiomi geometrici.
- Mill si oppone al platonismo matematico: non esistono i numeri come entità astratte. "Tutti i numeri devono essere numeri di qualcosa: non esistono cose come i numeri in astratto". I numeri sono solo proprietà di aggregati. Mill, però, non dice niente sui referenti dei concetti usati nella matematica superiore.

L'empirismo di Mill (2)

- Inoltre, ha problemi nel dare una semantica uniforme agli enunciati matematici sull'infinito. Per esempio, se la matematica verte su oggetti fisici, si potrebbe rigettare il teorema euclideo secondo cui vi sono infiniti numeri primi appellandosi al fatto che c'è solo un numero finito di particelle nell'universo.
- Si tratta di una visione empirista radicale: la scuola apriorista va combattuta "cacciandola dalla propria roccaforte". In particolare, Mill nega che le verità matematiche siano verità necessarie (se la possibilità di una conoscenza a priori è messa in discussione, è persino dubbio che possano esistere verità necessarie). Le nostre credenze possono essere più o meno *radicate*, più o meno centrali o periferiche rispetto alla nostra conoscenza del mondo. Di conseguenza, possiamo essere più o meno riluttanti ad abbandonarle. Alcune proposizioni ci appaiono necessarie a causa di processi di associazione psicologica che le rendono talmente consolidate da far apparire inconcepibile la loro negazione.

Il formalismo ingenuo (1)

- Hermann Hankel (1839-1873) difende una concezione puramente formale e simbolica della matematica, indipendente dal contenuto degli oggetti e slegata dall'intuizione. Le operazioni non hanno altro significato se non quello dato dalle loro proprietà formali, come l'associatività e la commutatività dell'addizione.
- I numeri naturali possono essere intuiti, ma alcune operazioni (le operazioni *litiche*, sottrazione, divisione, estrazione di radice o di logaritmo) sono solo *parziali* in tale dominio. Occorre ampliare i domini numerici per garantirne l'eseguibilità.
- La legge che presiede a tale ampliamento è la *legge di permanenza delle proprietà formali* (cfr. Peacock!):

> *Quando due forme espresse nei segni generali dell'aritmetica universale sono uguali, devono rimanerlo anche quando essi cessano di descrivere grandezze semplici e le operazioni ricevono un qualche altro contenuto.*

Il formalismo ingenuo (2)

- Hankel vuol pervenire a una scienza generale di tutti i tipi di grandezza, qualcosa come la teoria degli anelli. La permanenza della commutatività dell'addizione non è presupposta, onde ricomprendere anche i quaternioni di Hamilton.
- Carl Johannes Thomae (1840-1921) è il primo a suggerire l'analogia tra la matematica e un gioco con regole:

> *Secondo la concezione formale [dei numeri] l'aritmetica è un gioco con i segni. [...] Questa prospettiva ha il beneficio di alleggerirci di tutte le difficoltà metafisiche. [...] I numeri sono schemi puri senza contenuto la cui esistenza dipende dal fatto che le regole di combinazione astratte dai calcoli con gli interi possono esservi applicate senza contraddizione.*

- Thomae: la matematica è simile agli scacchi. Tuttavia, le regole degli scacchi sono arbitrarie, quelle dell'aritmetica possono essere riferite a molteplicità intuitive e servono alla conoscenza della natura.