

Sottospazi vettoriali

Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ è naturale chiedersi se un suo sottoinsieme W sia uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di V ristrette a W . Questa considerazione porta alla seguente definizione.

Definizione 1.5.62. *Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Un sottoinsieme non vuoto W di V si dice sottospazio vettoriale di V se accade che*

1. $\forall \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ si ha $\mathbf{w} + \mathbf{w}' \in W$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall \mathbf{w} \in W$ si ha $\lambda \cdot \mathbf{w} \in W$

Osservazione 1.5.63. *La definizione precedente è equivalente a richiedere che per $\forall \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ e $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ si abbia*

$$\lambda \mathbf{w} + \lambda' \mathbf{w}' \in W. \quad (1.15)$$

Infatti, se (1.15) è soddisfatta, allora essa vale in particolare per $\lambda = \lambda' = 1$, da cui si ottiene che $\forall \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ si ha $\mathbf{w} + \mathbf{w}' \in W$, e per $\lambda' = 0$, da cui si deduce che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall \mathbf{w} \in W$ si ha $\lambda \cdot \mathbf{w} \in W$. Viceversa, dati arbitrari $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ e $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, dalla seconda condizione della Definizione 1.5.62 si ha che $\lambda \cdot \mathbf{w} \in W$ e $\lambda' \cdot \mathbf{w}' \in W$, e quindi, dalla prima condizione, $\lambda \mathbf{w} + \lambda' \mathbf{w}' \in W$.

Si osservi che se W è un sottospazio vettoriale di V , allora il vettore nullo $\mathbf{0}$ di V appartiene anche a W . Infatti, essendo W non vuoto, esiste almeno un $\mathbf{w} \in W$. Allora anche $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{w} \in W$ (abbiamo applicato la seconda condizione della definizione di sottospazio vettoriale). Allo stesso modo si dimostra che il vettore opposto di ogni vettore di W sta ancora in W .

La seguente proposizione offre una ulteriore definizione equivalente di sottospazio vettoriale.

Proposizione 1.5.64. *Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se la restrizione delle operazioni $+$ e \cdot a W inducono su W una struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} .*

Dimostrazione. Se W è sottospazio vettoriale di V , l'immagine delle applicazioni $+|_{W \times W}$ e $\cdot|_{\mathbb{R} \times W}$ è contenuta in W . Viene lasciata al lettore la verifica degli assiomi. Viceversa, se W , munito delle operazioni $+|_{W \times W} : W \times W \rightarrow W$ e $\cdot|_{\mathbb{R} \times W} : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ ereditate da V , è uno spazio vettoriale, allora W è non vuoto poichè $\mathbf{0} \in W$. Inoltre per ogni $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$

$$\mathbf{w} + \mathbf{w}' = \mathbf{w} + |_{W \times W} \mathbf{w}' \in W.$$

Analogamente, per ogni $\mathbf{w} \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda \cdot \mathbf{w} \in W$. □

Esempio 1.5.65. Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale. L'insieme $\{\mathbf{0}\}$ costituito dal solo vettore nullo di V è un sottospazio vettoriale di V .

Esempio 1.5.66. Si consideri lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n ad entrate in \mathbb{R} ed il suo sottoinsieme W costituito dalle matrici simmetriche. Verifichiamo che W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Infatti, se A e B sono due qualsiasi matrici simmetriche e λ e μ sono due qualsiasi scalari, si ha che

$$(\lambda A + \mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t = \lambda A + \mu B$$

e quindi $\lambda A + \mu B \in W$.

Esempio 1.5.67. Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incongnite

$$AX = O,$$

dove $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $O \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$ denota la matrice con un'unica colonna le cui entrate sono tutte nulle. Sia S l'insieme di tutte le soluzioni del sistema, vale a dire

$$S = \{X_0 \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}) : AX_0 = O\}.$$

Dimostriamo che S è un suo sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ (quest'ultimo è identificabile con \mathbb{R}^n). Infatti, se X_0 e Y_0 sono due qualsiasi soluzioni del sistema e λ e μ sono due qualsiasi numeri reali, allora anche $\lambda X_0 + \mu Y_0$ è soluzione del sistema, in quanto $A(\lambda X_0 + \mu Y_0) = \lambda AX_0 + \mu AY_0 = O + O = O$.

Esempio 1.5.68. Consideriamo l'insieme delle funzioni continue $C(a, b)$ sull'intervallo (a, b) . Definiamo una struttura di spazio vettoriale reale su $C(a, b)$ come segue. Definiamo una operazione di somma

$$+ : C(a, b) \times C(a, b) \rightarrow C(a, b)$$

ponendo, per ogni $f, g \in C(a, b)$, $f + g$ la funzione data da $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$. Definiamo inoltre una operazione di prodotto per un numero reale

$$\cdot : \mathbb{R} \times C(a, b) \longrightarrow C(a, b)$$

ponendo, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $f \in C(a, b)$, $\lambda \cdot f$ la funzione data da $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$. Si lascia al lettore la verifica degli 8 assiomi di spazio vettoriale. Ora, consideriamo il sottoinsieme W di $C(a, b)$ costituito da tutte le funzioni costanti sull'intervallo (a, b) . Poiché la somma di funzioni costanti è ancora una funzione costante e il prodotto di un numero reale per una funzione costante è a sua volta una funzione costante, W è un sottospazio vettoriale di $C(a, b)$.

1.6 Somma e intersezione di sottospazi vettoriali

In questo paragrafo vedremo alcuni importanti sottospazi vettoriali costruiti a partire da sottospazi dati. Innanzitutto vediamo la seguente

Proposizione 1.6.1. *Dati due sottospazi W_1 e W_2 di uno spazio vettoriale V , la loro intersezione è un sottospazio vettoriale.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in W_1 \cap W_2$ e $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, allora $\lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda' \cdot \mathbf{v}'$ appartiene sia a W_1 che a W_2 poiché essi sono sottospazi vettoriali e quindi $\lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda' \cdot \mathbf{v}' \in W_1 \cap W_2$. \square

In generale l'unione di due sottospazi vettoriali non è un sottospazio vettoriale. Per rendersi conto di questo fatto si consideri il seguente esempio:

Esempio 1.6.2. *Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate e siano*

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Gli insiemi W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (verificarlo!), ma non la loro unione. Infatti le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartengono a $W_1 \cup W_2$, mentre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2.$$

Si noti che l'unione $A \cup B$ di due insiemi A e B è il più piccolo insieme che contiene A e B . Dal punto di vista degli spazi vettoriali, ha quindi senso chiedersi: dati due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 di V , qual è “il più piccolo” sottospazio vettoriale che contiene W_1 e W_2 (cioè che contiene $W_1 \cup W_2$)? I tentativi di rispondere a questa domanda hanno portato alla seguente definizione.

Definizione 1.6.3. *Dati due sottospazi W_1, W_2 di uno spazio vettoriale V , la somma di W_1 e W_2 è il seguente insieme:*

$$W_1 + W_2 = \{ \mathbf{v} \in V : \exists \mathbf{w}_1 \in W_1, \exists \mathbf{w}_2 \in W_2 \text{ tali che } \mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \}.$$

Proposizione 1.6.4. *Siano W_1 e W_2 sottospazi vettoriali di V . Allora la somma $W_1 + W_2$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene $W_1 \cup W_2$, nel senso che se W è un altro sottospazio vettoriale di V che contiene $W_1 \cup W_2$, allora $W_1 + W_2 \subseteq W$*

Dimostrazione. Innanzitutto dimostriamo che $W_1 + W_2$ è un sottospazio vettoriale. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in W_1 + W_2$. Per definizione di somma, avremo quindi $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ e $\mathbf{v}' = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2$, per qualche $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}'_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2 \in W_2$. Dati due scalari qualunque $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\lambda \mathbf{v} + \lambda' \mathbf{v}' = \lambda(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) + \lambda'(\mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2) = (\lambda \mathbf{w}_1 + \lambda' \mathbf{w}'_1) + (\lambda \mathbf{w}_2 + \lambda' \mathbf{w}'_2) \in W_1 + W_2,$$

siccome $\lambda \mathbf{w}_1 + \lambda' \mathbf{w}'_1 \in W_1$ e $\lambda \mathbf{w}_2 + \lambda' \mathbf{w}'_2 \in W_2$, essendo W_1 e W_2 sottospazi vettoriali.

Inoltre $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$. Infatti, qualsiasi $\mathbf{w}_1 \in W_1$ si può scrivere come

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$$

(qui stiamo usando il fatto che $\mathbf{0} \in W_2$, essendo W_2 un sottospazio vettoriale). Di conseguenza $W_1 \subseteq W_1 + W_2$. Analogamente si dimostra che $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

Veniamo all'ultima parte dell'enunciato. Sia W un qualsiasi altro sottospazio vettoriale di V contenente $W_1 \cup W_2$. Dimostriamo che $W_1 + W_2 \subseteq W$. Prendiamo un arbitrario elemento $\mathbf{v} \in W_1 + W_2$. Allora esistono $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tali che $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Si noti che $\mathbf{w}_1 \in W_1 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W$. Di conseguenza, dato che W è un sottospazio vettoriale, $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$. Questo dimostra che $W_1 + W_2 \subseteq W$. \square

Definizione 1.6.5. *La somma di due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 si dice diretta e si denoterà $W_1 \oplus W_2$, se $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.*

Vale la seguente caratterizzazione:

Proposizione 1.6.6. *La somma $W_1 + W_2$ di due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 di V è diretta se e solo se ogni vettore $\mathbf{v} \in W_1 + W_2$ si scrive in modo unico come $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, dove $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$.*

Dimostrazione. Se la somma $W_1 + W_2$ è diretta e $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2$ allora si ha:

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$$

e quindi $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$, che implica $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}'_1$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}'_2$ e quindi la decomposizione è unica.

