

Capitolo 1

Il concetto di spazio vettoriale

Lo studio “classico” della geometria, quello che sicuramente il lettore, a vari livelli, ha incontrato durante i suoi studi scolastici, si basa su un sistema assiomatico ideato da Euclide intorno al IV-III secolo a.C.

In tale sistema vi sono alcuni concetti, come quello di “punto”, “retta”, “appartenenza di un punto ad una retta”, considerati come *primitivi*, cioè non definibili e da considerare nel loro significato intuitivo (d'altronde, da qualcosa si deve pur cominciare...), e altre proprietà, gli *assiomi*, non dimostrabili e considerate vere per definizione.

Tutto il resto della teoria, quella che comunemente a scuola viene chiamata “geometria Euclidea”, è conseguenza, diretta o indiretta, degli assiomi, vale a dire può essere dimostrata utilizzando gli assiomi oppure altre proprietà a loro volte dimostrate a partire dagli assiomi.

In questo corso, invece, adoteremo un altro punto di vista. Intendiamo fondare la geometria (e non solo!) sui concetti di *vettore* e di *numero reale* e - come si vedrà in seguito - la geometria Euclidea non sarà altro che un caso particolare di una teoria molto più generale ed elegante.

1.1 Vettori liberi

Prima di inoltrarci in questa nuova teoria, partiamo da un esempio, tratto ancora dalla geometria Euclidea studiata durante gli anni di scuola.

Un *segmento orientato* dello spazio Euclideo è individuato da un punto iniziale A e da un punto finale B , dove A e B sono punti dello spazio, e viene denotato col simbolo

$$\overrightarrow{AB}.$$

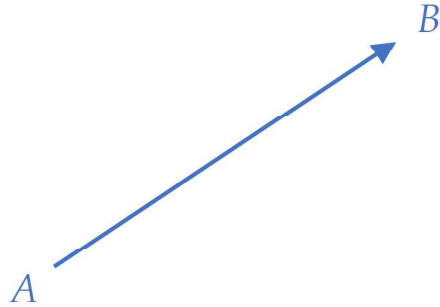


Figura 1.1: Un segmento orientato

Un altro simbolo, comunemente usato per indicare il segmento orientato di punto iniziale A e punto finale B , è

$$B - A.$$

In maniera analoga, si possono considerare segmenti orientati della retta Euclidea o del piano Euclideo.

Nel caso in cui punto iniziale e finale coincidano, il segmento si dice *degenerare*. Indicheremo con $\|\overrightarrow{AB}\|$ la lunghezza del segmento orientato \overrightarrow{AB} . In particolare, ogni segmento orientato degenerare ha lunghezza nulla.

Due segmenti orientati \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} si dicono *equipollenti* se entrambi sono degeneri (cioè $A = B$ e $C = D$) oppure le seguenti tre condizioni sono verificate:

- (1) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$ (cioè i due segmenti orientati hanno la stessa lunghezza),
- (2) la retta passante per i punti A e B e quella passante per i punti C e D sono parallele (si dice che \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} hanno la stessa direzione),
- (3) nel trapezio di vertici A , B , C e D , i punti finali dei due segmenti orientati \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} sono vertici di uno stesso lato (si dice che i due segmenti orientati hanno lo stesso verso) - si veda la Figura 1.2 e la Figura 1.3.

In altre parole, due segmenti orientati sono equipollenti se sono entrambi degeneri oppure se, muovendo uno dei due parallelamente all'altro, è possibile portare i due segmenti a sovrapporsi, in modo che i rispettivi punti iniziali e finali coincidano.

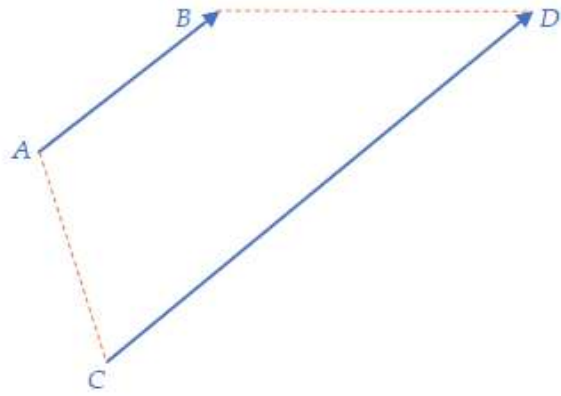


Figura 1.2: Due segmenti orientati aventi stesso verso

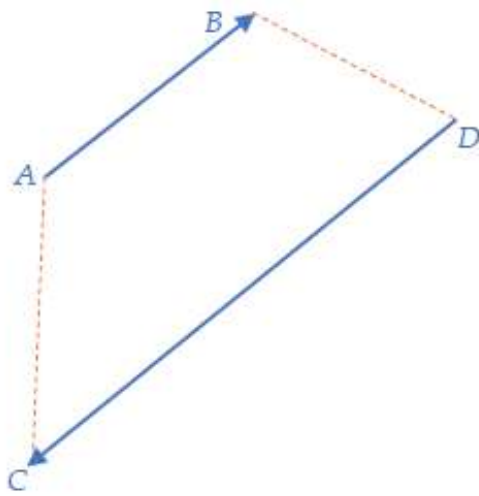


Figura 1.3: Due segmenti orientati aventi verso diverso

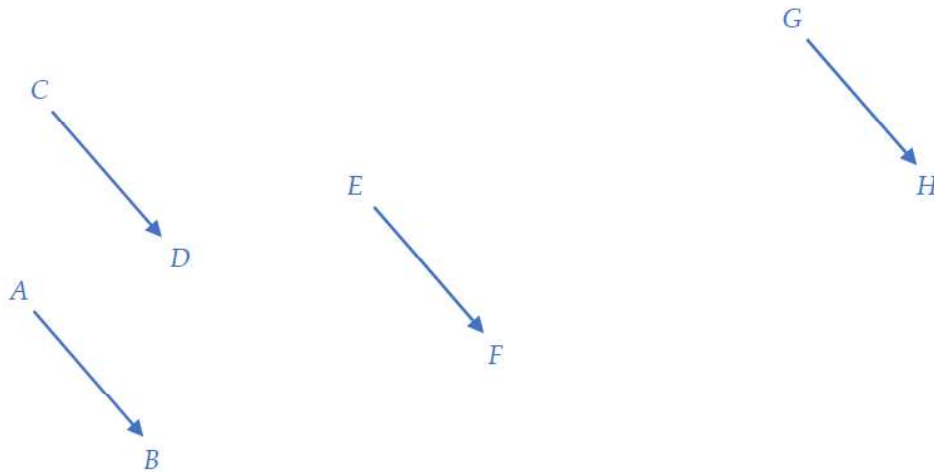


Figura 1.4: Alcuni segmenti orientati tra loro equipollenti

Nella Figura 1.4 sono rappresentati alcuni segmenti orientati equipollenti.

Osservazione 1.1.1. *Applicando la definizione segue facilmente che ogni segmento orientato è equipollente a se stesso, che se \overrightarrow{AB} è equipollente a \overrightarrow{CD} allora anche \overrightarrow{CD} è equipollente a \overrightarrow{AB} , e infine che se \overrightarrow{AB} è equipollente a \overrightarrow{CD} e \overrightarrow{CD} è equipollente a \overrightarrow{EF} allora \overrightarrow{AB} è equipollente a \overrightarrow{EF} .*

Il lettore che ha già incontrato il concetto di *relazione di equivalenza* (di solito svolto nel primo corso di Algebra) riconoscerà che le proprietà illustrate nella Osservazione 1.1.1 si possono esprimere dicendo che, nell'insieme di tutti i segmenti orientati dello spazio, la relazione di equipollenza è riflessiva, simmetrica e transitiva, e quindi è una relazione di equivalenza. Per “vettori liberi” intenderemo proprio le classi di equivalenza rispetto a tale relazione¹. Precisamente abbiamo la seguente definizione.

