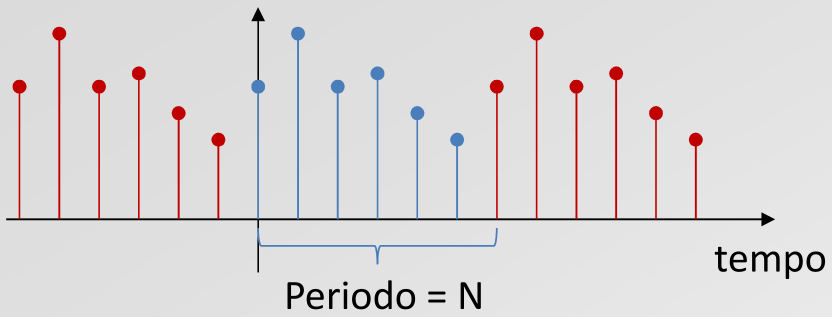
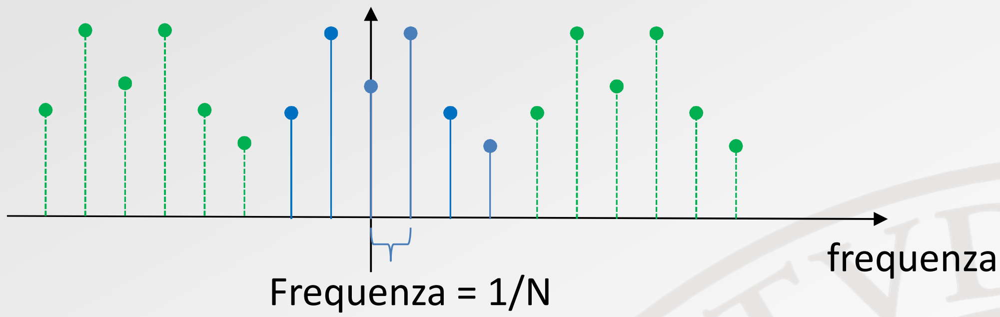
Recap!...



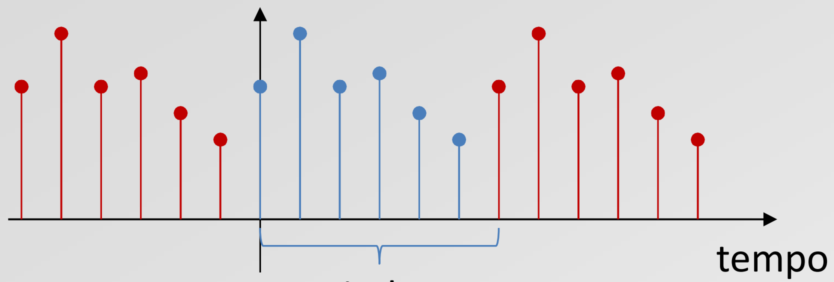
Il segnale nel tempo si ripete perché periodico, di periodo N

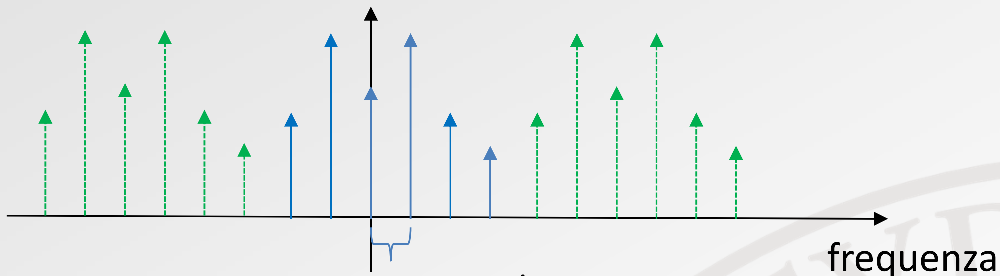


Il segnale in frequenza si ripete perché campionato con periodicità 2π in ω (1 in f).

Se il segnale è a tempo discreto, periodico, ha uno spettro a righe (perché è periodico e ammette sviluppo in Serie di Fourier) che è pure periodico (in quanto il segnale è campionato e per il teorema del campionamento lo spettro si ripete uguale a se stesso a multipli di 2π in ω.

Recap!...





Il segnale nel tempo si ripete perché periodico, di periodo N

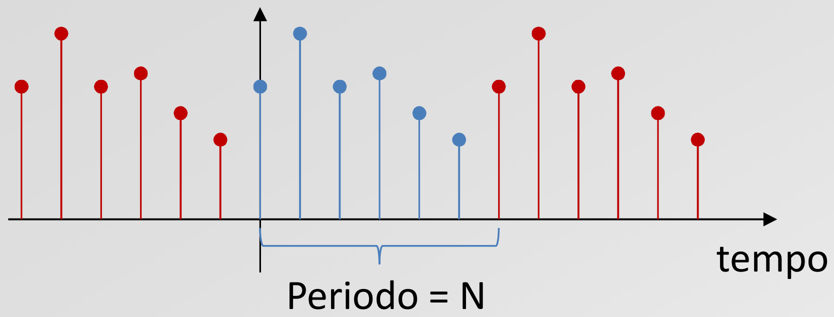
Il segnale in frequenza si ripete perché campionato con periodicità 2π in ω (1 in f).

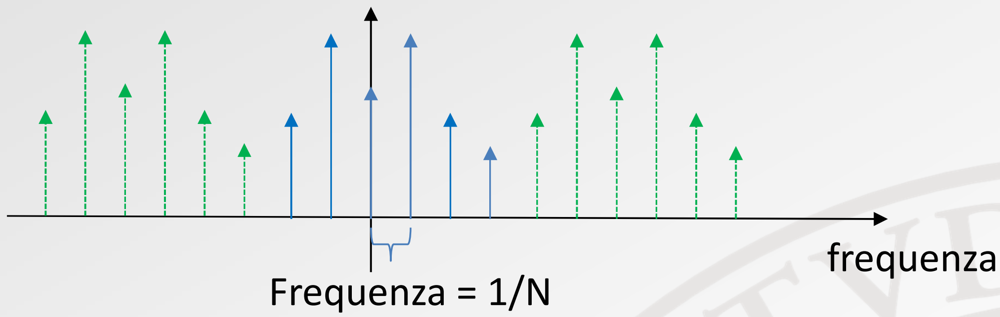
Sapendo che se esiste la serie esiste anche la trasformata di Fourier che se ne distingue per il fatto che le righe spettrali sono impulsi di area 2π volte maggiore il valore dei coefficienti della serie:

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-jn\left(\frac{2\pi}{N}\right)k} \longrightarrow X(\omega) = \frac{2\pi}{\mathrm{N}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

che è ancora una DTFT, che però esiste solo a frequenze pari a $\frac{2\pi}{N}k$

Recap!...





Il segnale nel tempo si ripete perché periodico, di periodo N

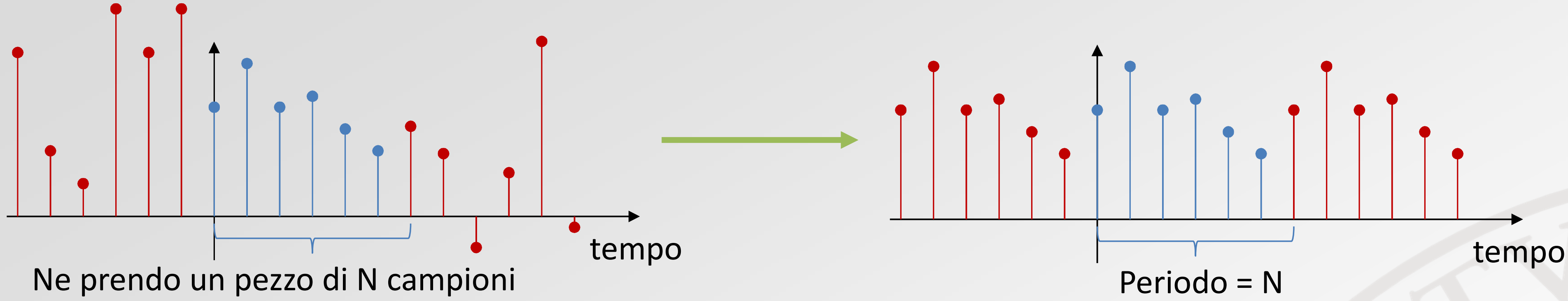
Il segnale in frequenza si ripete perché campionato con periodicità 2π in ω (1 in f).

Questo però corrisponde a prendere solo i coefficienti che si trovano in $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ così che:

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{\mathrm{N}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}[k]\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \longrightarrow X[k] = \frac{2\pi}{\mathrm{N}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

che è funzione di k a questo punto, e si ripete uguale a se stessa all'infinito con periodo N (quindi vale anche per la sommatoria da 0 a N-1.

Recap!...



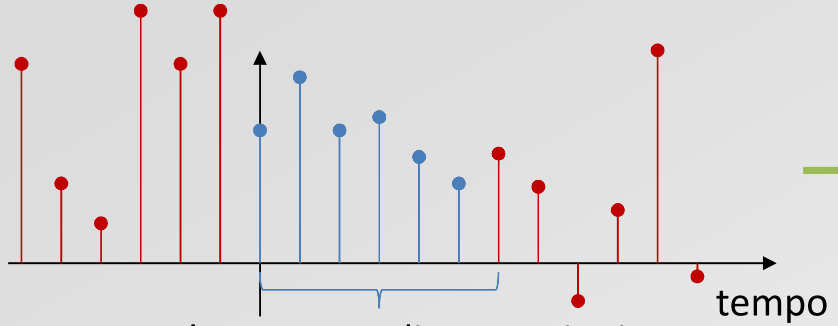
Il segnale nel tempo non è periodico? Ne isolo un pezzo e lo estendo per periodicità

Apparentemente, su questo nuovo segnale vale quanto abbiamo già detto. Solo che stavolta abbiamo:

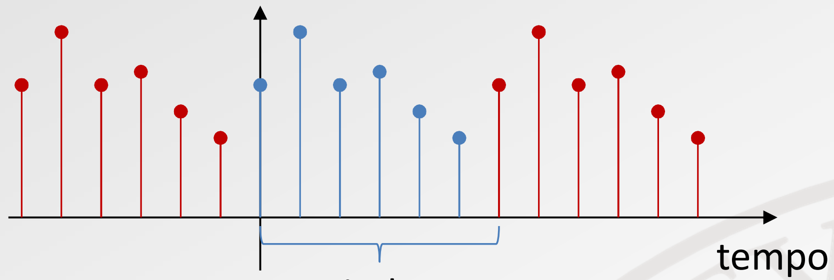
- Finestrato il segnale con una porta nel tempo, larga N (ci penseremo dopo a che significa...)
- Replicato per periodicità convolvendo con un treno di impulsi distanti N
    - Che in frequenza è

$$\mathfrak{F}\{p[n]\} = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

Recap!...