Viceversa supponiamo che ogni vettore di $W_1 + W_2$ si scriva in modo unico come somma di un vettore di W_1 e di un vettore di W_2 . Sia $\mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ e dimostriamo che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ebbene,

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0}.$$

Abbiamo dunque trovato due decomposizioni di \mathbf{v} come somma di un vettore di W_1 e di uno di W_2 . Per l'unicità della decomposizione (la nostra ipotesi) si deve allora avere $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. \square

1.7 Sistemi di generatori

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale. Diamo la seguente

Definizione 1.7.1. *Dati n vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ ed n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, chiameremo combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ di coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, il vettore*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i := \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n.$$

Utilizzando le combinazioni lineari, è possibile costruire un sottospazio vettoriale a partire da qualunque sottoinsieme di V . Più precisamente diamo la seguente definizione:

Definizione 1.7.2. *Dato un sottoinsieme X dello spazio vettoriale V , la chiusura lineare di X è l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di vettori di X , cioè*

$$L(X) = \left\{ \mathbf{v} \in V : \exists n \in \mathbb{N}, \exists \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in X, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \right\}$$

Per convenzione si pone $L(\emptyset) := \{\mathbf{0}\}$

Se $X = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \subseteq V$ è un insieme finito di vettori di V , solitamente si usa la seguente notazione

$$L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) := L(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}).$$

La seguente proposizione è lasciata come esercizio:

Proposizione 1.7.3. *Siano X, Y due sottoinsiemi di uno spazio vettoriale V , tali che $X \subseteq Y$. Allora si ha $L(X) \subseteq L(Y)$.*

Esempio 1.7.4. *Consideriamo lo spazio vettoriale reale \mathbb{R}^3 delle terne ordinate di numeri reali, con le usuali operazioni di somma e di prodotto per uno scalare reale. Cerchiamo di capire cosa è la chiusura lineare $L(\mathbf{v}_0)$ di un dato vettore $\mathbf{v} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Usando la definizione, si ha che*

$$L(\mathbf{v}) = \{\lambda \mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi $L(\mathbf{v})$ è l'insieme dei vettori proporzionali a \mathbf{v} e geometricamente rappresenta una retta passante per l'origine. Per esempio, se $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, il lettore potrà riconoscere in $L(1, 0, 0) = \{\lambda(1, 0, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 0, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ quella retta che a scuola viene comunemente chiamata “asse x ” (o “asse delle ascisse”).

Ora cerchiamo di capire cosa è la chiusura lineare $L(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ di due dati vettori $\mathbf{v} = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{v}' = (x'_0, y'_0, z'_0) \in \mathbb{R}^3$. Ebbene, sempre usando la definizione di chiusura lineare, si ha

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &= \{\lambda \mathbf{v} + \lambda' \mathbf{v}' : \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda x_0 + \lambda' x'_0, \lambda y_0 + \lambda' y'_0, \lambda z_0 + \lambda' z'_0) : \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Se per esempio $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{v}' = (0, 1, 0)$, dall'uguaglianza precedente si ha subito che $L((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \{(\lambda, \lambda', 0) : \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}\}$, che geometricamente rappresenta un piano (spesso chiamato “piano xy ”).

La chiusura lineare è un sottospazio vettoriale e tra tutti gli spazi vettoriali che contengono X è il più piccolo possibile, ossia tale che ogni sottospazio che contiene X deve contenere anche $L(X)$:

Proposizione 1.7.5. *La chiusura lineare di un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale V è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente X .*

Dimostrazione. Se $X = \emptyset$, per convenzione abbiamo posto $L(X) = \{\mathbf{0}\}$ e quindi in questo caso $L(X)$ è un sottospazio vettoriale ed è contenuto in qualunque sottospazio vettoriale.

Possiamo allora supporre che X sia non vuoto. Mostriamo innanzitutto che $L(X)$ è un sottospazio vettoriale di V . Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in L(X)$ e $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. Poiché \mathbf{v} e \mathbf{v}' appartengono alla chiusura lineare di X , essi si potranno scrivere come combinazione lineare di elementi di X e quindi avremo

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v}' = \sum_{j=1}^h \alpha'_j \mathbf{v}'_j$$

per qualche $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_h \in X$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda'_1, \dots, \lambda'_h \in \mathbb{R}$. Dobbiamo dimostrare che il vettore $\lambda \mathbf{v} + \lambda' \mathbf{v}'$ appartiene anch'esso a $L(X)$. Ebbene,

$$\lambda \mathbf{v} + \lambda' \mathbf{v}' = \lambda \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i + \lambda' \sum_{j=1}^h \alpha'_j \mathbf{v}'_j = \sum_{i=1}^k (\lambda \alpha_i) \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^h (\lambda' \alpha'_j) \mathbf{v}'_j$$

che è ancora una combinazione lineare di elementi di X .

Per dimostrare che $L(X)$ è il più piccolo sottospazio contenente X , consideriamo un qualsiasi sottospazio vettoriale W tale che $X \subseteq W$ e sia $\mathbf{v} \in L(X)$. Vogliamo dimostrare che $\mathbf{v} \in W$. Dato che $\mathbf{v} \in L(X)$, esistono dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in X$ e degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i$. Ma $X \subseteq W$ e quindi i vettori \mathbf{v}_i appartengono a W . Poiché W è un sottospazio vettoriale, una combinazione lineare di vettori di W appartiene ancora a W e quindi $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v} \in W$. Questo significa che $L(X) \subseteq W$. \square

Alla luce di quanto abbiamo appena dimostrato, la Proposizione 1.6.4 riguardante il sottospazio somma può essere riscritta nel modo seguente:

Corollario 1.7.6. *Siano W_1 e W_2 sottospazi vettoriali di V . Allora $W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2)$.*

Osservazione 1.7.7. *Tenendo conto della Proposizione 1.7.5, si ha subito che un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale se e solo se $X = L(X)$.*

Diamo ora la seguente importante definizione.

Definizione 1.7.8. *Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale V è detto sistema di generatori se $L(X) = V$.*

Cerchiamo di capire il significato di questa definizione. Dato che si ha sempre $L(X) \subseteq V$, si avrà $L(X) = V$ se e solo se accade che $V \subseteq L(X)$, cioè ogni vettore di V appartiene anche a $L(X)$. Quindi X è un sistema di generatori per V se e solo se ciascun vettore di V può essere scritto come

combinazione lineare di vettori di X , cioè per ogni $\mathbf{v} \in V$ esistono $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in X$ ed esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k$.

Ogni spazio vettoriale V ammette sempre un sistema di generatori: se stesso. Infatti si ha $L(V) = V$. Il caso non banale è riuscire a trovare sistemi di generatori X “più piccoli” di V . Di particolare interesse è la situazione in cui X è un insieme finito:

Definizione 1.7.9. *Uno spazio vettoriale V è detto finitamente generato se esiste un numero finito di vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ tali che $V = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$. I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ si chiamano generatori di V .*

In altre parole, V è uno spazio vettoriale finitamente generato se esistono $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$ tali che ogni $\mathbf{v} \in V$ possa esprimersi come loro combinazione lineare, cioè esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m$.

Vediamo di seguito un esempio di spazio vettoriale finitamente generato ed uno di spazio vettoriale che non è finitamente generato.

Esempio 1.7.10. *Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{R}^2 delle coppie ordinate di numeri reali, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare reale, e consideriamo i seguenti tre vettori di tale spazio vettoriale: $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 2)$. Ebbene, dimostriamo che $\mathbb{R}^2 = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Questo dimostrerà che \mathbb{R}^2 è finitamente generato. A tal fine, prendiamo un qualsiasi vettore $\mathbf{v} = (x, y)$ di \mathbb{R}^2 e cerchiamo di esprimerlo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, cioè cerchiamo degli scalari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3,$$

vale a dire

$$(x, y) = \lambda_1(1, 2) + \lambda_2(1, -1) + \lambda_3(0, 2).$$

L'uguaglianza precedente è equivalente al sistema nelle due incognite λ_1 e λ_2

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = x \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 & = y \end{cases}$$

Una soluzione di questo sistema è per esempio data da $\lambda_1 = x - 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}(y - 2x + 3)$. Si noti che questa non è l'unica soluzione del sistema (per esempio, anche $\lambda_1 = \frac{1}{3}(x + y)$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}(2x - y)$, $\lambda_3 = 0$ è soluzione), ma a noi interessa solo che esista (almeno) una soluzione, non che questa sia unica. In conclusione, abbiamo dimostrato che

$$\mathbf{v} = (x - 1)\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \frac{y - 2x + 3}{2}\mathbf{v}_3$$

e questo prova che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono generatori di \mathbb{R}^2 .