Definizione 1.1.2. *Si dice vettore libero (o vettore geometrico) l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti tra loro.*

In altre parole, se fissiamo un segmento orientato \overrightarrow{AB} , l'insieme di tutti i segmenti orientati aventi stessa lunghezza, direzione e verso di \overrightarrow{AB} è un vettore libero \mathbf{v} . Prendendo a prestito il linguaggio delle relazioni di equivalenza,

¹Il lettore che non ha ancora incontrato il concetto di relazione di equivalenza può ignorare queste osservazioni e tornarci in un secondo momento

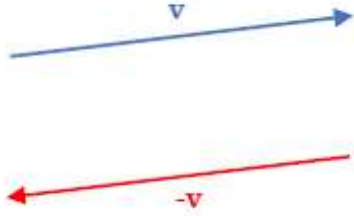


Figura 1.5: Vettore opposto del vettore libero \mathbf{v}

possiamo dire che il segmento orientato \overrightarrow{AB} è un “rappresentante” di \mathbf{v} . Dato un punto C esiste un unico segmento orientato \overrightarrow{CD} che rappresenta \mathbf{v} (si veda la Figura 1.4) e abbia in C il suo punto iniziale. Si dice anche che il vettore libero \mathbf{v} è “applicato” nel punto C .

Chiamiamo *vettore libero nullo* il vettore libero, denotato col simbolo $\mathbf{0}$, i cui rappresentanti sono tutti i segmenti orientati degeneri (cioè del tipo \overrightarrow{AA}).

Per definizione di equipollenza, tutti i rappresentanti di un dato vettore libero \mathbf{v} hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso. Ciò giustifica la seguente definizione.

Definizione 1.1.3. *La lunghezza $\|\mathbf{v}\|$, la direzione, il verso del vettore libero \mathbf{v} sono definiti, rispettivamente, come la lunghezza, la direzione, il verso di uno qualsiasi dei rappresentanti di \mathbf{v} .*

Definiamo inoltre il *vettore opposto* del vettore libero \mathbf{v} come il vettore libero, indicato col simbolo $-\mathbf{v}$, che ha stessa lunghezza e direzione, ma verso opposto, di \mathbf{v} .

Indicheremo con V_3 l’insieme di tutti i vettori liberi dello spazio Euclideo. Su tale insieme possiamo definire due operazioni: il prodotto di un vettore libero per un numero reale e la somma di due vettori liberi.

Cominciamo con la prima. Definiamo il prodotto del numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$ e del vettore libero $\mathbf{v} \in V_3$ nel modo seguente:

- Se $\lambda = 0$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ poniamo $\lambda \cdot \mathbf{v} := \mathbf{0}$.
- Se $\lambda > 0$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, definiamo $\lambda \cdot \mathbf{v}$ come il vettore libero avente stessa direzione e verso di \mathbf{v} e lunghezza $\|\lambda \cdot \mathbf{v}\| := \lambda \cdot \|\mathbf{v}\|$.
- Se $\lambda < 0$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, definiamo $\lambda \cdot \mathbf{v}$ come il vettore libero avente stessa direzione e verso opposto di \mathbf{v} e lunghezza $\|\lambda \cdot \mathbf{v}\| := |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

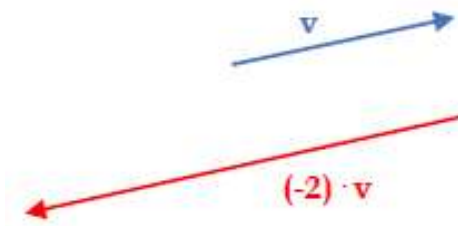


Figura 1.6: Prodotto del vettore libero \mathbf{v} con lo scalare -2

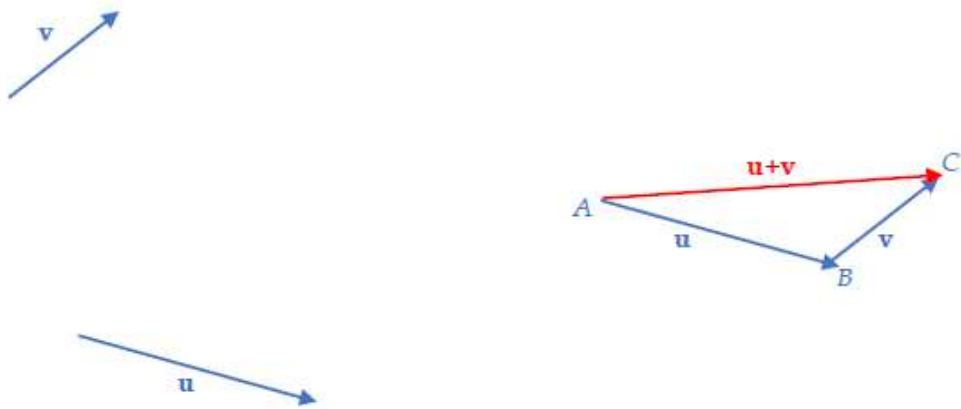


Figura 1.7: Somma di due vettori liberi

Dalla definizione segue immediatamente che

$$(\lambda\mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v})$$

e

$$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in V_3$.

Dati due vettori liberi \mathbf{u} e \mathbf{v} è possibile “sommarli” nel modo seguente. Consideriamo un qualsiasi rappresentante \overrightarrow{AB} di \mathbf{u} ed il rappresentante \overrightarrow{BC} di \mathbf{v} avente punto iniziale coincidente col punto finale del rappresentante di \mathbf{u} . Allora definiamo il vettore somma di \mathbf{u} e \mathbf{v} come il vettore libero

$$\mathbf{u} + \mathbf{v}$$

formato da tutti i segmenti orientati equipollenti al segmento \overrightarrow{AC} (si veda Figura 1.7). In particolare, da questa definizione segue immediatamente che,

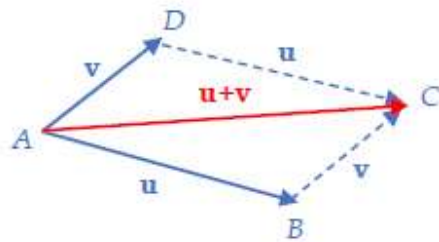


Figura 1.8: Regola del parallelogramma

per ogni $\mathbf{u} \in V_3$,

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u},$$

cioè il vettore libero nullo si comporta come elemento neutro per la somma di vettori liberi, e

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Vi è un modo equivalente per definire la somma. Possiamo considerare il rappresentante \overrightarrow{AD} di \mathbf{v} applicato in A e, come si vede immediatamente dalla Figura 1.8, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ha come rappresentante proprio la diagonale del parallelogramma di vertici A, B, C, D . Questa procedura è nota col nome di *regola del parallelogramma*.

Osservazione 1.1.4. *Nel caso particolare in cui \mathbf{u} e \mathbf{v} hanno la stessa direzione, il vettore $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ha la medesima direzione di \mathbf{u} e \mathbf{v} , verso quello del vettore, tra \mathbf{u} e \mathbf{v} , che ha lunghezza maggiore, e lunghezza data da*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| := \begin{cases} \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| & \text{se } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} \text{ hanno lo stesso verso} \\ \left| \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \right| & \text{se } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} \text{ hanno verso discorde} \end{cases}$$

(si veda la Figura 1.9).

Si noti che nell'operazione di somma che abbiamo appena definito vale la proprietà commutativa, cioè

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$, ed il vettore libero nullo si comporta come “elemento neutro”

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

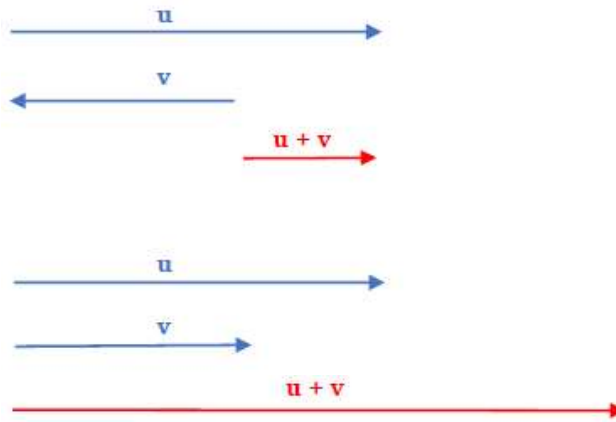


Figura 1.9: Somma di due vettori liberi aventi la stessa direzione

per ogni $\mathbf{u} \in V_3$. Inoltre vale, come si può dedurre dalla Figura 1.10, la proprietà associativa

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3$.