Ne prendo un pezzo di N campioni



Il segnale nel tempo non è periodico? Ne isolo un pezzo e lo estendo per periodicità

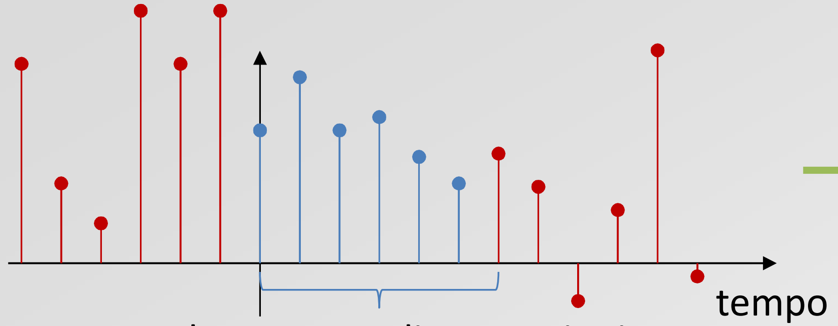
$$\mathfrak{F}\{p[n]\} = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

da cui:

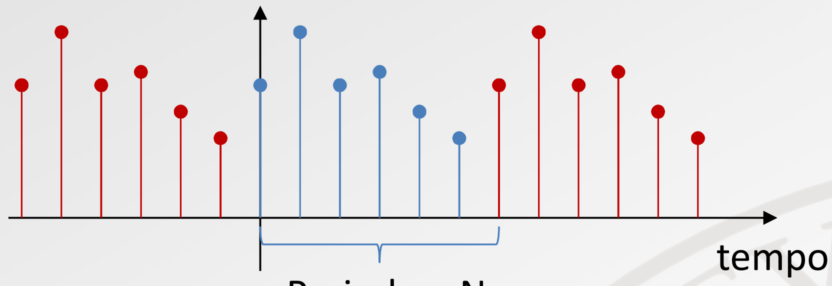
$$\tilde{X}(\omega) = \mathfrak{F}\{\tilde{x}[n]\} = \mathfrak{F}\{x[n]\}\cdot\mathfrak{F}\{p[n]\} = X(\omega)\cdot\frac{2\pi}{N}\sum_{h=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

Il 2π lo perderò per via della moltiplicazione con la porta nel tempo, quando passo in frequenza

Recap!...



Ne prendo un pezzo di N campioni



Il segnale nel tempo non è periodico? Ne isolo un pezzo e lo estendo per periodicità

$$\mathfrak{F}\{p[n]\} = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

da cui:

$$\tilde{X}(\omega) = \mathfrak{F}\{\tilde{x}[n]\} = \mathfrak{F}\{x[n]\}\cdot\mathfrak{F}\{p[n]\} = X(\omega)\cdot\frac{2\pi}{N}\sum_{h=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

Il 2π lo perderò per via della moltiplicazione con la porta nel tempo, quando passo in frequenza

Recap!...

$$\tilde{\mathrm{X}}(\omega) = \mathfrak{F}\{\tilde{x}[\mathrm{n}]\} = \mathfrak{F}\{\mathrm{x}[\mathrm{n}]\} \cdot \mathfrak{F}\{p[\mathrm{n}]\} = \mathrm{X}(\omega) \cdot \frac{2\pi}{N} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{\mathrm{N}}\mathrm{k}\right) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}\left(\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\mathrm{k}\right) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{\mathrm{N}}\mathrm{k}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{\mathrm{N}}\mathrm{k}\right)$$

Ma possiamo limitarci ad un periodo solo (in frequenza) ovvero alla replica in banda base, per cui, dalla serie di Fourier:

$$= \frac{2\pi}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{x}[\mathrm{n}] e^{-j\left(\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\mathrm{k}\right)\mathrm{n}} * \frac{1}{2\pi} W[k] = W[k] * \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{x}[\mathrm{n}] e^{-j\left(\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\mathrm{k}\right)\mathrm{n}} = W[k] * X[k]$$

Chiaramente, se il segnale è periodico e prendo un numero interno di periodi con la mia finestratura, il segnale finestrato e il segnale originale coincidono, quindi è come se non fosse stata fatta alcuna finestratura, e si torna ad avere, come nel caso della serie di Fourier discreta (ma siamo proprio sicuri?)

$$\mathrm{X}[\mathrm{k}] = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{x}[\mathrm{n}] e^{-j\left(\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\mathrm{k}\right)\mathrm{n}}$$

La risoluzione in frequenza o risoluzione spettrale

Data una sequenza lunga N campioni, la DFT è calcolata come:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} x[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)n}$$

Quindi N campioni anche in frequenza. Se ho uno spezzone di lunghezza $L \leq N$, se minore, si deve effettuare uno zero-padding.

La risoluzione in frequenza è data da:

$$\rho = \frac{2\pi}{N}$$

o

$$\rho = \frac{f_s}{N}$$

Frequency bin.

La risoluzione in frequenza o risoluzione spettrale

Data una sequenza lunga N campioni, la DFT è calcolata come:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)n}$$

Quindi N campioni anche in frequenza. Se ho uno spezzone di lunghezza $L \leq N$, se minore, si deve effettuare uno zero-padding.

La risoluzione in frequenza è data da:

$$\rho = \frac{2\pi}{N}$$

o

$$\rho = \frac{f_s}{N}$$

L'informazione data dall'aggiunta degli zeri è una non-informazione, ovvero apparentemente sto ottenendo più punti del previsto e quindi la mia risoluzione spettrale migliora, ma allo stesso tempo i punti che io ho aggiunto non hanno alcun contenuto informativo e pertanto non è possibile ritenere che il contenuto informativo dello spettro cambi.

Zero padding inutile?

In termini di risoluzione in frequenza effettiva sì. Ma…

1. Mi permette di avere uno spettro più definito
2. Mi permette di arrivare a un numero di punti desiderato, pur con un segnale corto (es. FFT)
3. Vedremo in lab che mi permette di migliorare la stima dell'ampiezza dei segnali deterministici

Chiaramente, un conto è aumentare la lunghezza con uno zero padding, altro conto è allungare lo spezzone di segnale considerato, perché quello aiuta in termini di risoluzione spettrale effettiva, non apparente.

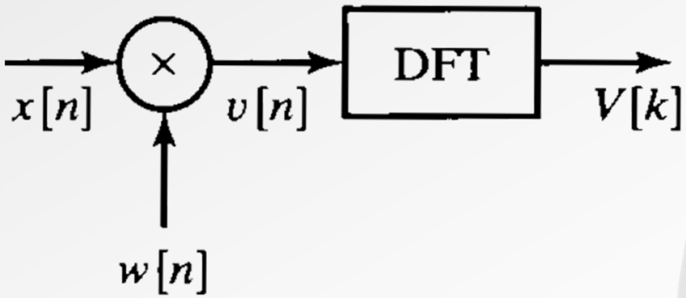
Finestratura

È noto a tutti il problema della finestratura del segnale nel calcolo della DFT.

Prendere uno spezzone di una sequenza x[n] lungo N campioni e prolungarlo per periodicità astrattamente, ma di fatto considerarne solo quegli N campioni, è come dire che nella sommatoria

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} x[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)n}$$

si porta n da –∞ a +∞ ma si moltiplica il segnale per una porta, in modo che sia zero al di fuori dell'intervallo di N campioni riportato nella formula.



Convoluzione circolare

Dalle proprietà della trasformata di Fourier, sappiamo che una moltiplicazione nel dominio del tempo comporta una convoluzione nel dominio della frequenza, quindi lo spettro della porta, che è un sinc, si convolverà con lo spettro del mio segnale.

Sui segnali campionati, la DTFT del segnale è una funzione periodica di periodo 2π. Quindi, la trasformata del prodotto sarà una funzione periodica, e in particolare:

$$DTFT\{x[n] \cdot w[n]\} = V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\theta) W(\omega - \theta) d\theta$$

E nella DFT? Gli spettri sono sequenze, periodiche, quindi semplicemente continua a valere tutto, ma l'integrale diventerà una sommatoria, ovvero:

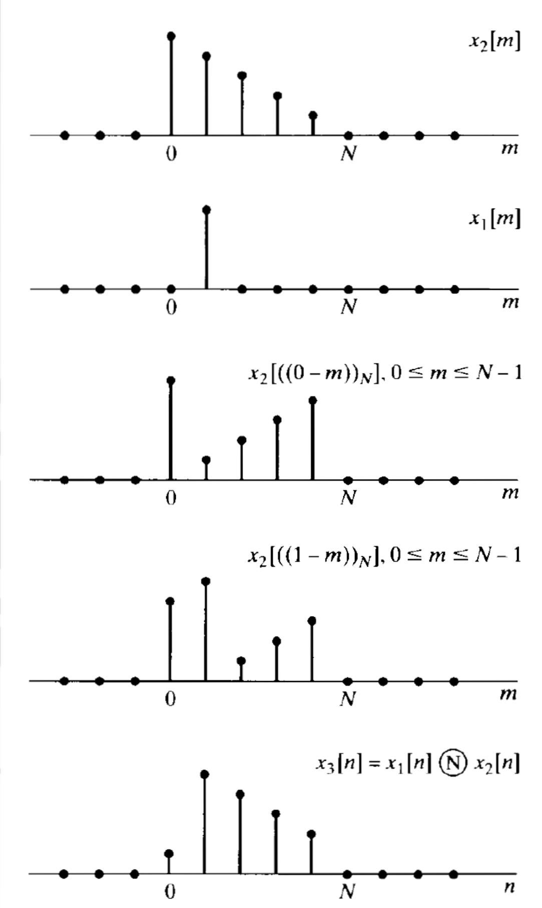
$$DFT\{x[n] \cdot w[n]\} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X[l]\, \mathrm{W}[\mathrm{k} - \mathrm{l}] \Big|_{\text{modulo N}}$$

Convoluzione circolare

$$DFT\{x[n]\cdot w[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X[l]\,\mathrm{W[k-l]}\Big|_{\mathrm{modulo\ N}}$$

e, per la *dualità:*

$$DFT\left\{\sum_{l=0}^{N-1} x[n]\,w[n-m]\Big|_{modulo\ N}\right\} = X[k]\cdot W[k]$$



Finestratura… quindi?