È bene osservare che in linea di principio è possibile trovare altri generatori per lo stesso spazio vettoriale, anche di numero diverso. Per esempio, il lettore potrà verificare che $\mathbb{R}^2 = L((2, -1), (1, 1))$. Vedremo in seguito che in effetti, per lo spazio vettoriale \mathbb{R}^2 non è possibile scendere al di sotto di 2 generatori.

Esempio 1.7.11. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi ad entrate reali. Dimostriamo che $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato. Supponiamo per assurdo che lo sia. Allora esistono $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{R}[x]$ tali che $\mathbb{R}[x] = L(p_1, p_2, \dots, p_m)$. Per ogni $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, denotiamo con $\deg(p_i)$ il grado del polinomio p_i e poniamo

$$N := \max \{ \deg(p_1), \deg(p_2), \dots, \deg(p_m) \}.$$

Consideriamo ora un qualsiasi polinomio p di grado maggiore di N . Dato che stiamo supponendo che $\mathbb{R}[x] = L(p_1, p_2, \dots, p_m)$, devono esistere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_m p_m$$

Ne deduciamo che

$$\begin{aligned} \deg(p) &= \deg(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_m p_m) \\ &\leq \max \{ \deg(p_1), \deg(p_2), \dots, \deg(p_m) \} = N, \end{aligned}$$

in contraddizione col fatto che $\deg(p) > N$. L'assurdo è dipeso dall'aver erroneamente supposto che $\mathbb{R}[x]$ fosse finitamente generato.

1.8 Dipendenza lineare

Introduciamo ora un concetto collegato a quello di generatori.

Definizione 1.8.1. Sia V uno spazio vettoriale. I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ si dicono linearmente dipendenti se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

In caso contrario saranno detti linearmente indipendenti.

Cerchiamo di capire il significato della definizione (è forse la definizione più importante del corso!). La parte cruciale sta nelle parole *non tutti nulli*. Infatti, se prendiamo $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, allora chiaramente $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Il caso non banale è quando è possibile trovare una n -pla $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tale che $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

Per esempio, i vettori dello spazio vettoriale \mathbb{R}^2 $\mathbf{v}_1 = (1, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 1)$ sono linearmente dipendenti, perchè esistono scalari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Infatti basta prendere $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 8$ e verificare che effettivamente

$$5 \cdot (1, -2) + 1 \cdot (3, 2) + 8 \cdot (-1, 1) = (0, 0)$$

I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ di questo esempio sono invece linearmente indipendenti. Infatti consideriamo una combinazione lineare $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, vale a dire

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

cioè

$$\lambda_1(1, -2) + \lambda_2(3, 2) = (0, 0).$$

Sviluppando la precedente uguaglianza si ottiene

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2, -2\lambda_1 + 2\lambda_2) = (0, 0)$$

cioè

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Come facilmente il lettore potrà verificare, si tratta di un sistema di Cramer, che quindi ammette come unica soluzione $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$. Questo prova che non possono esistere scalari $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ tali che $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, e quindi i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti.

Osservazione 1.8.2. *Quand'è che n vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ sono linearmente indipendenti? In base alla definizione, quando essi non sono linearmente dipendenti, cioè quando per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

necessariamente si abbia che $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Applichiamo la definizione al caso in cui il nostro insieme di vettori sia ridotto al solo vettore $\mathbf{v} \in V$. Tale vettore è linearmente indipendente se e solo se dall'uguaglianza $\lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ segue che $\lambda = 0$. Ma sappiamo che ciò è vero se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Ne concludiamo che un vettore $\mathbf{v} \in V$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (equivalentemente: \mathbf{v} è linearmente dipendente se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$).

Vediamo ora un criterio per capire se $n \geq 2$ vettori sono linearmente dipendenti.

Proposizione 1.8.3. *I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ ($n \geq 2$) sono linearmente dipendenti se e solo se uno dei vettori è combinazione lineare dei rimanenti.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ linearmente dipendenti. Allora esistono degli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}. \quad (1.16)$$

Poichè $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$, esiste almeno un $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\lambda_i \neq 0$. Ora la combinazione lineare (1.16) può essere riscritta nel modo seguente

$$\lambda_i \mathbf{v}_i = -\lambda_1 \mathbf{v}_1 - \dots - \lambda_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} - \lambda_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} - \dots - \lambda_n \mathbf{v}_n.$$

Dato che $\lambda_i \neq 0$, moltiplicando ambo i membri per $\lambda_i^{-1} = \frac{1}{\lambda_i}$ si ottiene

$$\mathbf{v}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \mathbf{v}_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \mathbf{v}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \mathbf{v}_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \mathbf{v}_n.$$

Siamo dunque riusciti ad esprimere il vettore \mathbf{v}_i come combinazione lineare dei rimanenti vettori. Viceversa supponiamo che esista $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\mathbf{v}_i \in L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$. Questo significa che esistono scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{v}_i = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + \lambda_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n.$$

Dalla precedente uguaglianza segue che

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_i \mathbf{v}_{i-1} - 1 \mathbf{v}_i + \lambda_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n,$$

che è una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ con i coefficienti non tutti nulli (infatti l' i -esimo coefficiente è $-1 \neq 0$). \square

Proposizione 1.8.4. *Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ vettori linearmente indipendenti e sia \mathbf{v} un vettore di V tale che $\mathbf{v} \notin L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Allora anche $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Sia

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n + \lambda \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (1.17)$$

Vogliamo dimostrare che $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda = 0$. Se per assurdo $\lambda \neq 0$ dalla (1.17) seguirebbe che

$$\mathbf{v} = -\frac{\lambda_1}{\lambda} \mathbf{v}_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} \mathbf{v}_n$$

in contraddizione col fatto che $\mathbf{v} \notin L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Quindi l'unica possibilità è che $\lambda = 0$. Di conseguenza l'uguaglianza (1.17) diventa

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Ma siccome $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, segue che $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. \square

Proposizione 1.8.5. *Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ vettori linearmente dipendenti. Allora, per ogni $\mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{n+k} \in V$ anche i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{n+k}$ sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Essendo $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linearmente dipendenti, esistono scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tutti uguali a 0 tali che

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Poichè $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\lambda_i \neq 0$. Allora anche la combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{n+k}$

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_i \mathbf{v}_i + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n + 0\mathbf{v}_{n+1} + \dots + 0\mathbf{v}_{n+k} = \mathbf{0}$$

è uguale al vettore nullo e non tutti i coefficienti sono nulli (infatti $\lambda_i \neq 0$). \square

Proposizione 1.8.6. *Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{n+k} \in V$ vettori linearmente indipendenti. Allora anche $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Consideriamo una qualsiasi combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ e uguagliamola al vettore nullo

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{1.18}$$

Vogliamo dimostrare che l'unica possibilità è che si abbia $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Dalla uguaglianza (1.18) segue che

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n + 0\mathbf{v}_{n+1} + \dots + 0\mathbf{v}_{n+k} = \mathbf{0}, \tag{1.19}$$

La (1.19) è una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_{n+k}$ uguagliata al vettore nullo. Poichè tali vettori sono, per ipotesi, linearmente indipendenti, necessariamente i coefficienti della combinazione lineare sono uguali a 0 e quindi $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, che è quello che volevamo dimostrare. \square

Si noti che se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti (rispettivamente, indipendenti), anche $\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}$ sono linearmente dipendenti (rispettivamente, indipendenti), in quanto la definizione di lineare dipendenza (rispettivamente, indipendenza) non dipende dall'*ordine* con cui vengono enumerati i vettori. Questa considerazione ci permette di riformulare la precedente proposizione in una forma leggermente più generale:

Proposizione 1.8.7. *Sia $X := \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti. Allora ogni sottoinsieme $X' \subseteq X$ è formato da vettori linearmente indipendenti.*

La definizione di vettori linearmente indipendenti può essere generalizzata a insiemi qualunque nel modo seguente.

Definizione 1.8.8. *Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale V è detto linearmente dipendente se esistono dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in X$ che sono linearmente dipendenti. Altrimenti sarà detto linearmente indipendente.*

Osservazione 1.8.9. *Dalla definizione segue che X è linearmente indipendente se per ogni $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in X$ questi sono linearmente indipendenti. In particolare, l'insieme vuoto \emptyset è banalmente linearmente indipendente.*

1.9 Basi

Veniamo finalmente alla vera ragione per la quale abbiamo introdotto i concetti di vettori linearmente indipendenti e di generatori.

Definizione 1.9.1. *Un sottoinsieme B di uno spazio vettoriale V è detto base se sono verificate le seguenti condizioni:*

1. $L(B) = V$, cioè B è un sistema di generatori;
2. B è linearmente indipendente.

