24-10-25

Soluzioni esercizi dello scorso tutoraggio:

- Rifare il calcolo col criterio della radice

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n} ;$$

$$a_n = \frac{e^{-n}}{n} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{-n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-1}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{e^{-1}}{1} < 1$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3 + (x^2+2)n^2 + 4} - \sqrt{n^3 + 3xn^2 + 1} \right)$$ (studiarla per $x=2$)

$$X = 2 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3 + 6n^2 + 4} - \sqrt{n^3 + 6n^2 + 1} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\underbrace{\sqrt{n^3+6n^2+4}}_{\simeq\sqrt{n^3}} + \underbrace{\sqrt{n^3+6n^2+1}}_{\simeq\sqrt{n^3}}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2\sqrt{n^3}} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

CONVERGE in quanto serie armonica gen. con $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

- Esercizio (1.2.b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \qquad a_n = \frac{1}{n+1}, \quad x_0 = 0, \quad r = ?$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)+1} : \frac{1}{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{l} = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad I = (x_0 - r, x_0 + r) = (-1, 1)$$

Comportamento agli estremi:

$\boxed{X = -1}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

STEP 1: $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$$ (Usando il teo. dei 2 carabin.)

infatti $\quad -\frac{1}{n+1} \le \frac{(-1)^n}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$

$0 \leftarrow \qquad\qquad\qquad \rightarrow 0$

STEP 2: Leibniz

- serie a segno alterno $\left((-1)^n \cdot p_n, \text{ con } p_n = \frac{1}{n+1} \right)$ ✓
- $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ✓
- p_n decrescente $\left(\frac{1}{1+1} \ge \frac{1}{2+1} \ge \frac{1}{3+1} \ge \dots \right)$ ✓

$\Rightarrow$ la serie converge.

$\boxed{x = +1}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

DIVERGE (serie armonica, $\alpha = 1$).

· Esercizio 1.4, estremo $x = -\frac{3}{e}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^2 e^n}{n\, 3^n} \left(-\frac{3}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cancel{e^n}}{n \cancel{3^n}} (-1)^n \cdot \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{e^n}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

STEP 1: $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ (Teo. dei 2 carabinieri)

STEP 2: Leibniz

- serie a segno alterno $\left((-1)^n \cdot p_n \text{ con } p_n = \frac{1}{n} \right)$ ✓
- $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓
- p_n decrescente $\left(\frac{1}{1} \ge \frac{1}{2} \ge \frac{1}{3} \ge \dots \right)$ ✓

$\Rightarrow$ la serie converge.

· Esercizio 1.5.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2}$

$\Downarrow$

$I = [-3, -1]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n$

$\Downarrow$

$I = \{1\}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n n^3}$

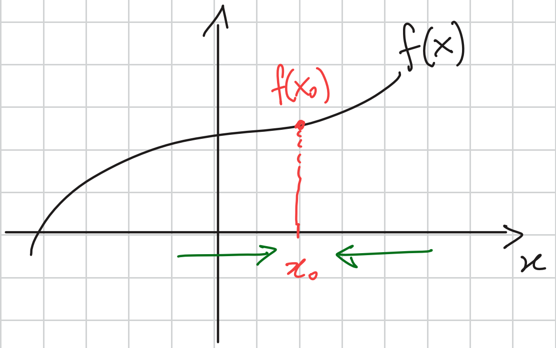
$\Downarrow$

$I = [-5, -1]$

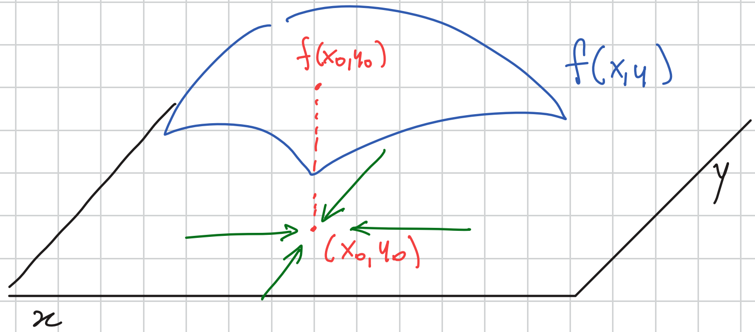
Liste 2 – Limiti e Derivate.

Differenze tra limiti in AN 1 e AN 2 : <u>più variabili</u>

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \longrightarrow$$ Il primo tentativo è sempre ricondursi al caso di 1 variabile.



ANALISI 1



ANALISI 2

Esempio : (1) studiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

DIREZIONI PRIVILEGIATE :

$$x=0 \longrightarrow \lim_{y\to 0} \frac{0^3+y^3}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{\cancel{3}}}{\cancel{y^2}} = \lim_{y\to 0} y = 0$$

$$y=0 \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^3+0^3}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

<u>Teorema</u> : se il limite esiste, allora è unico.