Al netto del fatto che si opera come illustrato per effettuare la convoluzione circolare, e che un prodotto nel tempo è una convoluzione circolare di spettri della DFT, qual è l’effetto? Ovvero, dato che per usare la DFT stiamo prendendo uno spezzone di segnale e replicandolo per periodicità, quel prodotto con quella finestra (segnale porta) che effetti avrà?

Ci sono tre aspetti da considerare ora:

1. stiamo isolando un numero intero di periodi di un segnale periodico? O stiamo considerando segnali deterministici di tipo sinusoidale che presentano una frequenza corrispondente ad una delle frequenze dalla DFT?
2. che effetto ho in termini di leakage spettrale?
3. che effetto ho in termini di risoluzione spettrale?

Finestratura… quindi?

Al netto del fatto che si opera come illustrato per effettuare la convoluzione circolare, e che un prodotto nel tempo è una convoluzione circolare di spettri della DFT, qual è l'effetto? Ovvero, dato che per usare la DFT stiamo prendendo uno spezzone di segnale e replicandolo per periodicità, quel prodotto con quella finestra (segnale porta) che effetti avrà?

Ci sono tre aspetti da considerare ora:

1. stiamo isolando un numero intero di periodi di un segnale periodico? O stiamo considerando segnali deterministici di tipo sinusoidale che presentano una frequenza corrispondente ad una delle frequenze dalla DFT?

Nessun problema: il caso è pari al caso ideale. Potrei avere problemi in caso di padding. Vediamo…

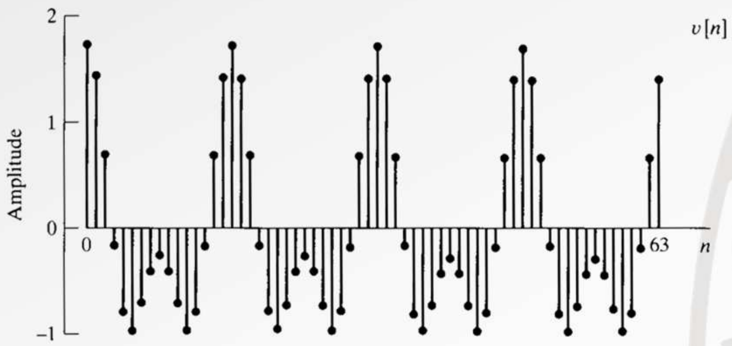
Finestratura… sempre?

Due casi particolari:

- Segnale periodico di cui prendo uno o più periodi esatti
- Segnale periodico le cui componenti sinusoidali hanno una rappresentazione esatta in un valore di frequenza della DFT

Esempio:

$$v[n] = \begin{cases} cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0.75\,cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right) & per\ 0 \leq n \leq 63 \\ 0 & altrove \end{cases}$$



Finestratura... sempre?

Due casi particolari:

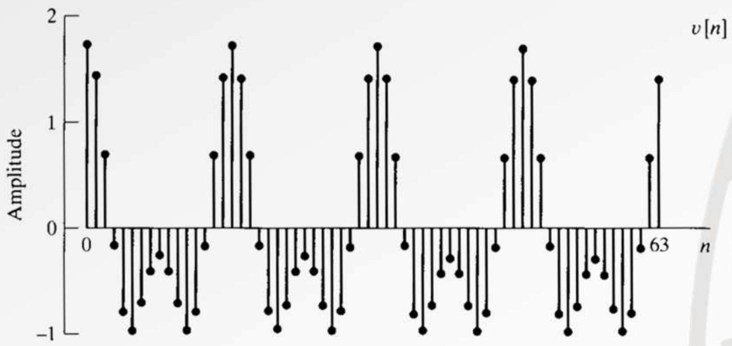
- Segnale periodico di cui prendo uno o più periodi esatti
- Segnale periodico le cui componenti sinusoidali hanno una rappresentazione esatta in un valore di frequenza della DFT

Esempio:

$$v[n] = \begin{cases} cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0.75\, cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right) & per\ 0 \le n \le 63 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

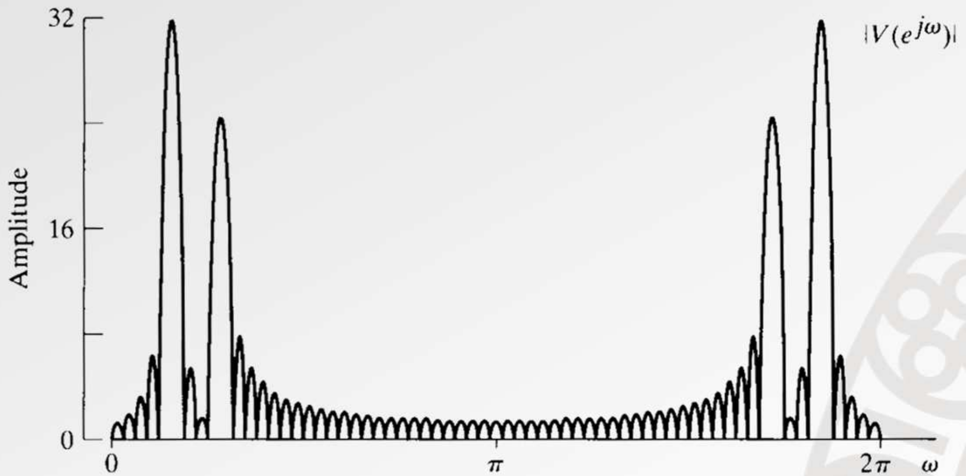
$$\omega_a = \frac{2\pi}{16} = \frac{2\pi 4}{64}$$

$$\omega_b = \frac{2\pi}{8} = \frac{2\pi 8}{64}$$



Finestratura… sempre?

$$v[n] = \begin{cases} cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0.75\,cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right) & per\ 0 \leq n \leq 63 \\ 0 & altrove \end{cases}$$



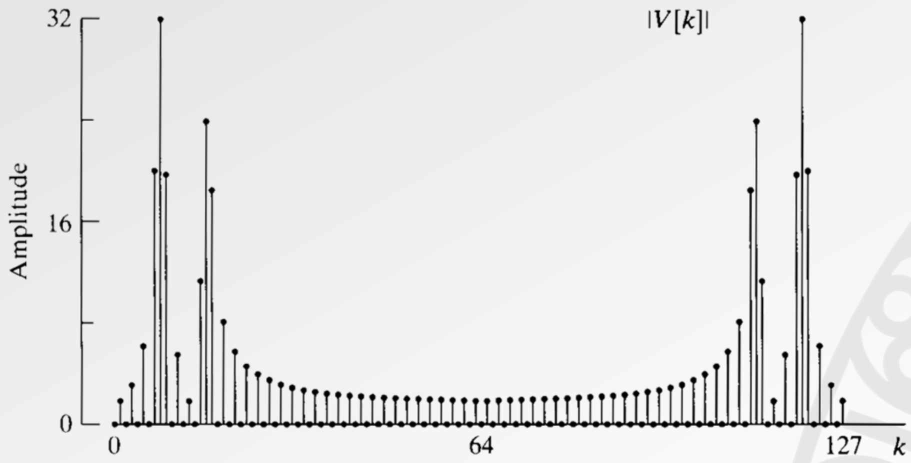
Finestratura… sempre?

$$v[n] = \begin{cases} cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0.75\,cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right) & per\ 0 \le n \le 63 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Che sta succedendo?

Finestratura… sempre?

$$v[n] = \begin{cases} cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0.75\, cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right) & per\ 0 \leq n \leq 63 \\ 0 & altrove \end{cases}$$



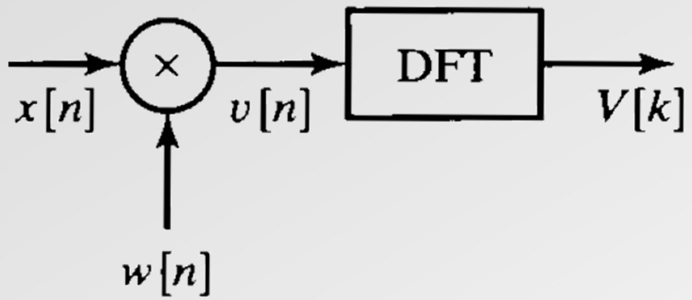
Raddoppiando da 64 a 128 la finestra di analisi con zero padding…

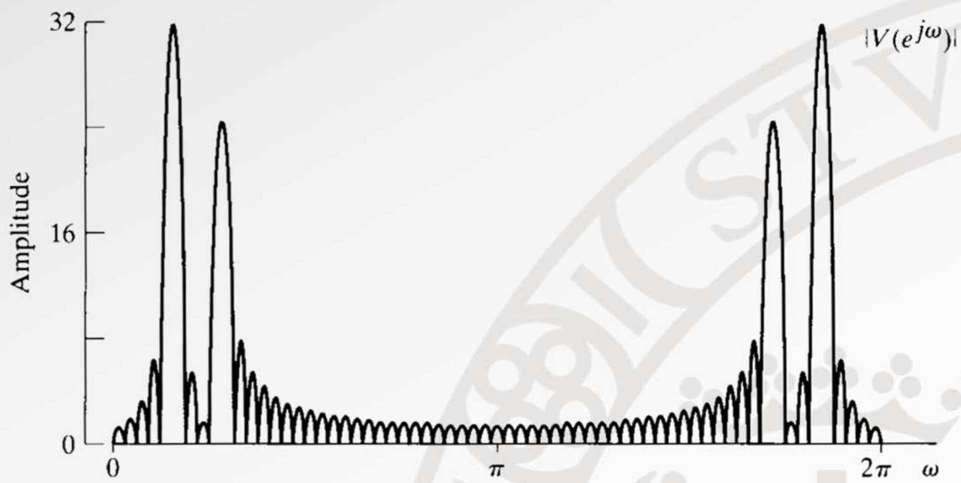
Attenzione anche alla continua!