Ecco alcuni esempi di basi di alcuni spazi vettoriali:

Esempio 1.9.2. *Una base dello spazio vettoriale \mathbb{R}^n è data dall'insieme di vettori $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, dove \mathbf{e}_i denota la n -upla di \mathbb{R}^n tale che la i -esima componente è 1, mentre tutte le altre sono nulle:*

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 := (0, 1, \dots, 0), \quad \dots \quad \mathbf{e}_n := (0, 0, \dots, 1)$$

Verifichiamo che si tratta veramente di una base. Infatti che $L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \mathbb{R}^n$ segue dal fatto che per ogni vettore $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ nel modo seguente

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

Infine verifichiamo che $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ sono linearmente indipendenti. Sia

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

una loro combinazione lineare uguale al vettore nullo. Sviluppando la precedente uguaglianza si ottiene

$$(\lambda_1, 0, \dots, 0) + (0, \lambda_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

da cui

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

che è proprio quello che volevamo dimostrare.

Questa base viene comunemente chiamata base canonica di \mathbb{R}^n .

Esempio 1.9.3. Una base dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ delle matrici con m righe e n colonne con entrate in \mathbb{R} è data dall'insieme delle matrici $\{E_{hk}\}$ definite nel modo seguente

$$[E_{hk}]_{ij} = \delta_{ih}\delta_{jk}.$$

Quindi ciascuna matrice $\{E_{hk}\}$ ha entrate tutte nulle tranne quella della h -esima riga, k -esima colonna che vale 1. Questa base è composta da $m \cdot n$ vettori. La verifica che $\{E_{hk}\}$ è una base di $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ è simile a quanto fatto nell'esempio precedente e lasciato al lettore.

Esempio 1.9.4. Una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi nella variabile x è data dall'insieme di tutti i monomi

$$B = \{p_0, p_1, p_2, p_3, \dots\}$$

dove $p_0 := 1$, $p_1 := x$, $p_2 := x^2$ e, più in generale, $p_i := x^i$ per ciascun $i \in \mathbb{N}$. Verifichiamo che $L(B) = \mathbb{R}[x]$. Infatti, sia $p \in \mathbb{R}[x]$. Allora esistono $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

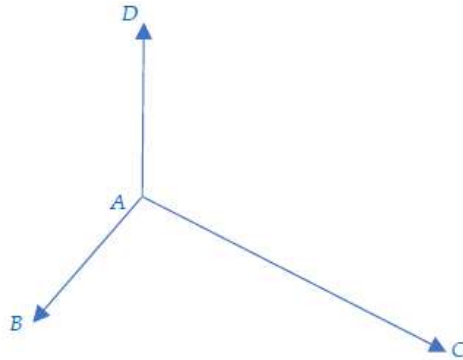


Figura 1.11: Una base di \mathcal{V}_3

Allora

$$p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n.$$

Inoltre B è linearmente indipendente. Infatti siano $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$ qualsiasi vettori di B e supponiamo che

$$\lambda_1p_{i_1} + \lambda_2p_{i_2} + \cdots + \lambda_kp_{i_k} = \mathbf{0},$$

cioè

$$\lambda_1x^{i_1} + \lambda_2x^{i_2} + \cdots + \lambda_kx^{i_k} = 0.$$

Poichè, per definizione, un polinomio è nullo se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli, si ha che $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

$\mathbb{R}[x]$ è dunque uno spazio vettoriale che ammette una base infinita.

Esempio 1.9.5. Denotiamo con \mathcal{V}_3 lo spazio vettoriale dei vettori liberi dello spazio. Prendiamo quattro punti dello spazio A, B, C, D non appartenenti ad uno stesso piano e tali che siano a tre a tre non allineati. Consideriamo i tre segmenti orientati $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ (come caso particolare, i punti A, B, C, D possono essere scelti in modo tale che i segmenti orientati $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ siano ortogonali tra loro). Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i vettori geometrici rappresentati nel punto A da, rispettivamente, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ (si veda Figura 1.9). Si lascia al lettore dimostrare che $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ costituisce una base di \mathcal{V}_3 .

Come vedremo meglio più avanti, il concetto di base risulta fondamentale nello studio degli spazi vettoriali e delle strutture matematiche ad essi associati. Per questa ragione, una domanda naturale che ci si pone è se è sempre

possibile trovare una base di un qualsiasi spazio vettoriale. I risultati che seguono sono tutti indirizzati a rispondere a questa domanda. Cominciamo con un piccolo lemma che useremo spesso.

Lemma 1.9.6. *Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ arbitrari vettori dello spazio vettoriale V . Allora*

$$L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}) \iff \mathbf{v}_{n+1} \in L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Dimostrazione. Se $L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1})$, allora $\mathbf{v}_{n+1} = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}_n + 1 \cdot \mathbf{v}_{n+1} \in L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}) = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{v}_{n+1} \in L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Dobbiamo dimostrare che $L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}) \subset L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ (infatti l'altra inclusione è sempre vera). Sia $\mathbf{v} \in L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1})$. Allora esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}. \quad (1.20)$$

Ma poichè, per ipotesi, $\mathbf{v}_{n+1} \in L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, esistono $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{v}_{n+1} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n \quad (1.21)$$

Sostituendo la (1.21) nella (1.20) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} (\beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_{n+1} \beta_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\alpha_n + \alpha_{n+1} \beta_n) \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

e quindi $\mathbf{v} \in L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. □

Proposizione 1.9.7. *Dato un sottoinsieme finito $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ dello spazio vettoriale V , esiste $X' \subseteq X$ tale che*

(i) X' è linearmente indipendente,

(ii) $L(X') = L(X)$

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione sul numero n di vettori che compongono l'insieme X . Se $n = 1$, vale a dire $X = \{\mathbf{v}_1\}$, possiamo distinguere due possibilità: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Nel primo caso, basta prendere $X' := \emptyset$, che, come sappiamo, è linearmente indipendente, e la cui chiusura è data da $L(X') = L(\emptyset) = \{\mathbf{0}\} = L(\mathbf{0}) = L(X)$. Se, invece, $X = \{\mathbf{v}_1\}$, con $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, allora basta prendere $X' := X$. Infatti, $X' = \{\mathbf{v}_1\}$ è linearmente indipendente, perchè tale è il suo unico vettore, e da $X' = X$ chiaramente segue che $L(X') = L(X)$.

Supponiamo ora vero l'enunciato per qualsiasi sottoinsieme di V formato da n vettori, e proviamo a dimostrarlo quando X ha cardinalità $n + 1$. Se X è linearmente indipendente, come nostro X' basta prendere X stesso. Se invece X è linearmente dipendente, cioè i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti, in virtù della Proposizione 1.8.3, uno tra essi deve essere esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti, cioè esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\mathbf{v}_i \in L(X \setminus \{\mathbf{v}_i\})$. Dato che l'insieme $X'' := X \setminus \{\mathbf{v}_i\}$ ha cardinalità $(n + 1) - 1 = n$, possiamo applicare ad esso l'ipotesi induttiva: esisterà dunque un $X' \subseteq X''$ tale che X' è linearmente indipendente e $L(X') = L(X'') = L(X \setminus \{\mathbf{v}_i\}) = L(X)$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il Lemma 1.9.6. \square

Siamo ora nelle condizioni di rispondere positivamente alla domanda: esiste sempre una base in uno spazio vettoriale? Cominciamo col caso in cui lo spazio sia finitamente generato.

Teorema 1.9.8. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora V ammette una base finita.*

Dimostrazione. Essendo V finitamente generato, esistono $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ tali che $V = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Applichiamo ora la Proposizione 1.9.7 all'insieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$: esiste dunque un sottoinsieme $B \subseteq \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ linearmente indipendente e tale che $L(B) = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = V$. Quindi B è una base di V . Che B sia un insieme finito segue dal fatto di essere sottoinsieme di un insieme finito. \square

Che relazione intercorre tra il numero di generatori, il numero di vettori linearmente indipendenti e il numero di vettori che compongono una base in uno spazio vettoriale finitamente generato V ? Nel seguito cercheremo di rispondere a questa domanda. Partiamo da un risultato noto come *Lemma di Steinitz*.