Utilizzando la definizione e/o proprietà elementari di geometria Euclidea, si può verificare facilmente che la somma tra vettori liberi ed il prodotto di un numero reale con un vettore libero soddisfano le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} &= \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v} \\ \lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$.

Lo spazio dei vettori liberi, con le operazioni di somma e di prodotto con un numero reale, e le proprietà che essi soddisfano, costituisce in un certo senso il “prototipo” della struttura algebrica che studieremo in questo corso e su cui intendiamo fondare la moderna Geometria.

1.2 Spazi vettoriali

Il concetto di Spazio Vettoriale estende e generalizza le proprietà dei vettori geometrici dello spazio Euclideo ordinario. Come spesso avviene in Matematica, tale generalizzazione ha permesso di dimostrare risultati molto profondi, che vanno ben al di là della teoria dei vettori liberi.

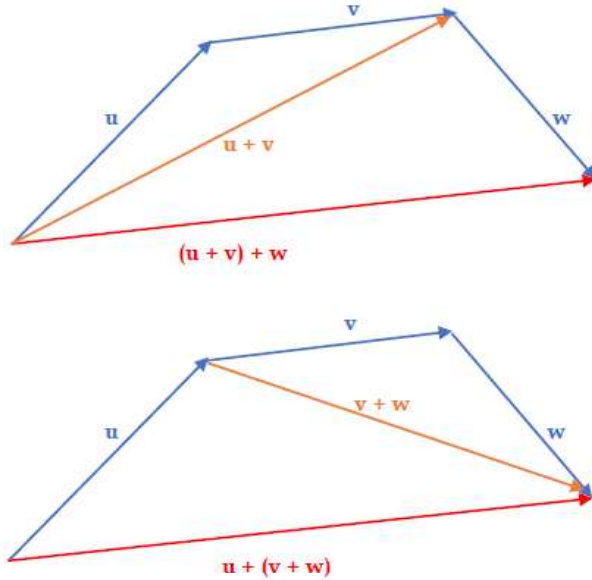


Figura 1.10: Proprietà associativa della somma di vettori liberi

Definizione 1.2.1. Uno spazio vettoriale su \mathbb{R} (o anche detto spazio vettoriale reale) è una terna (V, \boxplus, \boxminus) , dove V è un insieme munito di due operazioni

$$\boxplus : V \times V \longrightarrow V, \quad \boxminus : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

(una, interna, di somma ed una, esterna, di prodotto con numeri reali) che verificano i seguenti otto assiomi:

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha $(\mathbf{u} \boxplus \mathbf{v}) \boxplus \mathbf{w} = \mathbf{u} \boxplus (\mathbf{v} \boxplus \mathbf{w})$ (proprietà associativa)
2. $\exists \mathbf{0} \in V$ tale che $\forall \mathbf{u} \in V$ si ha $\mathbf{u} \boxplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \boxplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (esistenza dell'elemento neutro)
3. $\forall \mathbf{u} \in V$ esiste \mathbf{u}' tale che $\mathbf{u} \boxplus \mathbf{u}' = \mathbf{u}' \boxplus \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (esistenza dell'opposto)
4. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha $\mathbf{u} \boxplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \boxplus \mathbf{u}$ (proprietà commutativa)
5. $\forall \mathbf{u} \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha $(\lambda + \mu) \boxminus \mathbf{u} = (\lambda \boxminus \mathbf{u}) \boxplus (\mu \boxminus \mathbf{u})$
6. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda \boxminus (\mathbf{u} \boxplus \mathbf{v}) = (\lambda \boxminus \mathbf{u}) \boxplus (\lambda \boxminus \mathbf{v})$
7. $\forall \mathbf{u} \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha $(\lambda \mu) \boxminus \mathbf{u} = \lambda \boxminus (\mu \boxminus \mathbf{u})$

8. $\forall \mathbf{u} \in V$ si ha $1 \boxplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Gli elementi di uno spazio vettoriale saranno chiamati vettori.

Nel contesto degli spazi vettoriali, solitamente i numeri reali vengono anche chiamati *scalari*, cosicchè l'applicazione

$$\boxplus : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

prevista nella Definizione 1.2.1 viene anche chiamata operazione di *prodotto di uno scalare per un vettore*.

Osservazione 1.2.2. La Definizione 1.2.1 può essere generalizzata sostituendo l'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} a quello dei numeri reali \mathbb{R} . In tal caso diremo che V è uno spazio vettoriale complesso.

D'ora in poi, per snellire la notazione, indicheremo le due operazioni \boxplus e \boxtimes rispettivamente con $+$ e \cdot . Bisogna però stare attenti a non confonderle con le usuali operazioni di somma e di prodotto definite in \mathbb{R} , indicate con lo stesso simbolo. Dal contesto sarà chiaro come distinguerle.

A partire dagli assiomi, passiamo a dimostrare alcune proprietà degli spazi vettoriali.

Proposizione 1.2.3. L'elemento neutro $\mathbf{0}$, previsto nel secondo assioma, è unico.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un altro elemento neutro $\mathbf{0}'$. Per il secondo assioma si avrebbe

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'.$$

□

Data la sua unicità, al vettore elemento neutro per la somma viene assegnato un nome: il *vettore nullo*.

Allo stesso modo, dato un vettore $\mathbf{u} \in V$ anche il vettore \mathbf{u}' previsto dal terzo assioma è unico:

Proposizione 1.2.4. Per ogni $\mathbf{u} \in V$ esiste un unico \mathbf{u}' tale che $\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Se per assurdo esistesse un altro vettore \mathbf{u}'' tale che $\mathbf{u} + \mathbf{u}'' = \mathbf{0}$, si avrebbe

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{u}' + \mathbf{0} \\ &= \mathbf{u}' + (\mathbf{u} + \mathbf{u}'') \\ &= (\mathbf{u}' + \mathbf{u}) + \mathbf{u}'' \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{u}'' \\ &= \mathbf{u}'' \end{aligned}$$

□

Dato un vettore $\mathbf{u} \in V$, all'unico elemento previsto dalla Proposizione 1.2.4 viene dato il nome di *vettore opposto* di \mathbf{u} . Esso viene denotato con il simbolo

$$-\mathbf{u}.$$

Vale inoltre una sorta di legge di annullamento del prodotto:

Proposizione 1.2.5. *Per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni vettore $\mathbf{u} \in V$ si ha $\lambda \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se $\lambda = 0$ oppure $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.*

Dimostrazione. Partiamo col dimostrare che $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Infatti, utilizzando gli assiomi, si ha

$$0 \cdot \mathbf{u} = (0 + 0) \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u}.$$

Nella precedente equazione sommiamo al primo e al secondo membro il vettore opposto di $0 \cdot \mathbf{u}$, ottenendo

$$0 \cdot \mathbf{u} + (-0 \cdot \mathbf{u}) = (0 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u}) + (-0 \cdot \mathbf{u})$$

da cui

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{u} + (0 \cdot \mathbf{u} + (-0 \cdot \mathbf{u})) = 0 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{u}.$$

Proviamo inoltre che $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Infatti,

$$\lambda \cdot \mathbf{0} = \lambda \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \cdot \mathbf{0} + \lambda \cdot \mathbf{0},$$

da cui, sommando a primo e secondo membro il vettore opposto di $\lambda \cdot \mathbf{0}$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda \cdot \mathbf{0} + (-\lambda \cdot \mathbf{0}) = (\lambda \cdot \mathbf{0} + \lambda \cdot \mathbf{0}) + (-\lambda \cdot \mathbf{0}) = \lambda \cdot \mathbf{0} + (\lambda \cdot \mathbf{0} + (-\lambda \cdot \mathbf{0})) \\ &= \lambda \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} = \lambda \cdot \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo che $\lambda \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Se $\lambda = 0$ allora, per quanto appena visto, $\lambda \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Se, invece, $\lambda \neq 0$, allora sappiamo che esiste un numero reale $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda \cdot \lambda^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \lambda = 1$. Di conseguenza, da $\lambda \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ segue che

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot \mathbf{u}) = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Applicando il settimo assioma di spazio vettoriale la precedente uguaglianza diventa

$$(\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

da cui

$$\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

dove abbiamo utilizzato l'ultimo assioma di spazio vettoriale. □

1.2.1 Esempi di spazi vettoriali

Di seguito daremo alcuni esempi di spazi vettoriali e di altri insiemi che non sono spazi vettoriali. Lo studente è invitato a verificare la correttezza degli assiomi di spazio vettoriale per ognuno degli esempi proposti.