Spectral leakage

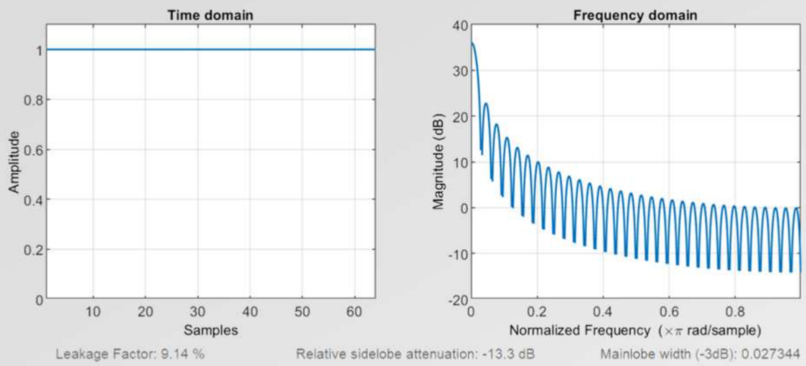
Vorremmo:

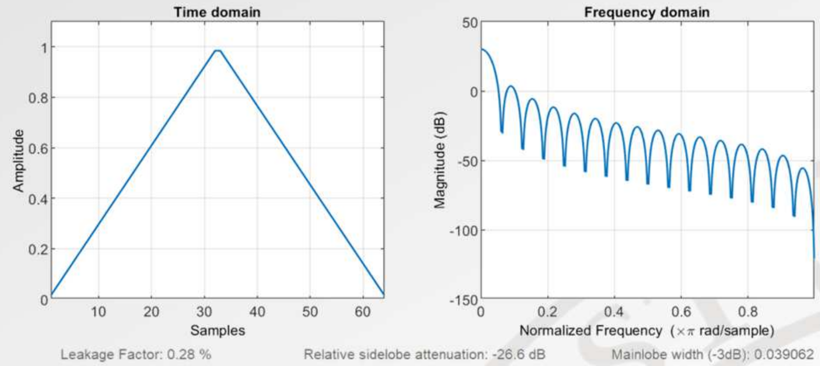
1. Primo lobo stretto (smearing, risoluzione)
2. Altri lobi bassi (leakage)

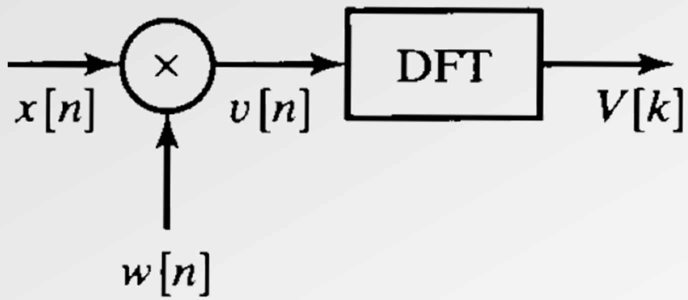


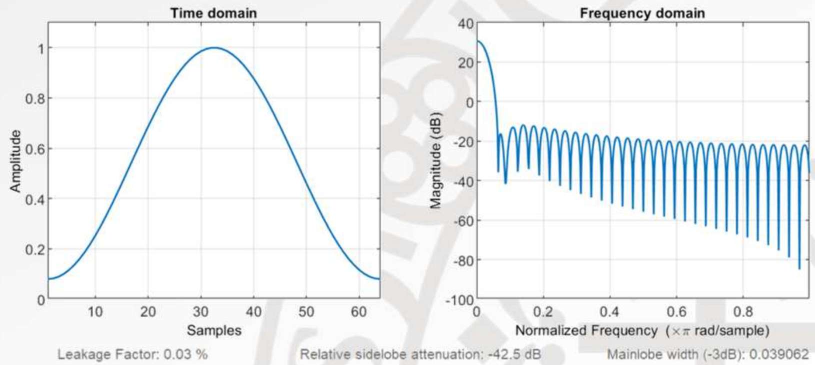


Spectral leakage



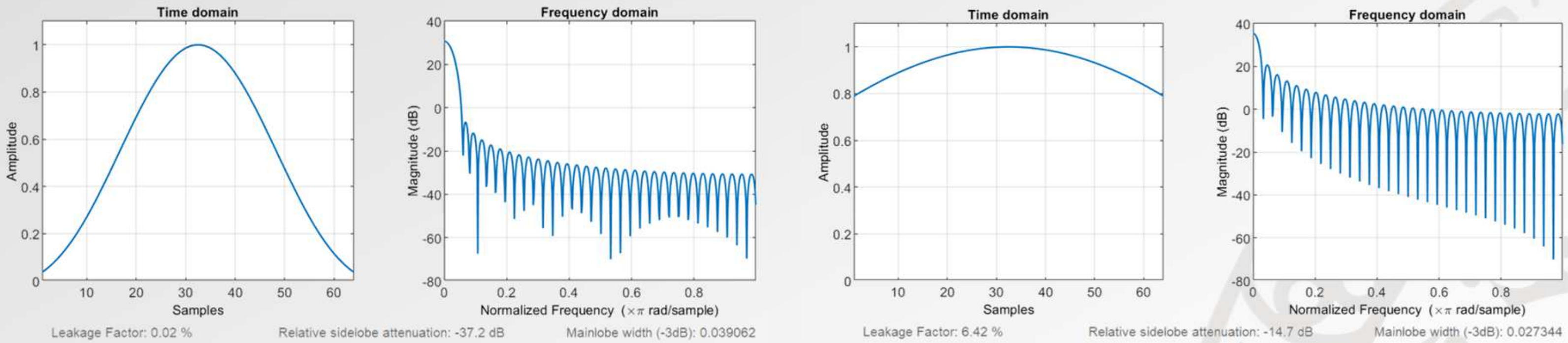






Finestre parametriche (tipo Kaiser)

Esistono alcune finestre, come la finestra di Kaiser, che presentano un parametro in grado di modificare la finestra nel tempo, con l'effetto chiaramente anche in frequenza. In particolare, il parametro β della finestra permette di ottenere una finestra che va a zero di più e più dolcemente al suo crescere, con l'effetto di allargare il lobo principale ma ridurre al contempo l'ampiezza di quelli laterali,



PSD di segnali a tempo discreto

Se consideriamo un segnale deterministico campionato, possiamo ricavare la DTFT e da questa ottenere, a partire dalla relazione di Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

che la PSD è pari a:

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{N}|X(\omega)|^2$$

dato che la potenza nel tempo sarebbe ottenuta dividendo per N campioni (spezzone limitato di un segnale teoricamente infinitamente esteso) la somma dei quadrati dei campioni.

PSD di segnali a tempo discreto

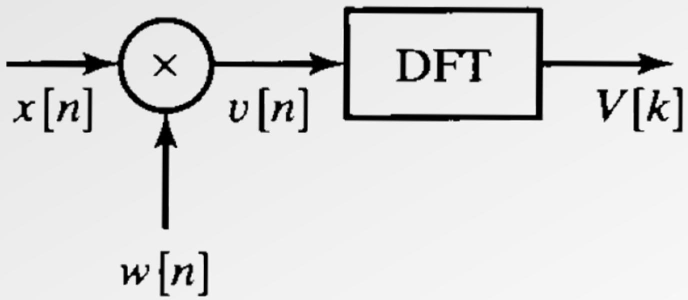
Se consideriamo un segnale deterministico campionato, possiamo ricavare la DTFT e da questa ottenere, a partire dalla relazione di Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

che la PSD è pari a:

$$\boxed{C = \sum_{n=0}^{N-1} |w[n]|^2}$$

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{N}|X(\omega)|^2$$



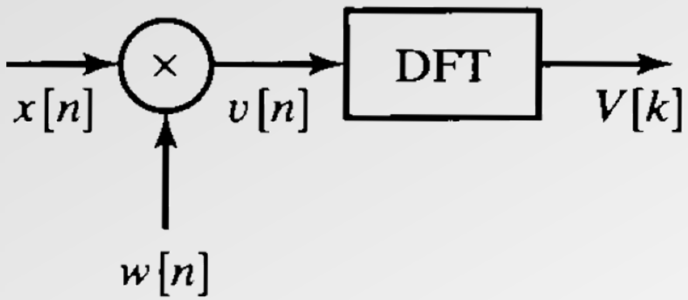
$$P_{vv}(\omega) = \frac{1}{C \cdot N}|V(\omega)|^2$$

Periodogramma

La stima della $P_{vv}(\omega)$ tramite la formula indicata prende il nome di ***periodogramma***, quando $w[n]$ è una finestra rettangolare (un segnale porta), o ***periodogramma modificato*** quando è una finestra di diverso tipo. Si può dimostrare che il valore medio del periodogramma non è nullo; quindi, lo stimatore è polarizzato (biased) e tale bias è tanto minore quanto più lungo è lo spezzone considerato (quindi quanto maggiore è N).

PSD di segnali a tempo discreto

Mediante la DFT?



<u>Avremo ancora</u>

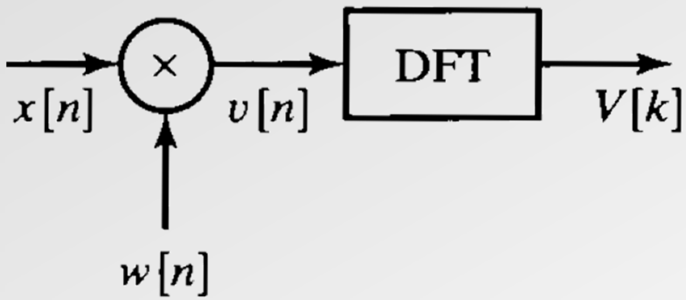
$$P_{vv}[k] = \frac{1}{C \cdot N} |V[k]|^2$$

Questo se lavoriamo in termini di frequenza normalizzata. Nella pratica, però, la PSD è espressa in unità quadre di ampiezza del segnale su Hz (se disponiamo della frequenza di campionamento, cosa che normalmente è vera).

$$P_{vv}[k] = \frac{1}{C \cdot N \cdot f_s} |V[k]|^2$$

PSD di segnali a tempo discreto

Mediante la DFT?