Teorema 1.9.9 (Lemma di Steinitz). *Sia V uno spazio finitamente generato e siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ suoi generatori. Supponiamo che $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ siano vettori linearmente indipendenti di V . Allora $k \leq n$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $k > n$. Dato che $V = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{w}_1 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n. \quad (1.22)$$

Proviamo almeno uno tra questi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ è diverso da 0. Se infatti si avesse che $\alpha_i = 0$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, allora da (1.22) si dedurrebbe che $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$,

il che non può accadere visto che $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ sono linearmente indipendenti. Quindi deve esistere $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\alpha_i \neq 0$. Salvo riordinare $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, possiamo supporre che $\alpha_1 \neq 0$. Allora da (1.22) abbiamo che

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\alpha_1} \mathbf{w}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \mathbf{v}_n$$

e quindi

$$\mathbf{v}_1 \in L(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (1.23)$$

Dalla (1.23) e dal Lemma 1.9.6 segue che

$$V = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \subseteq L(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \subseteq V$$

da cui

$$V = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (1.24)$$

Ora consideriamo \mathbf{w}_2 . Dalla (1.24) si ha che esistono $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{w}_2 = \beta_1 \mathbf{w}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n. \quad (1.25)$$

Dimostriamo che qualcuno tra β_2, \dots, β_n deve essere diverso da 0. Infatti, se $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n = 0$, allora (1.25) diventerebbe

$$\mathbf{w}_2 = \beta_1 \mathbf{w}_1$$

che implicherebbe che $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ sono linearmente dipendenti, cosa impossibile visto che per ipotesi $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ sono linearmente indipendenti. Quindi esiste $i \in \{2, \dots, n\}$ tale che $\beta_i \neq 0$. Per fissare le idee, salvo rinumerare i vettori, possiamo assumere che $\beta_2 \neq 0$. Allora da (1.25) si ottiene

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_2} \mathbf{w}_1 + \frac{1}{\beta_2} \mathbf{w}_2 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \mathbf{v}_3 - \dots - \frac{\beta_n}{\beta_2} \mathbf{v}_n,$$

vale a dire

$$\mathbf{v}_2 \in L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (1.26)$$

La (1.26), insieme al Lemma 1.9.6, e la (1.24) implicano che

$$V = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \subseteq L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) \subseteq V$$

da cui

$$V = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

In pratica siamo partiti da $L = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$, e siamo riusciti dapprima a sostituire il vettore \mathbf{w}_1 al primo generatore \mathbf{v}_1 del sistema di generatori di partenza, ottenendo $V = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$. Poi siamo riusciti a sostituire anche

il secondo generatore, ottenendo $V = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$. Proseguendo con lo stesso procedimento per ulteriori $n - 2$ passi, si riesce così a sostituire tutti gli n generatori di partenza (si ricordi infatti che il numero k dei vettori \mathbf{w}_i è maggiore di quello dei \mathbf{v}_j), arrivando a

$$V = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n). \quad (1.27)$$

Dato che stiamo supponendo (per assurdo) che $k > n$, cioè che $k \geq n + 1$, deve esistere almeno un altro vettore \mathbf{w}_{n+1} nella lista dei vettori linearmente indipendenti $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ prevista dalle ipotesi del teorema. Ma per la (1.27) si ha che $\mathbf{w}_{n+1} \in L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$. Questo implica che i vettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_{n+1}$ sono linearmente dipendenti, il che è in contraddizione col fatto che, per ipotesi, i vettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_{n+1}, \dots, \mathbf{w}_k$ sono linearmente indipendenti. \square

Una conseguenza concettualmente importante del Lemma di Steinitz è che tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono formate dallo stesso numero di vettori.

Corollario 1.9.10. *Siano $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_m\}$ due basi di V . Allora $n = m$.*

Dimostrazione. Applicando il Lemma di Steinitz al sistema di generatori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ e ai vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_m$ si ha che $m \leq n$. D'altra parte possiamo applicare il Lemma di Steinitz anche al sistema di generatori $\{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_m\}$ e ai vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, ottenendo $n \leq m$. Di conseguenza $n = m$. \square

Il fatto che qualunque base di uno spazio vettoriale finitamente generato ha la stessa cardinalità ci permette di dare la seguente definizione.

Definizione 1.9.11. *Dato uno spazio vettoriale finitamente generato V su \mathbb{R} si dice dimensione di V e si indica con $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ (o semplicemente $\dim(V)$) la cardinalità di una qualunque base di V . Si pone $\dim_{\mathbb{R}}(\{\mathbf{0}\}) := 0$. Se uno spazio vettoriale non è finitamente generato si pone $\dim_{\mathbb{R}}(V) := \infty$.*

Abbiamo visto nell'Esempio 1.9.2 che \mathbb{R}^n ammette una base composta da n vettori. Quindi $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. In particolare, \mathbb{R} è uno spazio vettoriale su se stesso di dimensione 1.

Allo stesso modo, nell'Esempio 1.9.3, abbiamo trovato una base dello spazio delle matrici con m righe ed n colonne ad entrate in \mathbb{R} . Dato che tale base ha cardinalità $m \cdot n$, deduciamo che $\dim(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})) = mn$.

Infine, il lettore sarà sollevato dal sapere che lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3, cioè che effettivamente viviamo (o, meglio, abbiamo modellato la nostra vita) in uno spazio a 3 dimensioni!

Il seguente teorema ci permette di caratterizzare il numero di elementi di una base come *numero minimo* di generatori o anche come *numero massimo* di vettori linearmente indipendenti.

Teorema 1.9.12. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su \mathbb{R} e sia $\dim(V) = n$.*

1. *Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vettori linearmente indipendenti di V . Allora $k \leq n$ e si ha $k = n$ se e solo se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è base di V .*
2. *Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ generatori di V . Allora $m \geq n$ e si ha $m = n$ se e solo se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ è base di V .*

Dimostrazione. 1. Dal Lemma di Steinitz abbiamo direttamente che $k \leq n$. Dimostriamo la seconda parte dell'enunciato. Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ è base di V , la sua cardinalità deve essere uguale alla dimensione di V e quindi $k = \dim(V) = n$. Viceversa supponendo che $k = n$ dobbiamo dimostrare che $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di V . Sia \mathbf{v} un qualsiasi vettore di V . I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti, in quanto il loro numero è superiore alla dimensione di V . Quindi esistono scalari non tutti nulli $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n + \lambda \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (1.28)$$

Necessariamente $\lambda \neq 0$. Se infatti $\lambda = 0$, la (1.28) diventerebbe

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

da cui, essendo $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linearmente indipendenti, si ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, contraddicendo il fatto che almeno uno tra $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda$ è diverso da 0. Quindi $\lambda \neq 0$ e, moltiplicando la (1.28) per il suo inverso, si ottiene

$$\mathbf{v} = -\frac{\lambda_1}{\lambda} \mathbf{v}_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} \mathbf{v}_n$$

cioè $\mathbf{v} \in L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Questo prova che $V = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

2. Supponiamo per assurdo che $m < n$. Allora per la Proposizione 1.9.7 esiste $X' \subseteq \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ linearmente indipendente e tale che $L(X') = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) = V$. Quindi X' sarebbe una base di V con cardinalità $|X'| \leq |\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}| = m < n$, il che è assurdo (tutte le basi di V devono avere cardinalità pari a $n = \dim(V)$). Rimane da dimostrare che $m = n$ se e solo se

$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ è base di V . Ebbene, se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ è base di V , la sua cardinalità deve essere uguale a $n = \dim(V)$. Viceversa, supponiamo che $m = n$ e proviamo che $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti. Se per assurdo $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ fossero linearmente dipendenti allora esiste un sottoinsieme $X' \subsetneq \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ linearmente indipendente e tale che $L(X') = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = V$. Quindi X' è base di V . Si noti che X' è strettamente contenuto in $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ poichè quest'ultimo insieme, al contrario di X' , è linearmente dipendente. Allora $n = \dim(V) = |X'| < |\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}| = n$: abbiamo trovato la contraddizione che stavamo cercando. \square

Torniamo per un attimo alla Proposizione 1.9.7. Consideriamo un insieme finito di vettori $X = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Allora sappiamo che esiste un suo sottoinsieme X' linearmente indipendente e tale che la chiusura lineare resti invariata, cioè $L(X') = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Come dovrebbe essere chiaro dalla dimostrazione della Proposizione 1.9.7, il sottoinsieme $X' \subseteq \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, si ottiene “eliminando” qualche vettore da X (a meno che X non sia già in partenza linearmente indipendente, nel qual caso $X' = X$). Ma come stabilire quali devono essere i vettori da eliminare? In altre parole: data una lista di vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ è possibile estrarre il massimo numero di vettori linearmente indipendenti tra di essi?

Vi sono numerosi modi per farlo, ma il teorema precedente ci dice che il massimo numero di vettori linearmente indipendenti tra $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ non dipende dal procedimento scelto: esso infatti sarà proprio pari a $\dim(L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n))!$

Uno dei tanti metodi (ne vedremo un altro quando parleremo di rango di matrici) è denominato *metodo degli scarti successivi*. Si considera il primo vettore della lista: se $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ esso viene scartato, in quanto il vettore nullo non può far parte di una lista di vettori linearmente indipendenti; in questo caso il primo vettore della lista diventa \mathbf{v}_2 , a cui si riapplica lo stesso procedimento visto per \mathbf{v}_1 . Nel caso invece in cui $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ esso permane nella lista e si passa quindi a \mathbf{v}_2 : quest'ultimo viene accettato se $\mathbf{v}_2 \notin L(\mathbf{v}_1)$, cioè $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti; al contrario \mathbf{v}_2 viene scartato se è esprimibile come combinazione lineare di \mathbf{v}_1 . Si noti che, per il Lemma 1.9.6, qualora \mathbf{v}_2 venga scartato, la chiusura lineare resta invariata: $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1)$. Si va dunque avanti, col terzo vettore: \mathbf{v}_3 viene scartato se è combinazione lineare di quelli precedentemente accettati, altrimenti viene tenuto nella lista. In questo modo si procede con i rimanenti vettori nella lista. Alla fine, si otterranno $k \leq n$ vettori $\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_k}$ che per costruzione sono linearmente indipendenti (perchè ciascuno di essi non è combinazione lineare dei precedenti) e, in virtù del Lemma 1.9.6, tali che

$$L(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_k}) = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Chiariamo quanto detto con un esempio.