(2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

DIREZIONI PRIVILEGIATE :

$$x=0 \longrightarrow \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

$$y=0 \rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

Proviamo a calcolare lo stesso limite lungo un'altra direzione (DEVE PER FORZA PASSARE PER IL PUNTO IN CUI CALCOLO IL LIMITE), ad esempio $y=x$

$$y=x \rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$$

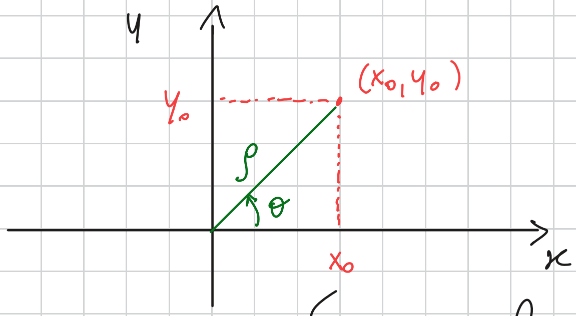
Poiché ho ottenuto valori diversi, il limite non é unico e quindi non esiste!

Dopo lo studio delle "direzioni privilegiate", per confermare l'esistenza di un limite abbiamo 2 strade:

1. la VERIFICA del limite (usando la definizione con ε, δ) $\longrightarrow$ STRADA PIÚ DIFFICILE!!!
2. il calcolo con coord. polari $\longrightarrow$ MIGLIORE!

Le coord. polari sono:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$



In particolare, calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ é equivalente a calcolare $\lim_{\rho\to 0}$

Esempi:

(3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \overset{\text{COORD.}}{\underset{\text{POLARI}}{=}} \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\theta)^3+(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^3}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3\theta+\rho^3\mathrm{sen}^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\mathrm{sen}^2\theta} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\cancel{3}}(\cos^3\theta+\mathrm{sen}^3\theta)}{\cancel{\rho^2}(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta)} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta)}{1} = \lim_{\rho \to 0} \rho\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right) = 0$$

e concludiamo che il limite esiste e vale zero.

(4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho\cos\theta \cdot \rho \sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta} =$$

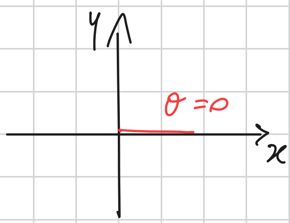
$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\cancel{\rho^2}\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\cancel{\rho^2}} = \lim_{\rho \to 0} \cos\theta \operatorname{sen}\theta = \cos\theta \operatorname{sen}\theta$$

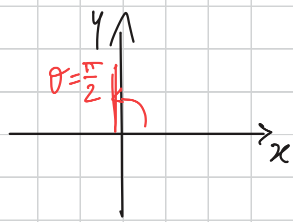
ma questo risultato cambia in base a θ, quindi il limite NON esiste (già dimostrato prima).

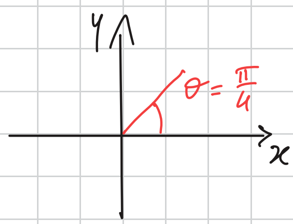
$y=0 \leadsto \theta = 0 \longrightarrow \lim = \cos 0 \cdot \operatorname{sen} 0 = 1 \cdot 0 = 0$

$x=0 \leadsto \theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \lim = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 \cdot 1 = 0$

$y=x \leadsto \theta = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \lim = \cos\frac{\pi}{4} \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$







Esercizi:

5) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2x^3+y^4+3y^5}{x^2+y^4}$$

DIREZIONI PRIVILEGIATE: $x=0$, $y=0$

$$x=0 \leadsto \lim_{y\to 0} \frac{0^2+2\cdot 0^3+y^4+3y^5}{0^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4+3y^5}{y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{y^4}(1+3y)}{\cancel{y^4}}$$

$$= \lim_{y \to 0} (1+3y) = 1$$

$$y=0 \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x^3+0^4+3\cdot 0^5}{x^2+0^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(1+2x)}{\cancel{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} (1+2x) = 1$$