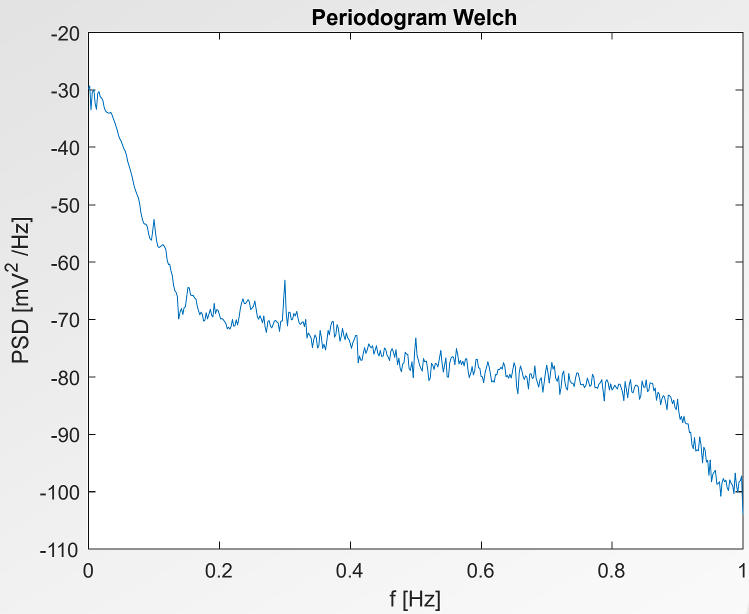
$$P_{vv}[k] = \frac{1}{C \cdot N \cdot f_s} |V[k]|^2$$

Possiamo anche ottenere la formula precedente osservando che, se abbiamo diviso per N già il modulo della DFT, come abbiamo indicato in precedenza nelle formule, allora la PSD mediante periodogramma sarà semplicemente:

$$P_{vv}[k] = \frac{\frac{1}{C}}{\frac{\mathrm{f_s}}{\mathrm{N}}} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} x[n]\mathrm{w[n]} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)n} \right|^2 = \frac{1}{C} \cdot \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{f_s}} \cdot \frac{1}{N^2} |V[k]|^2 = \frac{1}{C \cdot N \cdot f_s} |V[k]|^2$$

PSD di segnali a tempo discreto

Normalmente la PSD è espressa in dB e contempla solo il semispettro positivo (si moltiplica per 2 la potenza prima dip passare al logaritmo).



Tutto questo per i segnali deterministici… e per gli altri?

PSD di segnali non deterministici

Considerazioni:

1. Infinitamente lunghi, non sono segnali di energia
2. dato che la DTFT è definita per segnali assolutamente sommabili, cosa che non è necessariamente vera per un processo casuale, non è detto che esista la DTFT (e quindi la DFT) del segnale che ci interessa.

Si usano allora dei metodi di stima:

1. Diretti (da DFT)
2. Indiretti (da autocorrelazione)

Il teorema di Wiener-Khintchine

Per i segnali deterministici di energia [potenza], il teorema di Wiener-Khintchine dice che la densità spettrale di energia [potenza] può essere ottenuta facendo la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione. Analogamente, e questo ci interessa di più, per un processo casuale WSS, la PSD può essere ottenuta come la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $r_{xx}(\tau) = E[x_t x_{t+\tau}]$. Quindi, la funzione di autocorrelazione e la PSD costituiscono una coppia di Fourier.

Attenzione al fatto che, siccome la PSD non ha un'informazione di fase, così come l'autocorrelazione, non è possibile ricostruire il segnale né dalla sua funzione di autocorrelazione né dalla sua PSD.

Il teorema di Wiener-Khintchine

Dato che il processo è WSS, la nostra funzione di autocorrelazione dipende solo dal lag temporale, e sarà $r_{xx}(\tau)$, a tempo continuo, o $r_{xx}[l]$ a tempo discreto. Quindi, poiché:

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t} dt$$

avremo:

$$PSD(\Omega) = \mathcal{F}\{r_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau)\, e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

E se non è WSS?

Il teorema di Wiener-Khintchine a tempo discreto

La DTFT della funzione di autocorrelazione a tempo discreto (che è una sequenza, quindi) $r_{xx}[l]$ di un processo casuale WSS che genera la sequenza x[n], la PSD può essere espressa come:

$$\mathrm{PSD}(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_{xx}[l] e^{-j\omega l}$$

Si noti come un processo casuale a tempo discreto sia di fatto un insieme di funzioni a tempo discreto (sequenze) e, a parte la discretizzazione del tempo, non cambia molto rispetto alla trattazione vista per i processi casuali a tempo continuo.

Spesso, la PSD è indicata come $P_{xx}(\omega)$ e, in alcuni contesti, è chiamata semplicemente “spettro” o “spettro di potenza” **ma non è formalmente corretto**. Dal momento che stiamo andando a effettuare la sommatoria presente nella formula della DTFT, si richiede che la serie converga, e quindi la funzione di autocorrelazione deve essere assolutamente sommabile.

Il teorema di Wiener-Khintchine a tempo discreto

Poiché la PSD e la funzione di autocorrelazione formano una coppia di Fourier, allora dovrà essere anche che:

$$r_{xx}[l] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\omega)e^{j\omega l}d\omega$$

Si vede da qui come la potenza media del processo, che sappiamo essere pari a $\mathrm{r_{xx}}[0]$, ora diventa semplicemente

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P_{xx}}(\omega)\mathrm{d}\omega$$

ovvero l'integrale su tutto l'intervallo di Nyquist della PSD, divisa per l'ampiezza di tale intervallo (che è 2π).

Si può dimostrare che la PSD di un processo WSS a tempo discreto è una funzione reale di ω e, se il processo è reale, la PSD ha simmetria pari, come ci aspettiamo dalla teoria di base sulla trasformata di Fourier

Stima spettrale mediante autocorrelazione (correlogramma)

Quando abbiamo a che fare con un processo casuale, del quale disponiamo di una sola realizzazione, non è possibile andare a stimare la PSD attraverso la vera funzione di autocorrelazione, in quanto questa prevede il calcolo del valore atteso, e quindi, teoricamente, si dovrebbe disporre di infinite realizzazioni nel nostro ensemble. Ma…

Però, se il processo è ergodico, possiamo assumere che medie temporali e di insieme coincidano, e quindi andare a valutare la funzione di autocorrelazione nel tempo:

$$r_{xx}(\tau) = \langle x(t)\mathrm{x}(t-\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \hat{r}_{\mathrm{xx}}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{x}(t-\tau)dt$$

Dal teorema di Wiener-Khintchine abbiamo che:

$$\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{xx}}(\Omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{x}(t-\tau)dt\right\} = \frac{1}{T}|\mathrm{X}(\Omega)|^2$$

Stima spettrale mediante autocorrelazione (correlogramma)

Se ora facciamo analogo ragionamento su una sequenza campionata, quindi su un processo a tempo discreto di cui disponiamo di uno spezzone di una realizzazione, avevamo visto come potremmo stimare la funzione di autocorrelazione $\hat{r}_{xx}$ come:

$$\hat{r}_{xx}[l] = \langle x[n]x[n-l] \rangle = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N+l+1}^{N-l-1} x[n]x[n-l]$$

o anche:

$$\hat{r}_{xx}[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-l-1} x[n]x[n-l]$$

per l positivo, e $\hat{r}_{xx}[l] = \hat{r}_{xx}[-l]$ per i valori negativi di l , sfruttando la simmetria dell'autocorrelazione.
Ma quale normalizzazione?

Stima spettrale mediante autocorrelazione (correlogramma)

Per essere uno stimatore corretto dovrebbe essere il suo valore atteso pari alla vera r_{xx}. Ora, con le statistiche che si possono realmente fare:

$$\mathrm{E}\left[\hat{r}_{xx}[\mathrm{l}]\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{N-l-1} x[n]\mathrm{x}[n-l]\right] = \sum_{n=0}^{N-l-1} \mathrm{E}\left[x[n]\mathrm{x}[n-l]\right] = (\mathrm{N}-\mathrm{l})\mathrm{r}_{xx}[\mathrm{l}]$$

Quindi, il fattore di normalizzazione non polarizzato sarebbe $\frac{1}{\mathrm{N}-\mathrm{l}}$ (divisione per il numero di prodotti che effettivamente si fanno) e non $\frac{1}{\mathrm{N}}$ (divisione per la lunghezza della sequenza).

Ma… al crescere del lag la varianza aumenta!

Stima spettrale mediante autocorrelazione (correlogramma)

Allora, anche lo stimatore polarizzato con fattore $\frac{1}{N}$ *può essere considerato*. In questo caso, però:

$$E\left[\hat{r}_{xx}[l]\right] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-l-1} x[n]x[n-l]\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-l-1} E\left[x[n]x[n-l]\right] = \left(\frac{N-l}{N}\right) r_{xx}[l]$$

Considerando anche i possibili valori di *l* negativi, diventa:

$$E\left[\hat{r}_{xx}[l]\right] = \left(\frac{N-|l|}{N}\right) r_{xx}[l]$$

Osserviamo ora che $\frac{\mathrm{N}-|\mathrm{l}|}{\mathrm{N}} = 1 - \frac{|\mathrm{l}|}{\mathrm{N}}$ è la descrizione di una finestra triangolare di ampiezza unitaria e durata l.
Chiaramente, per N che tende a infinto, lo stimatore tende a una stima non polarizzata comunque, per l limitato.
Ma allora, per il teorema di Wiener-Khintchine, la PSD sarà la trasformata di $\left(\frac{\mathrm{N}-|\mathrm{l}|}{\mathrm{N}}\right)\mathrm{r}_{\mathrm{xx}}[\mathrm{l}]$, ovvero della vera funzione di autocorrelazione, finestrata con una finestra triangolare (detta anche finestra di Bartlett).

- Lo stimatore non è consistente
- Leakage/smearing

Stima spettrale

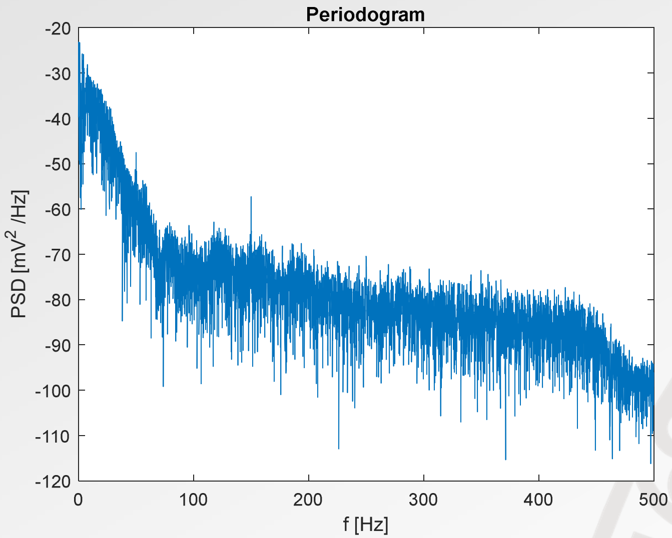
Diversi metodi:

- Classici (non parametrici):