Esempio 1.9.13. Si considerino i vettori di \mathbb{R}^3 dati da

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= (0, 0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (1, 20), & \mathbf{v}_3 &= (-1, 0, 2), \\ \mathbf{v}_4 &= (0, 2, 2), & \mathbf{v}_5 &= (-1, 1, 0), & \mathbf{v}_6 &= (0, 1, 0).\end{aligned}$$

Vogliamo trovare un sottoinsieme X' di $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$ tale che

1. X' sia linearmente indipendente,
2. $L(X') = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6)$.

Applichiamo il metodo degli scarti successivi ed estraiamo il massimo numero di vettori linearmente indipendenti tra $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6$. Già sappiamo che tale numero non potrà superare 3, dato che non è possibile avere più di tre vettori linearmente indipendenti in \mathbb{R}^3 (perchè?)

Cominciamo da \mathbf{v}_1 . Dato che $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ esso viene scartato. La nostra lista diventa

$$\mathbf{v}_2 = (1, 2, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2), \quad \mathbf{v}_4 = (0, 2, 2), \quad \mathbf{v}_5 = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_6 = (0, 1, 0).$$

Consideriamo ora \mathbf{v}_2 , primo vettore della “nuova” lista. Poichè esso è diverso dal vettore nullo di \mathbb{R}^3 , possiamo tenerlo. La chiusura lineare, chiaramente, è rimasta invariata:

$$L(\mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Anche \mathbf{v}_3 viene mantenuto, dato che esso non è combinazione lineare di \mathbf{v}_2 . Passiamo a \mathbf{v}_4 . Poichè $\mathbf{v}_4 \in L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ (infatti $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$), il vettore \mathbf{v}_4 viene scartato dalla lista. Si noti che, sempre per il Lemma 1.9.6,

$$L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4).$$

Consideriamo ora \mathbf{v}_5 . Si verifica che $\mathbf{v}_5 \notin L(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$, cioè i vettori $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5$ sono linearmente indipendenti. Quindi “teniamo” anche \mathbf{v}_5 e si ha

$$L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5).$$

Il vettore \mathbf{v}_6 verrà invece scartato in quanto si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti vettori mantenuti in lista, precisamente $\mathbf{v}_6 = \frac{1}{3}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_5$. Tra l'altro, come detto, necessariamente \mathbf{v}_6 doveva essere scartato, poichè $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

In conclusione, $X' = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5\}$ è un insieme linearmente indipendente tale che

$$L(X') = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6).$$

È bene osservare che un tale X' non necessariamente è unico. Per esempio anche $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_6$ sono linearmente indipendenti e si ha $L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_6) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6)$.

Teorema 1.9.14 (Teorema di completamento ad una base). *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vettori di V linearmente indipendenti, con $k < n$. Allora esistono $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ tali che*

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

è una base di V .

Dimostrazione. Poiché $k < n = \dim(V)$ i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ non costituiscono una base di V . In particolare, essi non sono un sistema di generatori. Di conseguenza esiste un $\mathbf{v}_{k+1} \in V$ tale che $\mathbf{v}_{k+1} \notin L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$. Si noti che, per la Proposizione 1.8.4, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}$ sono linearmente indipendenti. Allora, se $k+1 = n$, per il teorema precedente, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$ è una base di V . Se, invece, $k+1 < n$, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$ non può essere una base (perché la sua cardinalità è inferiore alla dimensione di V), e quindi deve esistere un vettore di V , chiamiamolo \mathbf{v}_{k+2} , tale che $\mathbf{v}_{k+2} \notin L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1})$. Come prima concludiamo che $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}$ sono linearmente indipendenti. Se $k+2 = n$ allora essi costituiscono una base di V . Se $k+2 < n$, esiste un $\mathbf{v}_{k+3} \notin L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2})$. Dopo $n-k$ passi, avremo trovato $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ tali che

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

è una base di V . □

Osservazione 1.9.15. *La dimostrazione precedente è una classica dimostrazione che ci permette di dimostrare, in maniera chiara ed elegante, l'esistenza di "qualcosa" (in questo caso i vettori che completano ad una base una lista di vettori linearmente indipendenti data), senza però fornirci informazioni su come concretamente trovare quel "qualcosa".*

Proposiamo una dimostrazione alternativa del teorema di completamento ad una base, che dovrebbe risolvere questo problema.

Consideriamo una qualsiasi base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ di V . Allora i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ sono linearmente dipendenti, in quanto il loro numero supera la

dimensione di V . Utilizzando l'algoritmo degli scarti successivi, estraiamo il massimo numero di vettori linearmente indipendenti dall'insieme di vettori

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}.$$

Siccome, per ipotesi, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti, evidentemente essi saranno "tenuti" quando applichiamo l'algoritmo degli scarti successivi, e quindi sarà scartato qualcuno dei vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Quindi esisterà qualche $i_1, \dots, i_{n-k} \in \{1, \dots, n\}$ (perchè proprio $n - k$?) tale che

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_{n-k}}$$

sono linearmente indipendenti e

$$L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_{n-k}}) = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = V.$$

Vediamo ora la relazione tra dimensione di uno spazio vettoriale e quella di suoi sottospazi.

Proposizione 1.9.16. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e W un suo sottospazio vettoriale. Allora anche W è finitamente generato e si ha*

$$\dim(W) \leq \dim(V).$$

Inoltre $\dim(W) = \dim(V)$ se e solo se $W = V$.

Dimostrazione. Poniamo $n := \dim(V)$. Se $W = \{\mathbf{0}\}$ il risultato è ovvio: W è finitamente generato (qual è un sistema di generatori finito?) e $\dim(W) = 0 \leq n = \dim(V)$. Possiamo allora supporre che esista qualche vettore non nullo in W . Supponiamo per assurdo che W non sia finitamente generato. Siano $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in W$ vettori linearmente indipendenti, con $1 \leq k \leq n$. Allora $L(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) \neq W$ e quindi esiste un $\mathbf{w}_{k+1} \in W$ tale che

$$\mathbf{w}_{k+1} \notin L(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k).$$

Per la Proposizione 1.8.4 i vettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}$ sono linearmente indipendenti. Poiché W non è finitamente generato, tali vettori non possono essere generatori di W e quindi deve esistere un altro vettore di W , chiamiamolo \mathbf{w}_{k+2} tale che

$$\mathbf{w}_{k+2} \notin L(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}).$$

Inoltre, sempre per la Proposizione 1.8.4, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+2}$ sono linearmente indipendenti. Procedendo in questo modo, dopo $n - k$ passi, saremo

riusciti a trovare $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_{n+1} \in W \subseteq V$ linearmente indipendenti. Questo è impossibile, poichè $n = \dim(V)$ è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di V . Quindi l'unica possibilità è che W sia finitamente generato. Sia $m := \dim(W)$ e $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ una base di W . Allora, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in W \subseteq V$ sono vettori linearmente in V e, in quanto tali, il loro numero non può superare la dimensione di V . Pertanto $m \leq n$. Resta da dimostrare che $\dim(W) = \dim(V)$ se e solo se $V = W$. Supponiamo $\dim(V) = \dim(W)$ e consideriamo $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ una base di W . Possiamo riguardare $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ come vettori linearmente indipendenti di V . Allora, per il Teorema 1.9.12, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ è anche una base di V e quindi

$$V = L(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = W.$$

□

Esempio 1.9.17. *Si consideri l'insieme delle funzioni continue $C(a, b)$ definite su un intervallo (a, b) a valori reali, con le operazioni di somma e di prodotto per un numero reale descritte nell'Esempio 1.5.68. Usando la Proposizione 1.9.16 mostriamo facilmente che $C(a, b)$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita. Infatti se per assurdo $C(a, b)$ fosse finitamente generato allora, per la Proposizione 1.9.16, anche il suo sottospazio vettoriale dato da tutte le funzioni polinomiali sarebbe finitamente generato, mentre abbiamo mostrato nell'Esempio 1.9.4 che così non è.*

A proposito di sottospazi, abbiamo definito in precedenza il sottospazio somma $W + W'$ di due sottospazi vettoriali W e W' di uno spazio vettoriale V . Il seguente teorema ci fornisce, nel caso in cui W e W' siano finitamente generati, un modo di trovare una base di $W + W'$ a partire da una base di W e da una di W' .

Teorema 1.9.18 (Formula di Grassmann). *Siano W e W' sottospazi vettoriali finitamente generati di uno spazio vettoriale V . Allora anche $W \cap W'$ e $W + W'$ sono finitamente generati e si ha*

$$\dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W'). \quad (1.29)$$

Dimostrazione. Essendo $W \cap W'$ sottospazio vettoriale di W , ed essendo quest'ultimo finitamente generato, per la Proposizione 1.9.16 si ha subito che anche $W \cap W'$ è finitamente generato. Proviamo che $W + W'$ è finitamente generato esibendo esplicitamente un suo sistema di generatori finito. Poichè W e W' sono finitamente generati, esistono $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in W$ e $\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n'} \in W'$ tali che

$$W = L(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n), \quad W' = L(\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n'}). \quad (1.30)$$

Ebbene, mostriamo che

$$W + W' = L(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n'}). \quad (1.31)$$

Infatti, consideriamo un qualsiasi vettore $\mathbf{v} \in W + W'$. Allora esistono $\mathbf{w} \in W$ e $\mathbf{w}' \in W'$ tali che $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$. Da (1.30) abbiamo che esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n'} \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{w}_n$ e $\mathbf{w}' = \alpha'_1 \mathbf{w}'_1 + \dots + \alpha'_{n'} \mathbf{w}'_{n'}$. Allora $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}' = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{w}_n + \alpha'_1 \mathbf{w}'_1 + \dots + \alpha'_{n'} \mathbf{w}'_{n'} \in L(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n'})$.