Poiché $x=y^2$ (Parabola) è una curva che passa per il punto $(x_0,y_0)=(0,0)$, posso calcolare anche tale direzione privilegiata:

$$x=y^2 \longrightarrow \lim_{y\to 0} \frac{y^4+2y^6+y^4+3y^5}{y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{y^4}(1+2y^2+1+3y)}{2\cancel{y^4}}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{2+2y^2+3y}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Coord. Polari:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\theta)^2+2(\rho\cos\theta)^3+(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^4+3(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^5}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^4}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\theta+2\rho^3\cos^3\theta+\rho^4\mathrm{sen}^4\theta+3\rho^5\mathrm{sen}^5\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^4\mathrm{sen}^4\theta}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2}(\cos^2\theta+2\rho\cos^3\theta+\rho^2\mathrm{sen}^4\theta+3\rho^3\mathrm{sen}^5\theta)}{\cancel{\rho^2}(\cos^2\theta+\rho^2\mathrm{sen}^4\theta)}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\cos^2\theta+\overset{\nearrow 0}{2\rho\cos^3\theta}+\overset{\nearrow 0}{\rho^2\mathrm{sen}^4\theta}+\overset{\nearrow 0}{3\rho^3\mathrm{sen}^5\theta}}{\cos^2\theta+\underset{\searrow 0}{\rho^2\mathrm{sen}^4\theta}} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1$$

<u>Esercizio:</u> studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(y+3)+3|y|}{x^2+|y|}$$

Derivate parziali: se $f(x,y)$ (dipende da due variabili), posso derivare:

- rispetto a x (considerando la y una costante);
- rispetto a y (" " x " ").

Esempi:

2.4.2) $f(x,y) = 2(x^2+y^2+1) - x^4 + y^4 = 2x^2+2y^2+2-x^4+y^4$

La derivata rispetto a x si scrive

$$f_x = 4x + 0 + 0 - 4x^3 + 0 = 4x - 4x^3$$

La derivata rispetto a y si scrive

$$f_y = 0 + 4y + 0 + 0 + 4y^3 = 4y + 4y^3$$

Il vettore GRADIENTE si denota con ∇f ed è dato da

$$\nabla f = (f_x, f_y)$$

In questo esempio $\nabla f = (4x - 4x^3, 4y + 4y^3)$

Come vettore, può essere calcolato in punto, ad esempio

$$\nabla f(1,-2) = \left(4 \cdot 1 - 4 \cdot (1)^3, 4 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2)^3\right) = (0, -40)$$

2.4.1) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$

$$f_x = \frac{1}{1+x^2+y^2} \cdot (0+2x+0) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

$$f_y = \frac{1}{1+x^2+y^2} \cdot (0+0+2y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$\nabla f = (f_x, f_y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}\right) = \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y)$$

Risolviamo $\nabla f = 0 = (0,0)$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2+y^2} = 0 \\ \dfrac{2y}{1+x^2+y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to \nabla f = 0 \iff (x,y) = (0,0)$$

2.4.3) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 2y} = (x^2 - 2y)^{\frac{1}{2}}$

$$f_x = \frac{1}{2}(x^2 - 2y)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2x - 0) = \frac{1}{\cancel{2}}(x^2-2y)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2-2y}}$$

$$f_y = \frac{1}{2}(x^2-2y)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (0-2) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (x^2-2y)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\cancel{2}) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-2y}}$$

Calcoliamo i punti CRITICI, ovvero quelli in cui $\nabla f = 0$.

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2y}} = 0 & \to x = 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-2y}} = 0 & \to \text{IMPOSSIBILE !} \end{cases}$$

Poiché il gradiente non può mai essere nullo, non ci sono punti critici per f.

2.4.4) Calcolare i punti critici di $f(x,y) = 6x^2e^y - 4x^3 - e^{6y}$.

$$f_x = 12xe^y - 12x^2 + 0 = 12x(e^y - x)$$

$$f_y = 6x^2e^y - 0 - 6e^{6y} = 6e^y(x^2 - e^{5y})$$

I punti critici sono quelli che soddisfano $\nabla f = 0$:

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 12x(e^y - x) = 0 \\ \cancel{6e^y}(x^2 - e^{5y}) = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 12x = 0 \\ x^2 - e^{5y} = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} e^y - x = 0 \\ x^2 - e^{5y} = 0 \end{cases} \quad ;$$

$$\underbrace{\begin{cases} x = 0 \\ -e^{5y} = 0 \end{cases}}_{\text{IMPOSSIBILE}} \quad \vee \quad \begin{cases} x = e^y \\ e^{2y} - e^{5y} = 0 \end{cases} \quad ;$$

$$e^{2y} - e^{5y} = e^{2y}(1 - e^{3y})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = e^y \\ \cancel{e^{2y}}(1 - e^{3y}) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = e^y \\ e^{3y} = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = e^y \\ 3y = 0 \end{cases} \quad ;$$

$$\begin{cases} x = e^y \\ y = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (1, 0)$$ é l'unico p.to critico!

[Il gradiente é un VETTORE, quindi se riguarda una funzione di 2 variabili $(f(x,y))$ é un vettore di 2 componenti. Si denota con ∇f e le sue componenti si calcolano con le derivate parziali di f.