1. Diretti
2. Indiretti

- Parametrici

1. MA
2. AR
3. ARMA



Stima spettrale

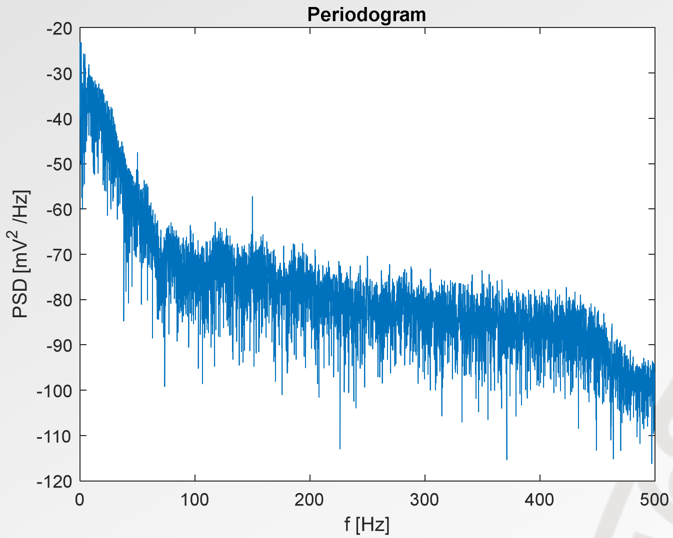
Diversi metodi:

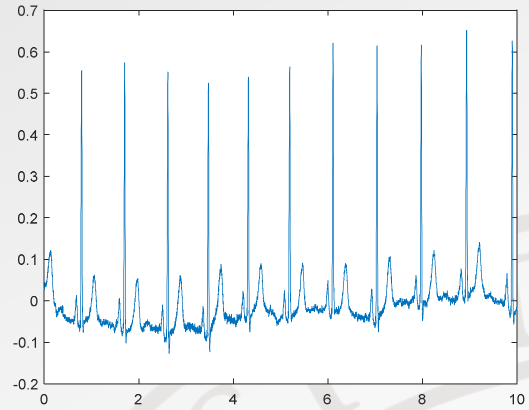
- Classici (non parametrici):

1. Diretti
2. Indiretti

- Parametrici

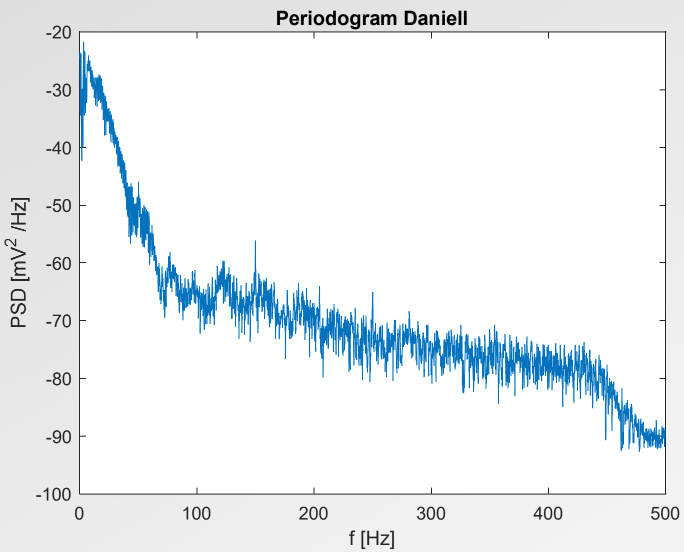
1. MA
2. AR
3. ARMA

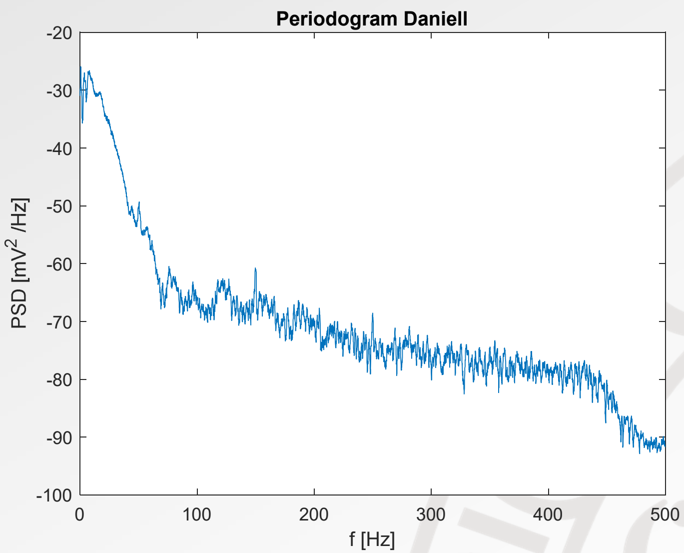




Periodogramma di Daniell

L’approccio più semplice è quello di effettuare una media mobile sul periodogramma ottenuto in precedenza.





Metodo di Bartlett

Dato un segnale composto da N campioni, estraiamo K segmenti adiacenti (senza sovrapposizione fra loro), ognuno di lunghezza M, quindi $M = \frac{N}{K}$. Per ogni epoca, viene calcolato il periodogramma:

$$P^{(i)}{}_{xx}(\omega) = \frac{1}{M}|X_i(\omega)|^2$$

Quindi, si effettua la media dei K spettri:

$$\widehat{P}_{xx}(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1} P^{(i)}{}_{xx}(\omega)$$

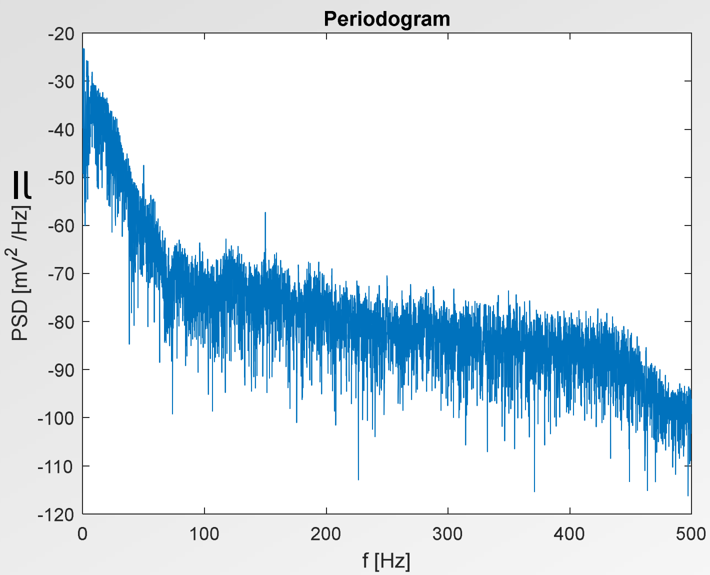
Il valore atteso non cambia rispetto al singolo segmento, ma la varianza si riduce di 1/K.

Ancora effetto della finestra triangolare...

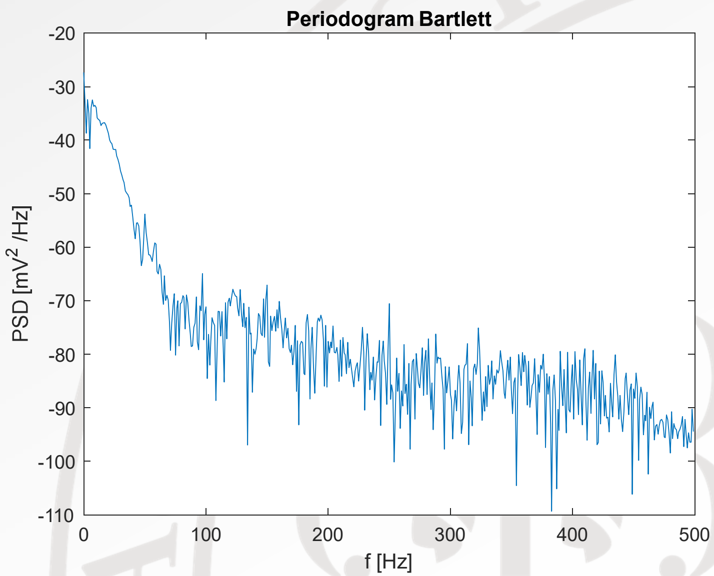
Metodo di Bartlett

Dato un segnale composto da N campioni, estraiamo K segmenti adiacenti (senza sovrapposizione fra loro), ognuno di lunghezza M, quindi $M = \frac{N}{K}$. Per ogni epoca, viene calcolato il periodogramma:

$$P^{(i)}{}_{xx}(\omega) = \frac{1}{M}|X_i(\omega)|^2$$

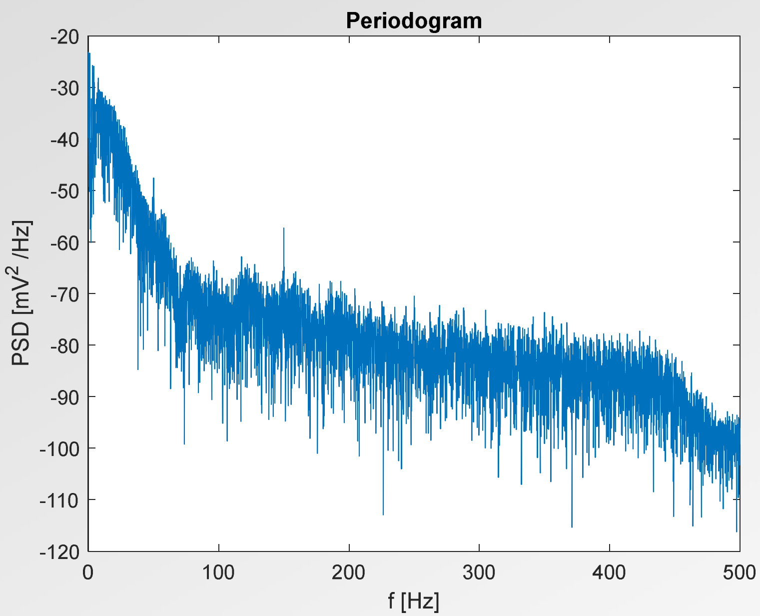


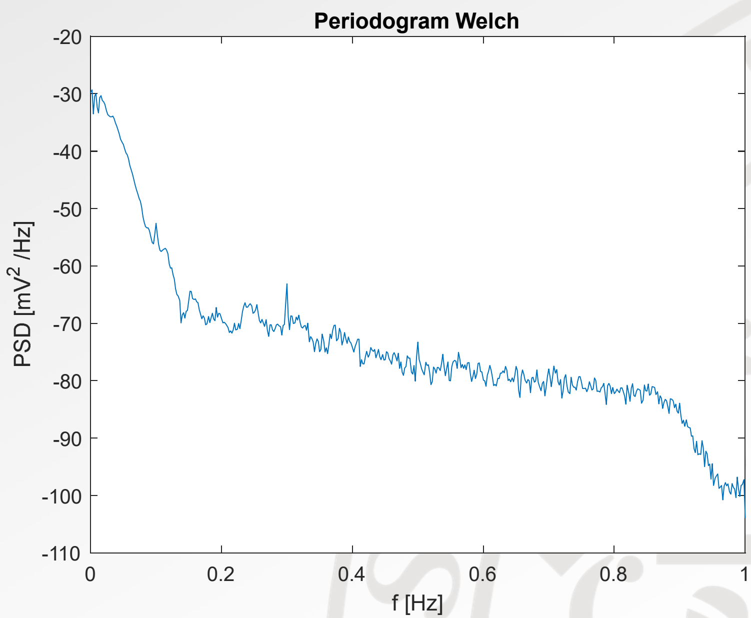
$$\widehat{P}_{xx}(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1} P^{(i)}{}_{xx}(\omega)$$



Metodo di Welch

È un Bartlett con overlap e finestratura diversa. Si può dimostrare che il valore atteso è lo stesso della singola PSD mentre la varianza è ridotta di una quantità circa uguale al numero di epoche che analizziamo.