Esempio 1.2.6. *L'insieme V_3 dei vettori liberi dello spazio è uno spazio vettoriale reale rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare reale, così come definiti nella § 1.9.5.*

Esempio 1.2.7. *Dato un numero naturale non nullo n , consideriamo l'insieme \mathbb{R}^n delle n -uple ordinate di elementi di \mathbb{R}*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Tale insieme generalizza il concetto di coppia ordinata (che si otterrebbe per $n = 2$). Due elementi $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ sono uguali se, per definizione, $x_i = y_i$ per ciascun $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definiamo le seguenti operazioni su \mathbb{R}^n :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Allora $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{R} . In particolare segue che il campo \mathbb{R} , con le sue operazioni interne di somma e prodotto, è uno spazio vettoriale su se stesso.

Esempio 1.2.8. *L'insieme \mathbb{R}^2 munito della somma come nell'esempio precedente e del prodotto per uno scalare come segue*

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0),$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, non è uno spazio vettoriale. In effetti sono verificati tutti gli assiomi tranne l'ultimo.

Esempio 1.2.9. *L'insieme $\mathbb{R}_n[x]$ dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a n è uno spazio vettoriale rispetto alla somma usuale di polinomi e al prodotto di un numero reale per un polinomio.*

Esempio 1.2.10. *L'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado qualunque è uno spazio vettoriale rispetto alla somma usuale di polinomi e al prodotto di un numero reale per un polinomio. Vedremo più avanti che questo spazio vettoriale, a differenza di quello dell'esempio precedente, non ha dimensione finita.*

Esempio 1.2.11. *L'insieme \mathbb{R}^2 munito della somma e del prodotto per uno scalare definiti come segue*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 1) \quad , \quad \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad ,$$

non è uno spazio vettoriale. (Si veda in dettaglio quali proprietà non sono verificate)

Esempio 1.2.12. *L'insieme \mathbb{R}^2 munito della somma e del prodotto per uno scalare definiti come segue*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_2, x_2) \quad , \quad \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad ,$$

non è uno spazio vettoriale. (Si veda in dettaglio quali proprietà non sono verificate)

Esempio 1.2.13. *L'insieme $C^r[(a, b)]$ delle funzioni reali sull'intervallo aperto (a, b) e derivabili r volte (per $r = 0$ si intendono le funzioni continue), è uno spazio vettoriale rispetto alla usuale somma di funzioni e prodotto di un numero reale per una funzione.*

Un altro esempio fondamentale di spazio vettoriale è dato dall'insieme delle matrici ad entrate in un campo \mathbb{R} , che studieremo nel prossimo capitolo.

1.3 Esercizi conclusivi

1. Si consideri l'insieme \mathbb{R}^2 di tutte le coppie ordinate di numeri reali, munito delle seguenti operazioni di somma e di prodotto con uno scalare:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &:= (x_1 + y_2, x_2 + y_1) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2) &:= (\lambda x_1, \lambda x_2), \end{aligned}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$. Stabilire se $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale reale.

2. Sia $V := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ l'insieme dei numeri reali positivi. Definiamo su V le seguenti operazioni di somma \oplus e di prodotto con uno scalare reale \star :

$$x \oplus y := xy, \quad \lambda \star x := x^\lambda$$

per ogni $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Stabilire se (V, \oplus, \star) è uno spazio vettoriale.

3. Dimostrare che in ogni spazio vettoriale V si ha che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$(-\lambda) \cdot \mathbf{v} = -(\lambda \cdot \mathbf{v}) = \lambda \cdot (-\mathbf{v})$$

4. Denotiamo con $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$, dove $i^2 = -1$, il campo dei numeri complessi. È noto che \mathbb{C}^n ammette una struttura di spazio vettoriale complesso con le seguenti operazioni di somma e di prodotto per uno scalare

$$\begin{aligned}(z_1, \dots, z_n) + (z'_1, \dots, z'_n) &:= (z_1 + z'_1, \dots, z_n + z'_n) \\ \lambda \cdot (z_1, \dots, z_n) &:= (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n)\end{aligned}$$

dove $\lambda \in \mathbb{C}$. È possibile definire su \mathbb{C}^n una struttura di spazio vettoriale *reale*?

Matrici

Un altro esempio molto importante di spazio vettoriale è dato dall'insieme delle matrici.

Siano m ed n due numeri naturali diversi da 0. Una *matrice con m righe ed n colonne ad entrate in \mathbb{R}* (o anche *matrice $m \times n$ ad entrate in \mathbb{R}*) è comunemente definita come una tabella con m righe ed n colonne di elementi di \mathbb{R} . Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -5 & -\pi & 0 & -\sqrt{3} & 51 \\ 1 & -1 & -7 & 50 & 17 \end{pmatrix}$$

è una matrice ad entrate reali con 3 righe e 5 colonne.

Gli $m \cdot n$ elementi di \mathbb{R} che si trovano nella tabella vengono chiamati *entrate* della matrice. Solitamente indicheremo le matrici con lettere maiuscole, mentre se vogliamo scrivere una matrice per esteso scriveremo le entrate tra due parentesi tonde, come nei seguenti esempi:

- esempio di matrice con 4 righe e 3 colonne ad entrate complesse

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -\pi & 0 \\ -1 & -7 + 2i \\ 0 & 1 \\ \sqrt{5} & -\sqrt{\pi} \end{pmatrix};$$

- esempio di matrice con 2 righe e 3 colonne ad entrate in \mathbb{Z}_2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indicheremo con $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici con m righe e n colonne ad entrate in \mathbb{R} o semplicemente con $\mathcal{M}_{m \times n}$.

Se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, le sue entrate saranno in totale $m \cdot n$ numeri reali. Essi sono generalmente indicati con una lettera minuscola con due indici in basso, ad esempio a_{ij} , dove l'indice i assume valori (nell'insieme dei numeri naturali) da 1 a m e j da 1 ad n . Scriveremo quindi

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

L'indice i (quello che sta al primo posto) sarà chiamato *indice di riga*, mentre j (al secondo posto) *indice di colonna*.

Per i ragionamenti teorici talvolta sarà utile, data una matrice A , indicare la sua entrata a_{ij} che si trova nella i -esima riga e j -esima colonna, anche con il simbolo $[A]_{ij}$.

Un'altra notazione molto utile è quella che descrive la matrice come insieme di righe o di colonne. Scriveremo cioè $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ (usando gli indici in basso) dove A_1 è la prima riga, A_2 la seconda e così via, oppure $A = (A^1, A^2, \dots, A^n)$ (usando gli indici in alto) dove A^j è la j -esima colonna.

Il lettore più attento avrà intuito che quella che abbiamo fornito, lungi dall'essere una definizione rigorosa, è più che altro un modo di disporre $m \cdot n$ elementi di \mathbb{R} . Una definizione più rigorosa di matrice è la seguente.