Per la dimostrazione della (1.29) conviene distinguere due casi: $W \cap W' = \{\mathbf{0}\}$ e $W \cap W' \neq \{\mathbf{0}\}$.

I caso: $W \cap W' = \{\mathbf{0}\}$

In questo caso la somma di W e W' è diretta e la (1.29) diventa

$$\dim(W \oplus W') = \dim(W) + \dim(W'). \quad (1.32)$$

Posto $n = \dim(W)$ e $n' = \dim(W')$, consideriamo una base $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ di W e una base $\{\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n'}\}$ di W' . Proviamo che $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n'}\}$ è una base di $W \oplus W'$. Nella prima parte abbiamo già dimostrato che si tratta di un sistema di generatori. Resta da dimostrare la lineare indipendenza. Ebbene, consideriamo arbitrari scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_{n'} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{w}_n + \lambda'_1 \mathbf{w}'_1 + \dots + \lambda'_{n'} \mathbf{w}'_{n'} = \mathbf{0}. \quad (1.33)$$

Allora possiamo riscrivere l'uguaglianza precedente come

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{w}_n = -\lambda'_1 \mathbf{w}'_1 - \dots - \lambda'_{n'} \mathbf{w}'_{n'}. \quad (1.34)$$

Dalla (1.34) deduciamo che il vettore $\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{w}_n$ appartiene sia a W che a W' (in quanto la (1.34) ci dice che esso è uguale a un vettore di W'). Di conseguenza

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{w}_n \in W \cap W' = \{\mathbf{0}\},$$

da cui $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, per la lineare indipendenza di $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$. Sostituendo nella (1.33) si ottiene

$$\lambda'_1 \mathbf{w}'_1 + \dots + \lambda'_{n'} \mathbf{w}'_{n'} = \mathbf{0},$$

da cui, per la lineare indipendenza di $\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n'}$, anche $\lambda'_1 = \dots = \lambda'_{n'} = 0$. Pertanto $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n'}\}$ è una base di $W \oplus W'$, e quindi

$$\dim(W \oplus W') = n + n' = \dim(W) + \dim(W').$$

Il caso: $W \cap W' \neq \{\mathbf{0}\}$

Supponiamo ora che la somma di W e W' non sia diretta, cioè $W \cap W'$ contenga almeno un vettore non nullo. In altre parole, $h := \dim(W \cap W') > 0$. Sia dunque $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h\}$ una base di $W \cap W'$. Come in precedenza poniamo $n := \dim(W)$ e $n' := \dim(W')$. Per il teorema di completamento della base esistono $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-h} \in W$ tali che

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-h}\}$$

è base di W . Analogamente esistono $\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n'-h} \in W'$ tali che

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h, \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n'-h}\}$$

è base di W' . Dimostriamo che

$$B := \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-h}, \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n'-h}\} \quad (1.35)$$

è una base di $W + W'$. Una volta che lo avremo provato, potremmo immediatamente concludere che

$$\begin{aligned} \dim(W + W') &= h + (n - h) + (n' - h) \\ &= n + n' - h \\ &= \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W'). \end{aligned}$$

Nella prima parte della dimostrazione abbiamo, di fatto, già dimostrato che $L(B) = W + W'$. Resta dunque da provare che B è linearmente indipendente. Siano $a_1, \dots, a_h, b_1, \dots, b_{n-h}, c_1, \dots, c_{n'-h} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{i=1}^h a_i \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{n-h} b_j \mathbf{w}_j + \sum_{k=1}^{n'-h} c_k \mathbf{w}'_k = \mathbf{0}. \quad (1.36)$$

Dobbiamo dimostrare che necessariamente $a_1 = \dots = a_h = b_1 = \dots = b_{n-h} = c_1 = \dots = c_{n'-h} = 0$. L'uguaglianza (1.36) è equivalente a

$$\sum_{j=1}^{n-h} b_j \mathbf{w}_j = - \sum_{i=1}^h a_i \mathbf{e}_i - \sum_{k=1}^{n'-h} c_k \mathbf{w}'_k. \quad (1.37)$$

Si noti che quello a primo membro della (1.37) è un vettore di W , mentre a secondo membro vi è un vettore appartenente a W' . Di conseguenza la (1.37) implica che

$$\sum_{j=1}^{n-h} b_j \mathbf{w}_j \in W \cap W' = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h)$$

e quindi devono esistere $d_1, \dots, d_h \in \mathbb{R}$ tali che

$$b_1 \mathbf{w}_1 + \dots + b_{n-h} \mathbf{w}_{n-h} = d_1 \mathbf{e}_1 + \dots + d_h \mathbf{e}_h,$$

cioè

$$d_1 \mathbf{e}_1 + \dots + d_h \mathbf{e}_h - b_1 \mathbf{w}_1 - \dots - b_{n-h} \mathbf{w}_{n-h} = \mathbf{0}. \quad (1.38)$$

Ma i vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-h}$ costituiscono una base di W e quindi, in particolare, sono linearmente indipendenti. Allora i coefficienti della combinazione lineare nella (1.38) devono essere tutti nulli: $d_1 = \dots = d_h = b_1 = \dots = b_{n-h} = 0$. Sostituendo tali valori nella (1.36) si ottiene che

$$a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_h \mathbf{e}_h + c_1 \mathbf{w}'_1 + \dots + c_{n'-h} \mathbf{w}'_{n'-h} = \mathbf{0},$$

da cui, per la lineare indipendenza dei vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h, \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n'-h}$ (costituiscono infatti una base di W'), si ottiene che anche $a_1 = \dots = a_h = c_1 = \dots = c_{n'-h} = 0$. \square

1.10 Spazi a dimensione infinita

Siamo riusciti a dimostrare l'esistenza di una base per uno spazio vettoriale finitamente generato. Rimane sul tappeto cosa accade per gli spazi vettoriali di dimensione infinita. Dimostriamo che anche in questo caso esiste sempre una base e, in perfetto accordo con gli spazi finitamente generati, due qualsiasi basi sono equipotenti (cioè esiste una applicazione biettiva tra di essi). La dimostrazione utilizza pesantemente il *Lemma di Zorn*.

Cominciamo con alcuni lemmi, che generalizzano alcuni risultati trovati nel caso finito. In particolare, il secondo, di cui si omette la dimostrazione, è una estensione del Lemma di Steinitz al caso di sistemi di generatori e insiemi linearmente indipendenti infiniti.

Lemma 1.10.1. *Se $X \subseteq V$ è linearmente indipendente e $\mathbf{v} \notin L(X)$, allora anche $X \cup \{\mathbf{v}\}$ è linearmente indipendente.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in X \cup \{\mathbf{v}\}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Se nella combinazione lineare appaiono solo vettori di X allora i coefficienti sono tutti nulli perchè X è linearmente indipendente. Quindi possiamo supporre che uno dei vettori sia \mathbf{v} e il suo coefficiente non deve essere nullo. Ma allora \mathbf{v} si può esprimere come combinazione lineare di vettori di X il che è assurdo perchè abbiamo supposto che $\mathbf{v} \notin L(X)$. \square

Lemma 1.10.2 (Lemma di Steinitz generalizzato). *Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} e sia X un sistema di generatori di V e Y un sottoinsieme di V linearmente indipendente. Allora Y è equipotente ad un sottoinsieme di X .*

Teorema 1.10.3. *Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Allora esiste una base di V . Inoltre, se B e B' sono due qualsiasi basi di V , allora B e B' sono insiemi equipotenti.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{B} := \{X \subseteq V \mid X \text{ è linearmente indipendente}\}$$

i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di V linearmente indipendenti. Chiaramente \mathcal{B} non è vuoto, in quanto sicuramente $\emptyset \in \mathcal{B}$. Inoltre (\mathcal{B}, \subseteq) è parzialmente ordinato rispetto alla relazione d'ordine data dall'inclusione. Proviamo che \mathcal{B} è induttivo. Sia $\{B_i\}_{i \in I}$ una qualsiasi famiglia totalmente ordinata di sottoinsiemi linearmente indipendenti di V . Dimostriamo che

$$B_0 := \bigcup_{i \in I} B_i$$

è un maggiorante. L'unica cosa che c'è da dimostrare è che $B_0 \in \mathcal{B}$, cioè che B_0 è linearmente indipendente. Infatti, se

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

è una qualsiasi combinazione lineare, con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v}_1 \in B_{i_1}, \mathbf{v}_2 \in B_{i_2}, \dots, \mathbf{v}_n \in B_{i_n}$, allora esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $B_{i_k} \subseteq B_{i_j}$ per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$, e quindi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in B_{i_j}$, da cui $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ per la lineare indipendenza di B_{i_j} . Per il Lemma di Zorn esiste $B \in \mathcal{B}$ elemento massimale: tale B è il nostro candidato per essere una base di V . Per costruzione, in quanto elemento di \mathcal{B} , B è linearmente indipendente. Resta dunque da provare che $L(B) = V$. Supponiamo per assurdo che esista $\mathbf{v} \in V$ tale che $\mathbf{v} \notin L(B)$. Allora, per il Lemma 1.10.1 $B \cup \{\mathbf{v}\}$ è linearmente indipendente e quindi è un elemento di \mathcal{B} che contiene strettamente B . Questo contraddice la massimalità di B .