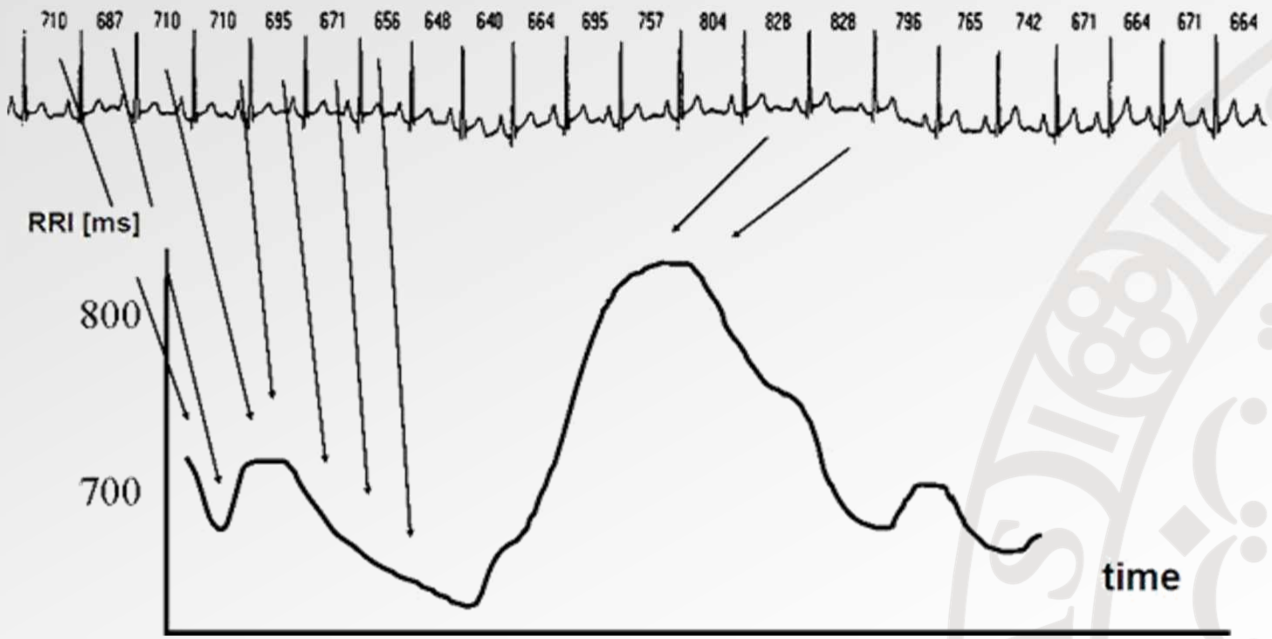


E se i campioni non sono equispaziati?

Quando mai ci potrebbe capitare?

E se i campioni non sono equispaziati?

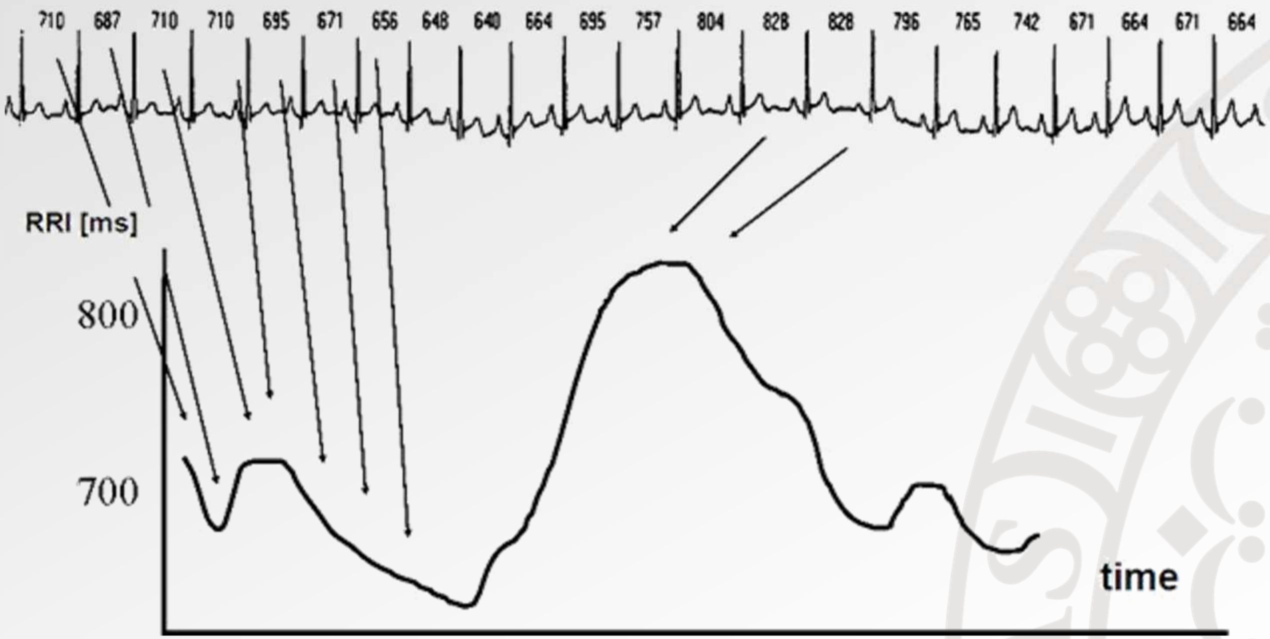
Quando mai ci potrebbe capitare?



E se i campioni non sono equispaziati?

Abbiamo due strade:

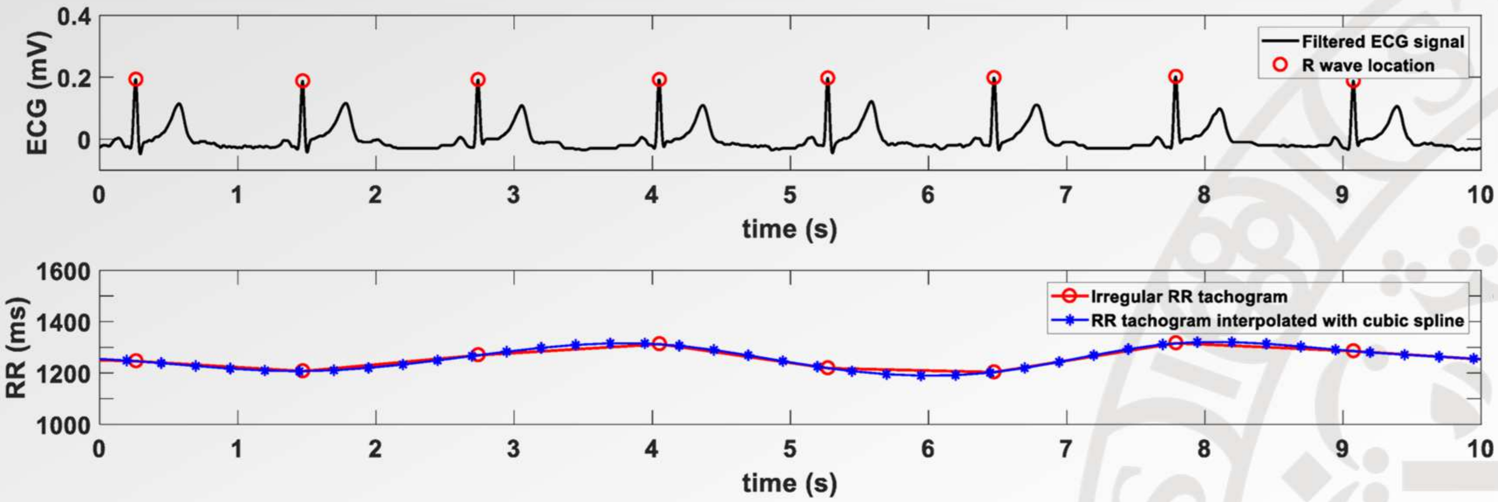
- "Ricampioniamo" il segnale interpolandolo
- Usiamo una tecnica di analisi della PSD per campioni non equispaziati nel tempo



E se i campioni non sono equispaziati?

Abbiamo due strade:

- "Ricampioniamo" il segnale interpolandolo
  - Si può usare una spline cubica (tipicamente ridefinendo asse dei tempi a 4Hz di campionamento)



E se i campioni non sono equispaziati?

Abbiamo due strade:

- "Ricampioniamo" il segnale interpolandolo
- Usiamo una tecnica di analisi della PSD per campioni non equispaziati nel tempo
  - Periodogramma di Lomb-Scargle

$$X(\omega) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}\right|^2 = \frac{1}{N}\left\{\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos(\omega n)\right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin(\omega n)\right]^2\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$X(\omega) = \frac{A^2}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\big(2\pi f(t_n - \tau)\big)\right]^2 + \frac{B^2}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin\big(2\pi f(t_n - \tau)\big)\right]^2$$

E se i campioni non sono equispaziati?

Abbiamo due strade:

- "Ricampioniamo" il segnale interpolandolo
- Usiamo una tecnica di analisi della PSD per campioni non equispaziati nel tempo
  - Periodogramma di Lomb-Scargle

$$PSD_{Lomb}(\omega) = \frac{1}{2\sigma^2}\left\{\frac{\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(2\pi f\left(t_n-\tau\right)\right)\right]^2}{\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2\left(2\pi f\left(t_n-\tau\right)\right)} + \frac{\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin\left(2\pi f\left(t_n-\tau\right)\right)\right]^2}{\sum_{n=0}^{N-1}\sin^2\left(2\pi f\left(t_n-\tau\right)\right)}\right\}$$

$$X(\omega) = \frac{A^2}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(2\pi f\left(t_n-\tau\right)\right)\right]^2 + \frac{B^2}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin\left(2\pi f\left(t_n-\tau\right)\right)\right]^2$$

E se i campioni non sono equispaziati?