Definizione 1.3.1. *Una matrice con m righe ed n colonne ad entrate reali è una applicazione*

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Da questo punto di vista, l'entrata a_{ij} è proprio l'immagine della coppia (i, j) tramite l'applicazione A

$$a_{ij} := A(i, j)$$

dove $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$, mentre la "tabella" (1.1), che nella prassi rappresenta la matrice, altro non è che l'insieme immagine

$$A(\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\})$$

dell'applicazione A . Questo punto di vista giustifica la seguente definizione.

Definizione 1.3.2. *Due matrici $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$ sono uguali se accade che $[A]_{ij} = [B]_{ij}$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$.*

1.4 Particolari tipi di matrice

Prima di introdurre le operazioni fondamentali tra matrici, vedremo alcune matrici di tipo speciale, che rivestono un ruolo importante nella teoria.

Definizione 1.4.1. *Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, sarà detta trasposta di A la matrice indicata con A^t tale che $A^t \in \mathcal{M}_{n \times m}$ e $[A^t]_{ij} := [A]_{ji}$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$.*

In pratica A^t è la matrice ottenuta da A scambiando tra loro le righe e le colonne di A : la i -esima riga di A diventa la i -esima colonna di A^t .

Definizione 1.4.2. *La matrice opposta di A , indicata con $-A$ è la matrice di $\mathcal{M}_{n \times m}$ tale che $[-A]_{ij} = -[A]_{ij}$.*

Esempio 1.4.3. *La trasposta della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

è la matrice

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Definizione 1.4.4. *Una matrice quadrata di ordine n è una matrice avente n righe ed n colonne.*

Indicheremo con \mathcal{M}_n l'insieme delle matrici quadrate di ordine n .

Data una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n , la n -upla di elementi

$$(a_{11}, \dots, a_{nn})$$

è detta *diagonale principale* di A , mentre la n -upla

$$(a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n})$$

è detta *diagonale secondaria*.

Definizione 1.4.5. *La matrice $O_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}$*

$$O_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avente entrate tutte nulle è detta *matrice nulla* di $\mathcal{M}_{m \times n}$.

Nel caso delle matrici quadrate esiste un'altra matrice particolarmente importante chiamata *matrice identità*. Per poterne dare una definizione più concisa ci occorre la seguente definizione:

Definizione 1.4.6. Il simbolo di Kronecker² (o anche delta di Kronecker) indicato con δ_{ij} , dove i, j sono numeri naturali, è definito come segue:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} .$$

Definizione 1.4.7. La matrice identità di ordine n , denotata con I_n , è la matrice quadrata di ordine n le cui entrate sono $[I_n]_{ij} = \delta_{ij}$.

Quindi la matrice identità ha tutti 1 nella diagonale principale e 0 altrove. Quando sarà chiaro l'ordine della matrice identità, la indicheremo semplicemente con I .

Esempio 1.4.8. La matrice identità di ordine 1 è la matrice (1), quella di ordine due è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mentre quella di ordine 3 è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Più in generale si può parlare di matrici *diagonali*, cioè matrici quadrate le cui entrate, tranne eventualmente quelle della diagonale principale, sono nulle. Più precisamente abbiamo:

Definizione 1.4.9. Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ è detta diagonale se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.

In particolare la matrice identità e la matrice nulla di ordine n sono diagonali.

Spesso è utile denotare una matrice diagonale di ordine n mettendo in evidenza solo le entrate della diagonale principale. Scriveremo quindi

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

così intendendo la matrice diagonale i cui elementi della diagonale principale sono $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Possiamo ancora generalizzare le matrici diagonali, nel modo seguente:

²Leopold Kronecker: matematico tedesco (Liegnitz, 1823 - Berlino, 1981).

Definizione 1.4.10. Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ è detta triangolare superiore (rispettivamente triangolare inferiore) se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$ (rispettivamente $i < j$).

Esempio 1.4.11. Le seguenti matrici sono triangolari superiori

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

mentre sono triangolari inferiori le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Di particolare interesse sono le matrici definite come segue:

Definizione 1.4.12. Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ è detta simmetrica se per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$a_{ij} = a_{ji}$$

o equivalentemente se $A^t = A$.

Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ è detta antisimmetrica se per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

o equivalentemente se $A^t = -A$.

Le matrici identità e le matrici nulle di ordine qualunque sono simmetriche.

Esempio 1.4.13. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è simmetrica.

Esempio 1.4.14. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è antisimmetrica, mentre non

lo è la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Terminiamo questa sezione con una definizione che sarà utile più avanti:

Definizione 1.4.15. La traccia di una matrice quadrata $A = (a_{ij})$, di ordine n , è il numero reale definito come segue:

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

La traccia di una matrice è quindi la somma degli elementi della diagonale principale. In quanto tale, $\operatorname{tr}(A)$ è un elemento di \mathbb{R} .

Esercizi

1. Si scrivano per esteso tutte le matrici diagonali di ordine 2 e 3 con entrate 1 e 0.
2. Si dimostri che le entrate della diagonale principale di una matrice antisimmetrica sono nulle.
3. Si scriva la forma generale delle matrici simmetriche di ordine 3 e delle matrici antisimmetriche di ordine 3.
4. Si dimostri che l'unica matrice antisimmetrica di ordine 1 è la matrice nulla. Si mostri con un controesempio che questo non vale per le matrici antisimmetriche di ordine 2.
5. Si dimostri che tutte le matrici quadrate di ordine uno sono simmetriche.
6. Si calcoli la traccia delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3.$$

7. Si dimostri che la traccia delle matrici nulle di qualunque ordine vale 0.
8. Si dimostri che la traccia di I_n vale n .
9. Si calcoli la traccia di una matrice antisimmetrica.
10. Si dimostri che una matrice quadrata è diagonale se e solo se è sia triangolare inferiore che superiore.
11. Si dimostri che la trasposta di una matrice triangolare inferiore è triangolare superiore e viceversa.

1.5 Operazioni sulle matrici

In questa sezione definiremo alcune operazioni negli insiemi di matrici. Inizieremo con la *somma* ed il *prodotto per uno scalare*:

Definizione 1.5.1. La somma su $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ è una applicazione

$$\begin{aligned} + : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto A + B \end{aligned}$$

definita come segue

$$[A + B]_{ij} := [A]_{ij} + [B]_{ij}.$$

Definizione 1.5.2. Il prodotto di una matrice in $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ per uno scalare è una applicazione

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \\ (\lambda, A) &\mapsto \lambda \cdot A \end{aligned}$$

definita come segue

$$[\lambda \cdot A]_{ij} := \lambda([A]_{ij}).$$

Per abbreviare la notazione, denoteremo $\lambda \cdot A$ anche con λA .

Osservazione 1.5.3. Per definizione si può fare la somma tra due matrici ad entrate reali ed entrambi con m righe ed n colonne, e si ottiene ancora una matrice dello stesso tipo. Allo stesso modo se si moltiplica uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ per una matrice si ottiene ancora una matrice dello stesso tipo. Vedremo più avanti che il prodotto tra matrici è definito in modo molto diverso.

Esempio 1.5.4. Eseguiamo la somma tra le due matrici ad entrate reali

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -\pi & 2\pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Sommando le entrate corrispondenti avremo

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 + 0 & -3 + (-2) & 0 + 1 \\ -4 + (-\pi) & 3 + 2\pi & 10 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -4 - \pi & 3 + 2\pi & 10 \end{pmatrix}.$$

Esempio 1.5.5. Facciamo il prodotto del numero reale π per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando π per ogni entrata di A otterremo:

$$\pi \cdot A = \begin{pmatrix} -\pi & 3\pi \\ 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Vediamo ora alcune proprietà fondamentali della somma di matrici e del prodotto per un scalare:

Proposizione 1.5.6. *La somma di matrici e il prodotto per uno scalare su $\mathcal{M}_{m \times n}$ soddisfano le seguenti proprietà:*

1. per ogni $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}$ si ha $(A + B) + C = A + (B + C)$;
2. esiste una matrice $O \in \mathcal{M}_{m \times n}$ tale che $A + O = O + A$ per ogni $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$;
3. per ogni $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ esiste una matrice $A' \in \mathcal{M}_{m \times n}$ tale che $A + A' = A' + A = O$;
4. per ogni $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$ si ha $A + B = B + A$;
5. per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$ si ha $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
6. per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e ogni $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ si ha $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
7. per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ si ha $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
8. per ogni $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ si ha $1A = A$.

