




Teoremi sul calcolo differenziale

1

1



Massimo e minimo di una funzione

Definizione

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che M è **massimo assoluto** (o **globale**) di f in $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$ è punto di massimo se

$$f(x_0) = M \geq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

In modo analogo:

Si dice che m è un **minimo assoluto** (o **globale**) di f in $[a, b]$ e $x_1 \in [a, b]$ è punto di minimo se

$$f(x_1) = m \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

2

Massimo e minimo di una funzione

Definizione

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che $x_0 \in [a, b]$ è un punto di **massimo relativo** (o **locale**) per $f(x)$ se $\exists I(x_0, \delta)$:

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in I(x_0, \delta)$$

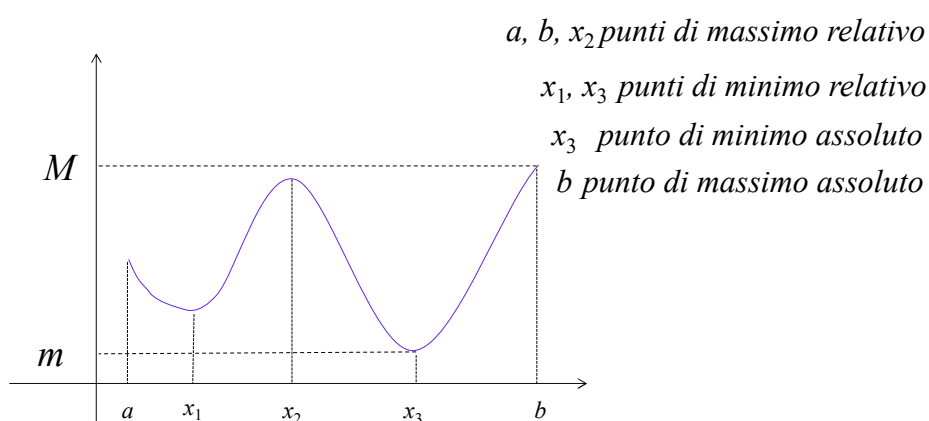
In modo analogo:

Si dice che $x_1 \in [a, b]$ è un punto di **minimo relativo** (o **locale**) per $f(x)$ se $\exists I(x_1, \delta)$:

$$f(x_1) \leq f(x), \quad \forall x \in I(x_1, \delta)$$

3

Massimo e minimo di una funzione



a, b, x_2 punti di massimo relativo

x_1, x_3 punti di minimo relativo

x_3 punto di minimo assoluto

b punto di massimo assoluto

x è di max o min relativo in un intorno di x . (la relazione \geq o \leq vale solo in I)

4

Massimo e minimo di una funzione

Def. I punti in cui $f(x)$ ha derivata nulla ($f'(x) = 0$)

Si dicono punti *stazionari* o *critici*.

5

Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Fermat

Sia $f(x)$ definita in $[a,b]$ e derivabile in $x_0 \in (a,b)$. Se x_0 è un punto di estremo locale allora

$$f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione

Sia x_0 un punto di massimo relativo, cioè $\exists I(x_0, \delta)$:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h), \quad \forall h: |h| < \delta$$

$$\text{si ha: } \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } 0 < h < \delta \\ \geq 0 & \text{se } -\delta < h < 0 \end{cases}$$

6

Massimo e minimo di una funzione

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) \geq 0$$

Ma essendo $f(x)$ derivabile in x_0 :

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

7

Massimo e minimo di una funzione

Se $x_0 = a$ allora $0 < h < \delta$ e se x_0 è un punto di massimo relativo si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \leq 0$$


Mentre, nel caso di minimo relativo in $x_0 = a$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \geq 0$$

In modo analogo: se $x_0 = b$ è punto di massimo relativo (con $-\delta < h < 0$) allora $f'(b) \geq 0$,

se invece $x_0 = b$ è un punto di minimo relativo, allora $f'(b) \leq 0$

8




Massimo e minimo di una funzione

Esercizio
Calcolare i punti critici per $f(x)$ classificare i punti di non derivabilità

$$f(x) = x^3\sqrt{x+1}$$

9



Massimo e minimo di una funzione

Esercizio
Calcolare i punti critici per $f(x)$ classificare i punti di non derivabilità

$$f(x) = x |\ln x|$$

10

Massimo e minimo di una funzione

Esercizio

Calcolare la derivata di $f(x) = x^{\ln x}$

11

Massimo e minimo di una funzione

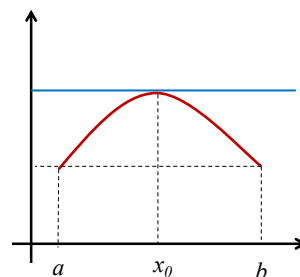
Teorema di Rolle

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- i) f è continua in $[a,b]$,
- ii) f è derivabile in (a,b) $f(a)=f(b)$
- iii) $f(a)=f(b)$ $f'(x_0)=0$

Allora $\exists x_0 \in (a,b)$:

Per il Teorema di Rolle esiste almeno un punto a tangente orizzontale



12

Massimo e minimo di una funzione

Dimostrazione

Per il Teorema di Weierstrass, f ha massimo e minimo assoluti in $[a,b]$ ($x_1, x_2 \in [a,b]$):

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Se uno dei due è interno ad $[a,b]$, per es. x_1 allora per il Teorema di Fermat $f'(x_1) = 0$

13

Massimo e minimo di una funzione

Dimostrazione


Se invece nessuno dei due è interno ad $[a,b]$ per es.

$$x_1 = a, \quad x_2 = b$$

Dall'ipotesi $f(a) = f(b)$ si ottiene minimo = massimo,
Cioè $f(x)$ è costante $\forall x \in [a,b]$ e quindi

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

14

 Massimo e minimo di una funzione


Esercizio
 Dire se la funzione $f(x) = e^{x^2-1}$ soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1,1]$ e in caso affermativo calcolare il punto (o i punti) del Teorema.

Sono verificate tutte le ipotesi del teorema di Rolle, infatti:

- i) $f(x) = e^{x^2-1}$ è continua in tutto \mathbb{R} e quindi anche in $[-1,1]$
- ii) $f(x)$ è derivabile in tutto \mathbb{R} e quindi anche in $(-1,1)$,
- iii) $f(-1) = f(1)$

Allora $\exists x_0 \in (-1,1) : f'(x_0) = 0$
 x_0 Si ricava facendo il calcolo: $f'(x_0) = 0$
 Cioè $2xe^{x^2-1} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

15

 Massimo e minimo di una funzione

Esercizio
 Dire se la funzione $f(x) = \ln|x|$ soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo $[-e, e]$.

Il teorema di Rolle non è applicabile perché $f(x) = \ln|x|$ non è definita in $x = 0$ e quindi non è né continua né derivabile in $x = 0$ e perciò non soddisfa tutte le ipotesi del teorema

16

Massimo e minimo di una funzione

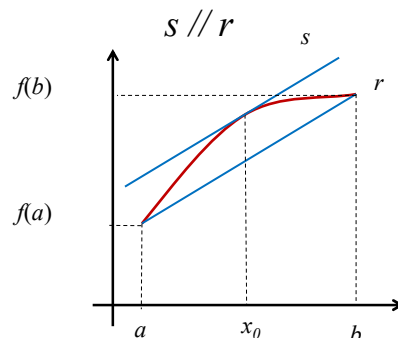
Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Sia $f(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- i) f è continua in $[a,b]$,
- ii) f è derivabile in (a,b) ,

Allora $\exists x_0 \in (a,b)$:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Per il Teorema di Lagrange \exists almeno un punto $(x_0, f(x_0))$ sul grafico di $f(x)$ in cui la retta tangente t è parallela alla retta r secante la curva in $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

17

Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Dimostrazione.

Si consideri la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \left[\overbrace{f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}^{\text{equazione di } r} \right]$$

Per $g(x)$ vale il Teorema di Rolle, infatti:

- i) $g(x)$ è continua in $[a,b]$ perché lo è $f(x)$ (l'altro pezzo è lineare);
- ii) $g(x)$ è derivabile in (a,b) perché lo è $f(x)$ e la seconda parte è lineare;
- iii) $g(a) = g(b) = 0$.

18

Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Dimostrazione

$$\Rightarrow \exists x_0 : g'(x_0) = 0$$

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

19

Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Esempio

$$f(x) = x^2 \text{ in } [a, b],$$

per il Teorema di Lagrange $\exists x_0 \in [a, b]$:

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = 2x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{b + a}{2} \quad \text{Media aritmetica di } a \text{ e } b$$

20

Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Esercizio

Dire se è applicabile il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x)=\arcsin x$ nell'intervallo $[-1,1]$ e in caso affermativo calcolare i punti del teorema.

La funzione data soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Lagrange infatti:

i) f è continua in $[-1,1]$ (è il suo campo di esistenza),

ii) f è derivabile in $(-1,1)$

Allora $\exists x_0 \in (-1,1): f'(x_0) = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow x_0 = \pm \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}$$

21

Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Esercizio

Determinare un intervallo in cui è applicabile il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \left| x - \frac{1}{x} \right|$

i) La funzione data è continua nel suo campo di esistenza cioè nell'insieme: $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

ii) f è derivabile nell'insieme $B = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \pm 1\}$ con derivata:

$$f'(x) = \left| \frac{x^2 - 1}{x} \right| \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}$$

22

Massimo e minimo di una funzione

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Perciò un intervallo in cui f soddisfa il teorema di Lagrange, è un qualunque intervallo $[a,b]$ che non contiene $x=0$ e tale che i punti $x=1$ e $x=-1$ non siano interni ad esso (potrebbero stare agli estremi)

Per es: $[1, 2]$ (f è continua in $[1,2]$ e derivabile in $(1,2)$, da notare che è derivabile anche in $x=2$ ma non serve...)

Oppure $[-4,-3]$, etc..

23

Massimo e minimo di una funzione



Joseph-Louis Lagrange
1736-1813



Pierre de Fermat
1601-1665



Michelle Rolle
1652-1719



Karl Weierstrass
1815 - 1897

24