Abbiamo due strade:

- "Ricampioniamo" il segnale interpolandolo
- Usiamo una tecnica di analisi della PSD per campioni non equispaziati nel tempo
  - Periodogramma di Lomb-Scargle

$$PSD_{Lomb}(\omega) = \frac{1}{2\sigma^2}\left\{\frac{\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(2\pi f(t_n-\tau)\right)\right]^2}{\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2\left(2\pi f(t_n-\tau)\right)} + \frac{\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin\left(2\pi f(t_n-\tau)\right)\right]^2}{\sum_{n=0}^{N-1}\sin^2\left(2\pi f(t_n-\tau)\right)}\right\}$$

$$\tau = \frac{1}{4\pi f} tan^{-1}\left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1}\sin(4\pi f t_n)}{\sum_{n=0}^{N-1}\cos(4\pi f t_n)}\right)$$

Metodo di Blackman e Tukey

È un metodo indiretto non parametrico di stima spettrale. La funzione di autocorrelazione a tempo discreto viene esplicitamente finestrata nel dominio del tempo (del lag). Il razionale è lo stesso visto per la normalizzazione biased dell'autocorrelazione.

Una volta finestrata la funzione di autocorrelazione, la si trasforma con Fourier per ottenere il correlogramma di Blackman e Tukey.

Per costruzione, se la funzione di autocorrelazione rimane definita con il fattore di normalizzazione biased 1/N, è come se la funzione di autocorrelazione fosse moltiplicata, di fatto, per due finestre: quella implicita di Bartlett (triangolare) legata al fattore di normalizzazione, e quella scelta nel metodo di Blackman e Tukey (→ doppia convoluzione). Ma una finestra già esisteva... per avere smoothing quanto deve essere grande la seconda?

Metodo di Blackman e Tukey

È un metodo indiretto non parametrico di stima spettrale. La funzione di autocorrelazione a tempo discreto viene esplicitamente finestrata nel dominio del tempo (del lag). Il razionale è lo stesso visto per la normalizzazione biased dell'autocorrelazione.

Una volta finestrata la funzione di autocorrelazione, la si trasforma con Fourier per ottenere il correlogramma di Blackman e Tukey.

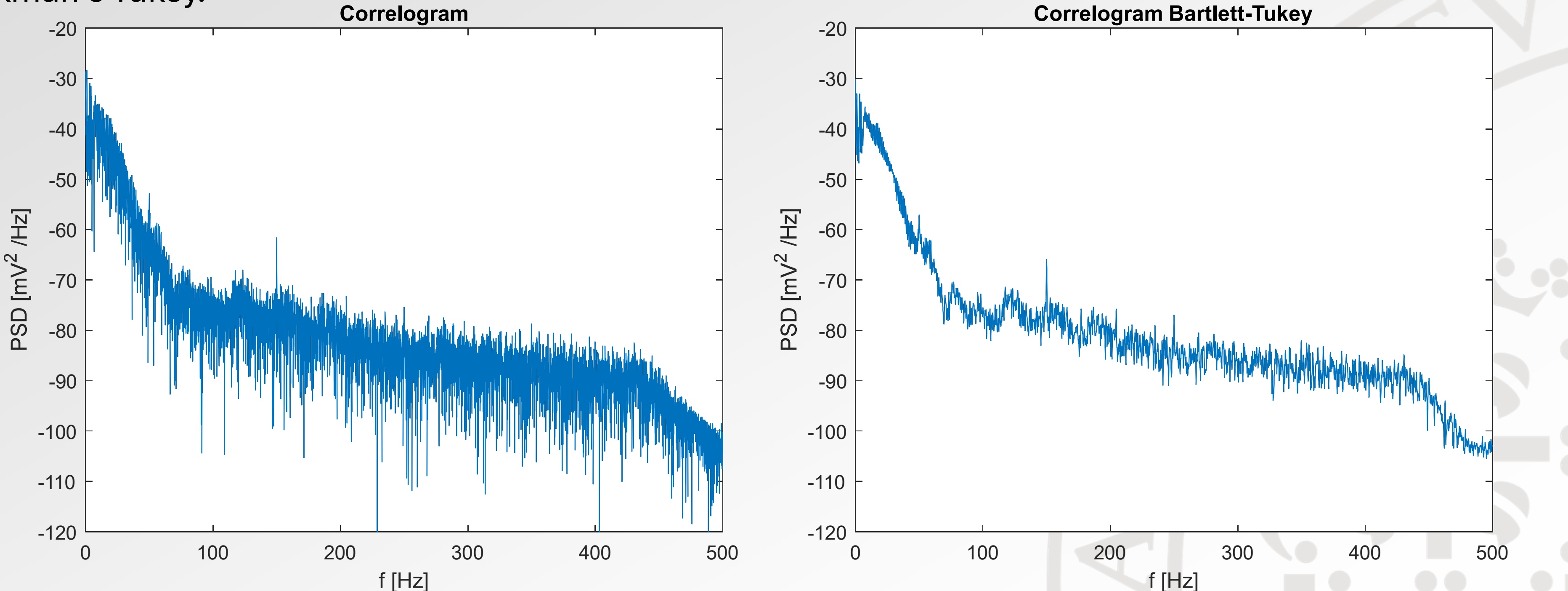
Per costruzione, se la funzione di autocorrelazione rimane definita con il fattore di normalizzazione biased 1/N, è come se la funzione di autocorrelazione fosse moltiplicata, di fatto, per due finestre: quella implicita di Bartlett (triangolare) legata al fattore di normalizzazione, e quella scelta nel metodo di Blackman e Tukey (→ doppia convoluzione). Ma una finestra già esisteva... per avere smoothing quanto deve essere grande la seconda?

Dovrà essere di lunghezza minore!

Metodo di Blackman e Tukey

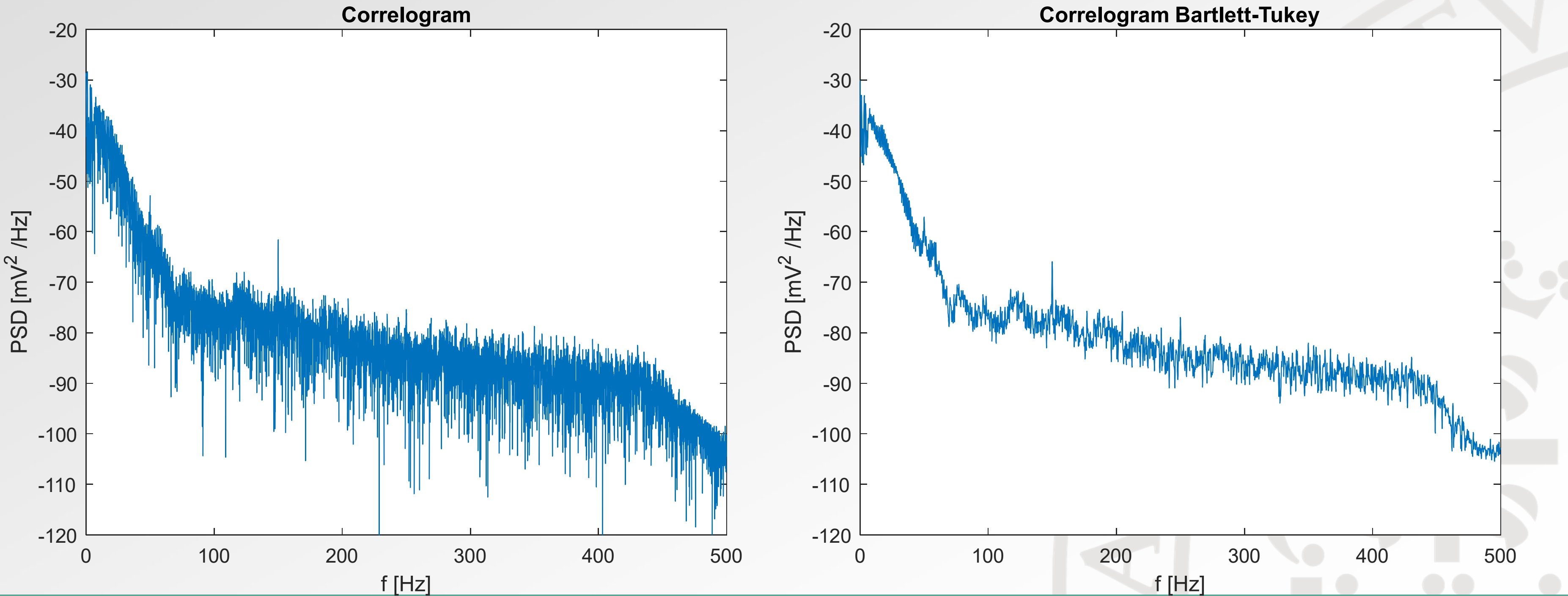
È un metodo indiretto non parametrico di stima spettrale. La funzione di autocorrelazione a tempo discreto viene esplicitamente finestrata nel dominio del tempo (del lag). Il razionale è lo stesso visto per la normalizzazione biased dell'autocorrelazione.

Una volta finestrata la funzione di autocorrelazione, la si trasforma con Fourier per ottenere il correlogramma di Blackman e Tukey.



Metodo di Blackman e Tukey

Si dimostra che il valore atteso della PSD è ovviamente gravato dalla convoluzione con la finestra scelta, mentre la varianza ha un'espressione molto complessa da valutare ma, sotto diverse condizioni, che includono che la banda della finestra adottata sia più stretta di quella del segnale di interesse, si può dimostrare che la varianza è variata di un fattore pari alla media quadratica dei valori della finestra utilizzati.



Metodi parametrici

I metodi non parametrici sono relativamente semplici da capire e offrono buone prestazioni. Il problema principale è il trade-off fra la risoluzione spettrale e la lunghezza del segnale disponibile.

Nel momento in cui il segnale è lungo abbastanza, l'analisi mediante periodogramma o correlogramma, anche modificati, con metodi quindi diretti o indiretti non parametrici, è efficace, sebbene risenta del problema della finestratura (leakage e smearing spettrali, che possono nascondere segnali di debole intensità).

Il problema intrinseco dei metodi non parametrici è che tutti si basano sul fatto che la stima dell'autocorrelazione (o il segnale a tempo discreto, direttamente) sia nulla da un dato punto in avanti → risoluzione spettrale. Peraltro, la DFT assume implicitamente che il segnale sia periodico di periodo N.

I metodi parametrici partono dall'assunto che si possa modellare il processo casuale che genera i segnali, così da avere una lunghezza infinita. Come?

Modellando un processo come l'uscita di un filtro