Dimostrazione. Per quanto riguarda la prima e seconda proprietà osserviamo che la matrice O cercata è la matrice nulla di $\mathcal{M}_{m \times n}$, mentre la matrice A' è la matrice opposta di A . Visto che le dimostrazioni della varie proprietà sono molto simili, dimostreremo solo la prima proprietà, cioè la proprietà associativa. Per dimostrare che le matrici $(A + B) + C$ e $A + (B + C)$ sono uguali, dobbiamo dimostrare che le entrate corrispondenti sono uguali. Per ciascun $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\begin{aligned}
 [(A + B) + C]_{ij} &\stackrel{\text{per definizione di somma}}{=} [A + B]_{ij} + [C]_{ij} \\
 &\stackrel{\text{per definizione di somma}}{=} ([A]_{ij} + [B]_{ij}) + [C]_{ij} \\
 &\stackrel{\text{per l'associatività della somma in } \mathbb{R}}{=} [A]_{ij} + ([B]_{ij} + [C]_{ij}) \\
 &\stackrel{\text{per definizione di somma}}{=} [A]_{ij} + [B + C]_{ij} \\
 &\stackrel{\text{per definizione di somma}}{=} [A + (B + C)]_{ij}.
 \end{aligned}$$

□

La seguente proposizione, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio, può essere dimostrata direttamente utilizzando le definizioni di somma e prodotto per uno scalare oppure utilizzando unicamente le proprietà della Proposizione 1.5.6:

Proposizione 1.5.7. *Per ogni $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha:*

1. $0A = O_{m \times n}$;
2. $(-1)A = -A$;
3. $(-\lambda)A = -(\lambda A) = \lambda(-A)$.

Osservazione 1.5.8. *Nella proposizione precedente, si noti che $-A$ è l'opposta di A , mentre $(-1)A$ è il prodotto di -1 per A come definito precedentemente.*

Vediamo ora la definizione di *prodotto* di matrici:

Definizione 1.5.9. *Il prodotto tra matrici è una applicazione*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{M}_{m \times n} \times \mathcal{M}_{n \times k} &\longrightarrow \mathcal{M}_{m \times k} \\ (A, B) &\mapsto AB \end{aligned}$$

definita come segue

$$\begin{aligned} [AB]_{ij} &:= \sum_{s=1}^n [A]_{is}[B]_{sj} \\ &= [A]_{i1}[B]_{1j} + [A]_{i2}[B]_{2j} + \cdots + [A]_{in}[B]_{nj}. \end{aligned}$$

Si osservi che per poter moltiplicare due matrici, il numero di righe della seconda deve essere uguale al numero di colonne della prima. La matrice che si ottiene ha il numero di righe della prima e il numero di colonne della seconda.

Il prodotto fra matrici viene anche chiamato *prodotto riga per colonna*. Il motivo diventa chiaro se si analizza più in dettaglio come viene calcolato il prodotto. Vediamo innanzitutto come funziona il prodotto di una matrice riga $A \in \mathcal{M}_{1 \times n}$ per una matrice colonna $B \in \mathcal{M}_{n \times 1}$. Il risultato sarà una matrice 1×1 la cui unica entrata è data da

$$\begin{aligned} [AB]_{11} &= \sum_{s=1}^n [A]_{1s}[B]_{s1} \\ &= [A]_{11}[B]_{11} + [A]_{12}[B]_{21} + \cdots + [A]_{1j}[B]_{j1} + \cdots + [A]_{1n}[B]_{n1}. \end{aligned}$$

In questo modo stiamo moltiplicando una riga per una colonna. Ora è facile convincersi che se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ e $B \in \mathcal{M}_{n \times k}$, l'entrata ij della matrice AB è proprio il prodotto della i -esima riga di A per la j -esima colonna di B .

Un esempio con due matrici generiche chiarirà ulteriormente questo fatto.

Esempio 1.5.10. *Calcoliamo il prodotto della matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ per la matrice $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$. L'entrata $[AB]_{11}$ sarà il prodotto della prima riga di A per la prima colonna di B e dunque varrà $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$. Continuando in questo modo si avrà quindi*

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}.$$

L'esempio precedente mostra inoltre che non è possibile fare il prodotto BA , per via di come è stato definito il prodotto. A volte è possibile fare entrambi i prodotti ma i due risultati non sono confrontabili in quanto si ottengono matrici di tipo diverso. Ad esempio se $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}$ e $B \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$, allora è possibile fare AB e BA , ma $AB \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$, mentre $BA \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$.

In effetti ci si rende facilmente conto (verificare!) che AB e BA sono dello stesso tipo solo se sono matrici quadrate (dello stesso ordine). Anche in questo caso comunque AB e BA non necessariamente coincidono, come mostra il seguente esempio:

Esempio 1.5.11. *Consideriamo le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Facendo i due prodotti si ottiene $AB = B$ e $BA = O$ e quindi i due prodotti sono diversi.

L'esempio precedente mostra che in generale il prodotto di matrici non è commutativo e non soddisfa la *legge di annullamento del prodotto* (A e B sono due matrici non nulle, ma il prodotto BA è la matrice nulla).

Il prodotto di matrici gode comunque di altre interessanti proprietà:

Proposizione 1.5.12. *Il prodotto di matrici gode delle seguenti proprietà:*

1. $A(B + C) = AB + AC, \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}, \forall B, C \in \mathcal{M}_{n \times k}$;
2. $(B + C)A = BA + CA, \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}, \forall B, C \in \mathcal{M}_{k \times m}$;

$$3. \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}, \forall B \in \mathcal{M}_{n \times k};$$

$$4. A(BC) = (AB)C, \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}, \forall B \in \mathcal{M}_{n \times k}, \forall C \in \mathcal{M}_{k \times r}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione delle quattro proprietà è molto simile e quindi dimostreremo solamente la quarta, lasciando le altre per esercizio.

Dobbiamo dimostrare che $A(BC) = (AB)C \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}, \forall B \in \mathcal{M}_{n \times k}, \forall C \in \mathcal{M}_{k \times r}$. Per far ciò basta dimostrare che effettivamente le due matrici sono dello stesso tipo (verifica immediata) e che le entrate corrispondenti siano uguali. Avremo quindi:

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &\stackrel{\text{def. di prodotto}}{=} \sum_{s=1}^n [A]_{is} [BC]_{sj} \\ &\stackrel{\text{def. di prodotto}}{=} \sum_{s=1}^n [A]_{is} \left(\sum_{l=1}^k [B]_{sl} [C]_{lj} \right) \\ &\stackrel{\text{ propr. distrib. in } \mathbb{R}}{=} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{l=1}^k [A]_{is} [B]_{sl} [C]_{lj} \right) \\ &\stackrel{\text{ propr. comm. e assoc. in } \mathbb{R}}{=} \sum_{l=1}^k \left(\sum_{s=1}^n [A]_{is} [B]_{sl} [C]_{lj} \right) \\ &\stackrel{\text{ propr. distrib. in } \mathbb{R}}{=} \sum_{l=1}^k \left(\sum_{s=1}^n [A]_{is} [B]_{sl} \right) [C]_{lj} \\ &\stackrel{\text{ def. prod.}}{=} \sum_{l=1}^k [AB]_{il} [C]_{lj} \\ &\stackrel{\text{ def. prod.}}{=} [(AB)C]_{ij}. \end{aligned}$$

□

1.5.1 Sistemi lineari e matrici

Sistemi lineari

Una *equazione lineare a n incognite* è una equazione del tipo seguente:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \quad (1.2)$$

dove $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$. I simboli x_1, \dots, x_n sono detti *incognite* dell'equazione, a_1, \dots, a_n *coefficienti* e b sarà chiamato *termine noto*.