Infine, l'ultima parte dell'enunciato è una diretta conseguenza del Lemma 1.10.2. \square

1.11 Componenti rispetto a una base. Matrice di passaggio

Consideriamo uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e una sua base $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Siccome $L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = V$, dato un qualunque vettore $\mathbf{v} \in V$, esiste una n -upla ordinata $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbf{e}_i.$$

Poichè gli elementi della base sono linearmente indipendenti la n -upla è univocamente determinata. Infatti se (x'_1, \dots, x'_n) fosse un'altra n -upla tale che

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot \mathbf{e}_i,$$

si avrebbe

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) \cdot \mathbf{e}_i = 0$$

e quindi, per la lineare indipendenza di B , si deve avere che $x_i = x'_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Come spesso avviene in matematica, l'unicità di un oggetto ci induce a dare a quell'oggetto un nome:

Definizione 1.11.1. *Data una base $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, gli unici $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbf{e}_i,$$

sono detti componenti di \mathbf{v} rispetto alla base B .

Data una base di V , l'introduzione delle componenti ci permette di costruire una applicazione biunivoca $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, dove $n = \dim(V)$, che ad ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ associa la sua n -upla di componenti (x_1, \dots, x_n) rispetto a B .

Consideriamo ora due basi $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $B' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ di uno spazio vettoriale V . Dato un vettore \mathbf{v} di V , questo avrà delle componenti rispetto ad ognuna delle due basi e quindi ci si pone la questione di capire in che modo sono legate queste componenti.

Sia dunque

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot \mathbf{e}'_i.$$

Poichè B' è una base, ogni vettore di B può essere espresso in maniera unica come combinazione lineare dei vettori di B' . Scriviamo queste componenti come segue:

$$\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \mathbf{e}'_i$$

per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$. In tal modo abbiamo di fatto costruito una matrice $M_{BB'} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, chiamata *matrice di passaggio dalla base B alla base B'* , la cui j -esima colonna è formata dalle componenti di \mathbf{e}_j rispetto alla base B' .

Sostituendo \mathbf{e}_j nell'espressione di \mathbf{v} si ottiene

$$\sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{e}'_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \mathbf{e}'_i$$

e quindi, per l'unicità delle componenti otteniamo, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \tag{1.39}$$

che è il legame che stavamo cercando tra le componenti di \mathbf{v} rispetto a B' e quelle rispetto a B . Si noti che la (1.39) può essere espressa in termini di matrici

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M_{BB'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vediamo un esempio.

Esempio 1.11.2. Consideriamo in \mathbb{R}^3 la base canonica

$$B = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

e la base

$$B' = \{\mathbf{e}'_1 = (1, 1, 1), \mathbf{e}'_2 = (1, 1, 0), \mathbf{e}'_3 = (1, 0, 0)\}$$

e sia $\mathbf{v} = (2, 0, -1) = 2 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 - 1 \cdot \mathbf{e}_3$. La matrice colonna delle componenti di \mathbf{v} rispetto a B è data da

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Troviamo ora le componenti di ogni elemento della base canonica rispetto alla base B' . Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 0 \cdot \mathbf{e}'_1 + 0 \cdot \mathbf{e}'_2 + 1 \cdot \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_2 &= 0 \cdot \mathbf{e}'_1 + 1 \cdot \mathbf{e}'_2 - 1 \cdot \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_3 &= 1 \cdot \mathbf{e}'_1 - 1 \cdot \mathbf{e}'_2 + 0 \cdot \mathbf{e}'_3 \end{aligned}$$

La matrice di passaggio da B a B' sarà dunque data da

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi le componenti di \mathbf{v} rispetto a B' sono date da

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = M_{BB'} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il lettore può verificare che in effetti si ha $\mathbf{v} = -\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + 2\mathbf{e}'_3$.

Supponiamo ora di avere tre basi $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, $B' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ e $B'' = \{\mathbf{e}''_1, \dots, \mathbf{e}''_n\}$ e siano $M_{BB'} = (a_{ij})$, $M_{B'B''} = (b_{ij})$, $M_{BB''} = (c_{ij})$ le matrici di passaggio rispettivamente da B a B' , da B' a B'' e da B a B'' . Avremo quindi

$$\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot \mathbf{e}'_k, \quad \mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^n b_{ki} \cdot \mathbf{e}''_k, \quad \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} \cdot \mathbf{e}''_i.$$

Dalle uguaglianze precedenti si ottiene

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} \cdot \mathbf{e}''_i = \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot \mathbf{e}'_k = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_{ki} \cdot \mathbf{e}''_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{ki} a_{kj} \right) \cdot \mathbf{e}''_i.$$

Per l'unicità delle componenti si ottiene

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{kj}$$

vale a dire

$$M_{BB''} = M_{B'B''} \cdot M_{BB'}. \quad (1.40)$$

Si osservi che se si prende $B'' = B'$, allora $M_{BB''} = I_n$ e la (1.40) diventa

$$M_{B'B} \cdot M_{BB'} = I_n.$$

Abbiamo dunque dimostrato il seguente risultato.

Teorema 1.11.3. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n , e siano B e B' due basi di V . Allora la matrice di passaggio $M_{BB'}$ da B a B' è invertibile e si ha*

$$(M_{BB'})^{-1} = M_{B'B}.$$

Esercizi conclusivi

1. Stabilire se

$$W = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(1) = 2\}$$

e un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali.

2. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Stabilire se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti

$$p_1 = 3 + 2x - 4x^2, \quad p_2 = -1 + 4x + 2x^2, \quad p_3 = 5 - 3x - x^2.$$

3. Stabilire se i seguenti vettori di \mathbb{R}^3 sono linearmente indipendenti

$$\mathbf{v}_1 = (0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$$

4. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono generatori di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Sia $C^2(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili due volte. Si definisce la somma di due funzioni reali di variabile reale f e g nel modo seguente

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre si definisce il prodotto di un numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$ per una funzione $f \in C^2(\mathbb{R})$ nel modo seguente

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- (i) Verificare che che $(C^2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale
- (ii) Dimostrare che il seguente sottoinsieme di $C^2(\mathbb{R})$

$$W := \{f \in C^2(\mathbb{R}) : f'' + 2f' - f = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $C^2(\mathbb{R})$

- (iii) Stabilire quale dei seguenti insiemi è linearmente indipendente

$$X := \{\sin(x), \cos(x), 1\}, \quad Y := \{e^x, e^{2x}\}, \quad Z := \{3, 2\sin^2(x), \cos^2(x)\}$$

6. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, e sia $W = \mathbb{R}_n[x]$ il sottoinsieme di V costituito dai polinomi di grado minore o uguale a n .

- (i) Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di V
- (ii) Trova una base di W
- (iii) Dimostrare che $\mathbb{R}_2[x]$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_4[x]$
- (iv) Dimostrare che $B = \{2, 1 + 2x, -x + x^2\}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$

7. Trovare una base della chiusura lineare $L(A_1, A_2, A_3, A_4)$ delle matrici dell'Esercizio n. 4

8. Stabilire se le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9. Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ delle matrici quadrate ad entrate reali di ordine 2 e siano W_1 e W_2 i sottoinsiemi formati dalle matrici simmetriche e antisimmetriche, rispettivamente. Si dimostri che $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$, e si trovi una base di W_1 ed una base di W_2

10. In \mathbb{R}^3 si considerino i vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2), \quad \mathbf{v}_2 = (3, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{v}_4 = (5, 1, 4).$$

Si dica, per ciascuna delle seguenti affermazioni, se essa è vera oppure falsa (specificandone le ragioni):

- (a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è un sistema di generatori di \mathbb{R}^3

(b) $\mathbb{R}^3 = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$

(c) $\mathbb{R}^3 = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$

(d) $\mathbb{R}^3 = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + L(\mathbf{v}_4)$

11. Stabilire a quanto è uguale $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$
12. Con le notazioni dell'Esercizio 7, una volta trovata una base di $L(A_1, A_2, A_3, A_4)$, completarla ad una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
13. Denotiamo con $\mathbb{R}_n[x]$ di tutti i polinomi aventi grado minore o uguale a n .
 - (i) Dimostra che $\mathbb{R}_2[x]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_4[x]$
 - (ii) Dimostra che $B = \{2, 1 + 2x, -x + x^2\}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$
 - (iii) Completa B a una base di $\mathbb{R}_4[x]$