Per semplificare la notazione, useremo spesso il simbolo di sommatoria, così da scrivere l'equazione lineare nel modo seguente:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b. \quad (1.3)$$

Definizione 1.5.13. Una soluzione di una equazione lineare a n incognite $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$, è una n -upla ordinata $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}$ tale che si abbia:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i^0 = b.$$

Questo significa che se nell'equazione, al posto delle incognite mettiamo gli elementi della n -upla e svolgiamo i calcoli, otteniamo il termine noto.

Vediamo ora alcuni esempi di equazioni lineari e di soluzioni di tali equazioni:

Esempio 1.5.14. Consideriamo l'equazione in 4 incognite:

$$2x_1 - x_2 + \sqrt{2}x_4 = 0.$$

Si osservi innanzitutto che il coefficiente di x_3 è nullo e perciò tale incognita non appare nell'equazione ed inoltre il termine noto è anch'esso nullo. La quaterna di numeri reali $(0, 0, 0, 0)$ è una soluzione, infatti si ha:

$$2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0,$$

che è pari al termine noto. Allo stesso modo si verifica che le quaterne $(1, 2, 0, 0)$ e $(\sqrt{2}, 0, 5, -2)$ sono entrambe soluzioni.

Esempio 1.5.15. L'equazione a 5 incognite

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0,$$

ammette come soluzione qualunque 5-upla di numeri reali.

Esempio 1.5.16. L'equazione ad un'incognita (che denotiamo con x)

$$5x = -3,$$

ammette come unica soluzione il numero reale $-\frac{3}{5}$. Infatti si verifica sostituendo che $-\frac{3}{5}$ è una soluzione. Inoltre, se x^0 è una soluzione di tale equazione allora si ha

$$5x^0 = -3$$

e, dividendo entrambi i membri per 5, si ottiene $x^0 = -\frac{3}{5}$.

Una equazione lineare a n incognite è detta *omogenea* se il suo termine noto è nullo. In tal caso si verifica facilmente che la n -upla in cui ogni elemento è zero è una soluzione dell'equazione. Tale n -upla verrà chiamata *soluzione nulla*.

Definizione 1.5.17. *Un sistema lineare a n incognite e m equazioni è un insieme di m equazioni lineari ad n incognite.*

Per avere un sistema a n incognite e m equazioni ci occorrono dunque $m \cdot n$ coefficienti e n termini noti. Per poter scrivere più concisamente un sistema, siccome ci occorre identificare quali sono i coefficienti e i termini noti di ogni equazione, utilizzeremo un doppio indice per il coefficiente generico, in modo tale che il primo indice identifichi l'equazione e il secondo la corrispondente incognita.

Ad esempio, se il sistema ha 2 equazioni e 3 incognite, ci occorrono $2 \cdot 3 = 6$ coefficienti che indicheremo ad esempio con a_{ij} , dove l'indice i assume i valori 1, 2, mentre j assume valori 1, 2, 3. Allora avremo che a_{11} è il coefficiente relativo a x_1 della prima equazione, a_{12} è il coefficiente relativo a x_2 della prima equazione e a_{13} è il coefficiente relativo a x_3 della prima equazione. Per la seconda equazione avremo invece che a_{21} è il coefficiente relativo a x_1 , a_{22} è il coefficiente relativo a x_2 e a_{23} è il coefficiente relativo a x_3 . Per i termini noti ci servirà un unico indice dato che per identificarli ci occorre solo il numero di equazione.

In generale dunque, se abbiamo n incognite ed m equazioni e indichiamo con a_{ij} i coefficienti e b_i i termini noti, per descrivere il sistema scriveremo:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

Quindi per i fissato avremo la i -esima equazione del sistema

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i.$$

La notazione classica per scrivere un sistema per esteso (che useremo in particolare quando il sistema è dato esplicitamente):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \quad (1.5)$$

Definizione 1.5.18. Una soluzione del sistema (1.5) è una n -upla di elementi di \mathbb{R} che sia soluzione di ogni equazione del sistema.

Osservazione 1.5.19. Se \mathcal{S}_i indica l'insieme delle soluzioni della i -esima equazione del sistema, l'insieme delle soluzioni del sistema sarà $\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{S}_i$.

Definizione 1.5.20. Un sistema si dice compatibile se ammette soluzioni (ossia se l'insieme delle soluzioni è non vuoto), altrimenti si dice incompatibile.

Esempio 1.5.21. Il sistema a tre incognite e due equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ \pi x + \sqrt{5}y - (\ln 5)z = 0 \end{cases}$$

è compatibile poiché entrambe le equazioni ammettono la soluzione nulla.

Esempio 1.5.22. Il sistema a due incognite e due equazioni

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

non è compatibile. Infatti se (a, b) fosse una soluzione, si dovrebbe avere $a = b$ poiché la coppia (a, b) è soluzione della prima equazione, ma allora la loro differenza sarebbe 0 e quindi la coppia (a, b) non può essere soluzione della seconda equazione.

Di particolare importanza sono i sistemi in cui tutte le equazioni sono omogenee. Diamo quindi la seguente definizione:

Definizione 1.5.23. Un sistema è detto omogeneo se tutte le sue equazioni sono omogenee.

Poiché una equazione omogenea ammette sempre la soluzione nulla, un sistema omogeneo è sempre compatibile.

Sistemi lineari in forma matriciale

Le matrici possono essere utilizzate per scrivere i sistemi in *forma matriciale*. Vedremo di seguito due forme particolarmente utili più avanti.

Abbiamo visto che avere un sistema lineare a n incognite e m equazioni equivale ad avere i coefficienti a_{ij} e i termini noti b_i , per $i = 1, \dots, m$ (dove m è il numero di equazioni) e $j = 1, \dots, n$ (dove n è il numero di incognite). I coefficienti del sistema definiscono in modo naturale le entrate di una matrice

$m \times n$, che sarà la matrice $A = (a_{ij})$. La matrice dei termini noti sarà invece la matrice colonna $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Sfruttando la definizione di prodotto tra matrici, se indichiamo con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonna le cui entrate sono le incognite del sistema, il sistema potrà essere scritto come segue:

$$AX = B$$

e quindi una soluzione del sistema sarà un elemento $X_0 \in \mathcal{M}_{n \times 1}$ tale che

$$AX_0 = B.$$

Se invece indichiamo con A^1, \dots, A^n le colonne della matrice, stavolta utilizzando la definizione di somma e di prodotto per uno scalare, scriveremo il sistema come segue:

$$x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = B.$$

1.5.2 Matrici invertibili

Nelle sezioni precedenti abbiamo introdotto la somma e la moltiplicazione tra matrici. Nel caso di matrici 1×1 , queste operazioni coincidono con la somma e la moltiplicazione in \mathbb{R} . Mentre la somma tra matrici ha formalmente proprietà molti simili a quelle della somma tra numeri reali, abbiamo notato che la moltiplicazione, benché associativa, non è in generale commutativa.

Una proprietà importante nel caso della somma e della moltiplicazione in \mathbb{R} è quella dell'esistenza dell'opposto per la somma e dell'inverso, per qualunque elemento diverso da 0, per la moltiplicazione. Abbiamo visto che per la somma di matrici esiste un elemento neutro e data una matrice esiste la sua opposta. Cosa possiamo dire nel caso del prodotto?

Si può verificare che, data $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, si ha $A \cdot I_n = A$ e $I_m \cdot A = A$. Quindi la matrice identità (di ordine tale da dare un senso alla moltiplicazione) moltiplicata per una matrice la lascia invariata. Il problema è che non sempre è possibile moltiplicare A per l'identità dello stesso ordine sia a destra che a sinistra. Questo si può ovviare considerando solamente matrici quadrate. Avremo allora che per qualunque $A \in \mathcal{M}_n$ si ottiene $AI_n = I_n A = A$.

Ora possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 1.5.24. Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n$ è detta invertibile se esiste $A' \in \mathcal{M}_n$ tale che

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I_n.$$

Si verifica facilmente che, data una matrice invertibile $A \in \mathcal{M}_n$, esiste un'unica $A' \in \mathcal{M}_n$ che soddisfa le condizioni di cui sopra. Infatti se esistesse $A'' \in \mathcal{M}_n$ che soddisfa le stesse condizioni, moltiplicando per A'' il primo e il secondo membro di $A \cdot A' = I_n$ (attenzione perché il prodotto non è commutativo) si avrebbe:

$$A''(A \cdot A') = A''I_n = A''.$$

Ma per l'associatività e per le relazioni che soddisfa A'' abbiamo

$$A''(A \cdot A') = (A''A)A' = I_n A' = A'$$

e quindi si ha $A' = A''$.

La matrice A' verrà chiamata l'*inversa* di A e indicata semplicemente con A^{-1} .

Ancora non abbiamo i mezzi necessari per poter dare una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice sia invertibile, però possiamo dimostrare le seguenti proprietà:

Proposizione 1.5.25. Se $A \in \mathcal{M}_n$ è invertibile, allora A^{-1} è invertibile e la sua inversa è A . Se $A, B \in \mathcal{M}_n$ sono invertibili, allora AB è invertibile e la sua inversa è $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Dimostrazione. Dato che A è invertibile si ha $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$ e quindi anche A' è invertibile. Se A e B sono invertibili, allora esistono A^{-1} e B^{-1} e dunque possiamo costruire la matrice $B^{-1} \cdot A^{-1}$. Per dimostrare che $B^{-1} \cdot A^{-1}$ è l'inversa di AB basta verificare che $(B^{-1} \cdot A^{-1})(AB) = (AB)B^{-1} \cdot A^{-1} = I_n$. Per la proprietà associativa e per le proprietà di I_n si ha:

$$(B^{-1} \cdot A^{-1})(AB) = B^{-1} \cdot (A^{-1}A)B = B^{-1}(I_n B) = B^{-1}B = I_n.$$

Allo stesso modo si verifica che $(AB)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = I_n$. □

Esempio 1.5.26. La matrice nulla O_n non è invertibile. Infatti, se lo fosse e A fosse la sua inversa, si avrebbe $A \cdot O_n = I_n$, ma $A \cdot O_n = O_n \neq I_n$ e questo è assurdo.

Esempio 1.5.27. La matrice I_n è invertibile e la sua inversa è se stessa.

Esempio 1.5.28. Utilizzando la definizione si verifica facilmente che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e la sua inversa è $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'insieme delle matrici invertibili di ordine n verrà denotato con $GL(n, \mathbb{R})$ o anche $GL_n(\mathbb{R})$ ed è chiamato *gruppo lineare*. In effetti la moltiplicazione tra matrici induce una moltiplicazione in $GL(n, \mathbb{R})$ per la Proposizione 1.5.25 e rispetto a tale prodotto $GL(n, \mathbb{R})$ è quello che si chiama un *gruppo non abeliano* (tranne nel caso in cui $n = 1$ dove si riduce al gruppo moltiplicativo dei reali non nulli).³

Matrici ortogonali

In geometria e non solo, hanno un ruolo importante le matrici definite come segue:

Definizione 1.5.29. Una matrice ad entrate reali A (necessariamente quadrata) è detta matrice ortogonale se si ha

$$A^t A = A A^t = I.$$

Per definizione una matrice ortogonale è invertibile ed ha come inversa la sua trasposta. L'insieme delle matrici ortogonali di ordine n verrà indicato con $O(n, \mathbb{R})$ ed è chiamato *gruppo ortogonale*. Si dimostra che anche $O(n, \mathbb{R})$ è un gruppo (si veda l'Esercizio 8).

Esempio 1.5.30. La matrice identità di qualunque ordine è ortogonale.

Esempio 1.5.31. Per ogni numero reale θ , le seguenti matrici quadrate di ordine 2 sono ortogonali:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

È possibile dimostrare che le matrici dell'esempio precedente esauriscono tutte le possibili matrici ortogonali di ordine 2.

³In algebra, per *gruppo* si intende un insieme G , munito di una operazione di moltiplicazione $\cdot : G \times G \rightarrow G$ che soddisfa i seguenti assiomi:

- (i) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ per ogni $a, b, c \in G$
- (ii) esiste $e \in G$ tale che $a \cdot e = e \cdot a = a$ per ogni $a \in G$
- (iii) per ogni $a \in G$ esiste $a' \in G$ tale che $a \cdot a' = a' \cdot a = e$

Un gruppo si dice *abeliano* se vale inoltre la proprietà commutativa: $a \cdot b = b \cdot a$ per ogni $a, b \in G$

Esempio 1.5.32. La seguente matrice quadrata di ordine 3 è ortogonale:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Esercizi conclusivi

1. Si completi la dimostrazione delle Proposizioni 1.5.6 e 1.5.7.
2. Si completi la dimostrazione della Proposizione 1.5.12.
3. Si scrivano i seguenti sistemi lineari nelle forme matriciali viste:

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \\ & \bullet \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ 4x_1 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 9x_4 = 18 \end{cases} \\ & \bullet \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

4. Si dimostri che $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, si ha $A \times I_n = A$ e $I_m \times A = A$.
5. Si dimostri che $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, si ha $A \times O_{n \times k} = O_{m \times k}$ e $O_{k \times m} \times A = O_{k \times n}$.
6. Si dimostrino le seguenti proprietà della trasposta di una matrice:
 - $(AB)^t = B^t \cdot A^t$, $(A + B)^t = A^t + B^t$, $(\lambda A)^t = \lambda(A^t)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $(A^t)^t = A$, $I_n^t = I_n$;
 - se A è invertibile, allora $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ (sugg: si calcoli la trasposta di $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$).
7. Si dimostrino le seguenti proprietà della traccia di una matrice quadrata:
 - $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, $\text{tr}(A + B) = \text{tr}A + \text{tr}B$, $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}A$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $\text{tr} I_n = n$;

- se B è invertibile $\text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(A)$ (sugg: si utilizzi la proprietà precedente e la definizione di inversa).
8. Utilizzando l'Esercizio 6, si dimostri che l'inversa di una matrice ortogonale è ortogonale e che il prodotto di due matrici ortogonali sono ancora ortogonali.
 9. Si dimostri che ogni matrice quadrata di ordine 2 si scrive come una delle matrici dell'Esempio 1.5.31.
 10. Date le seguenti matrici,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
 - si calcoli $2A + 3B - C$,
 - si calcoli $A^t - B^t + 2C^t$,
 - si determini la matrice $D = (d_{ij})$ tale che $D - A + B - C = O$, dove O è la matrice nulla.

11. Date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
 Si dica se esistono λ_1 e λ_2 tali che $\sum_{i=1}^2 \lambda_i A_i = I$, dove I è la matrice identità di ordine 3.
 Posto $A_3 = {}^t A_1$ e $A_4 = {}^t A_2$, si trovino le soluzioni del sistema $\sum_{i=1}^4 \lambda_i A_i = I$.

12. Si calcoli il prodotto $B \cdot A_1$, dove B e A_1 sono le matrici indicate nei due precedenti esercizi.
13. Si dimostri che se è possibile eseguire la somma $A + A^t$, allora la matrice A deve essere quadrata.
14. Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

verificare che le due matrici AA^t e A^tA sono simmetriche. È vero, più in generale, che, per ogni $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, le due matrici AA^t e A^tA sono simmetriche? È vero che, per ogni $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AA^t = A^tA$?

15. Si descrivano tutte le matrici quadrate di ordine 2 e antisimmetriche.
16. Sia I la matrice identità di ordine 3. Si calcoli $\sum_{k=1}^4 kI$. Si calcoli più in generale $\sum_{k=1}^n kI$.
17. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si trovi una matrice quadrata X tale che $AX = I_2$
18. Siano A e B due matrici simmetriche. Dimostrare che AB è simmetrica se e solo se $AB = BA$