

Controlli automatici

Stabilità di sistemi dinamici LTI
Stabilità esterna e interna di sistemi di controllo.

Prof. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Formalizziamo e indaghiamo le proprietà di **stabilità di sistemi dinamici LTI** e di **sistemi di controllo lineari in retroazione**.

I sistemi dinamici LTI possono essere distinti in tre categorie

*Sistemi dinamici **asintoticamente stabili** - AS*

*Sistemi dinamici stabili (**semplicemente stabili**) - SS*

*Sistemi dinamici **instabili** - I*

Le proprietà di AS, SS, I dipendono esclusivamente dalla posizione nel piano dei poli della FdT

Sistemi dinamici *asintoticamente stabili* - AS

*Hanno **tutti i poli** strettamente contenuti nel semipiano sinistro*

Sistemi dinamici *semplicemente stabili* - SS

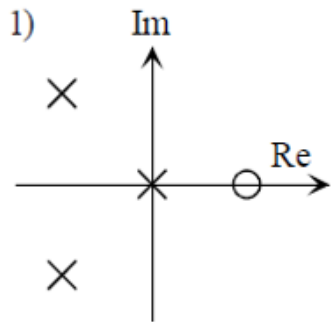
*Hanno uno o più poli **semplici** sull'asse immaginario*

Non hanno poli nel semipiano destro

Sistemi dinamici *instabili* - I

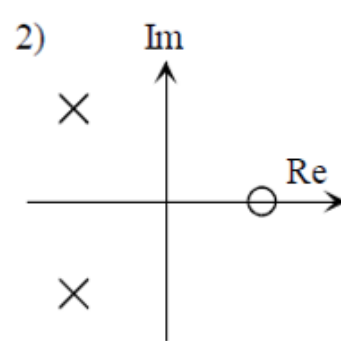
*Hanno almeno un polo nel semipiano destro oppure uno o più poli **multipli** sull'asse immaginario*

$$G_1(s) = \frac{s - 1}{s(s^2 + s + 1)}$$



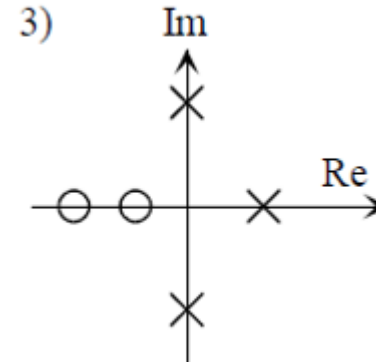
SS

$$G_2(s) = \frac{s - 1}{s^2 + s + 1}$$



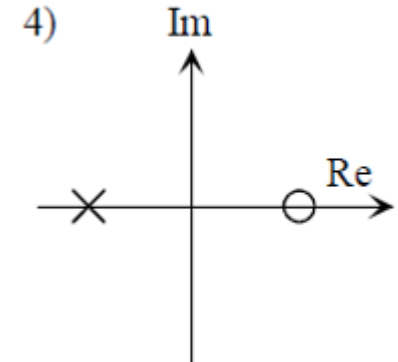
AS

$$G_3(s) = \frac{(s + 2)(s + 3)}{(s^2 + 1)(s - 1)}$$



I

$$G_4(s) = \frac{(s - 2)}{(s + 1)}$$



AS

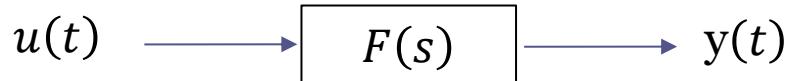
$$G_5(s) = \frac{s - 1}{s^2(s^2 + s + 1)}$$

Instabile

$$G_6(s) = \frac{s + 1}{s^2(s^2 + 1)}$$

Instabile

Una FdT $F(s)$ viene detta **asintoticamente stabile** se tutti i suoi poli hanno parte reale negativa

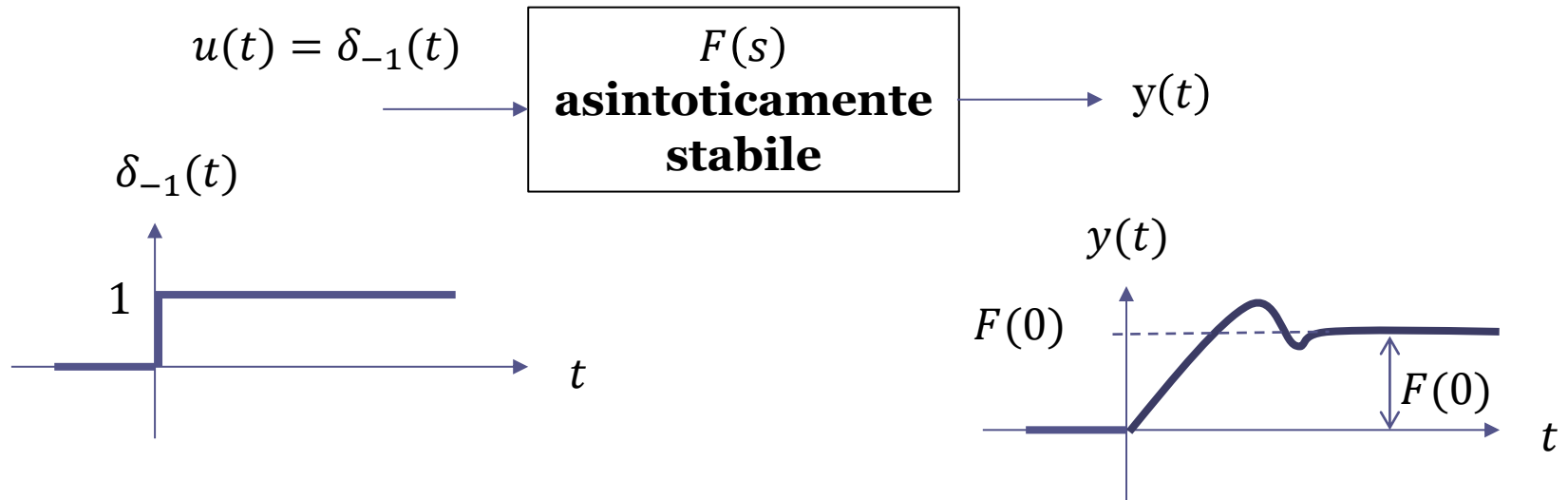


Un sistema dinamico **asintoticamente stabile** è tale che se riceve un ingresso nullo ($u(t) = 0$) la variabile di uscita tende asintoticamente a zero, mentre se viene applicato in ingresso un segnale costante ($u(t) = U^*$) l'uscita tende asintoticamente verso un valore costante ($y(t) \rightarrow Y^*$ per $t \rightarrow \infty$)

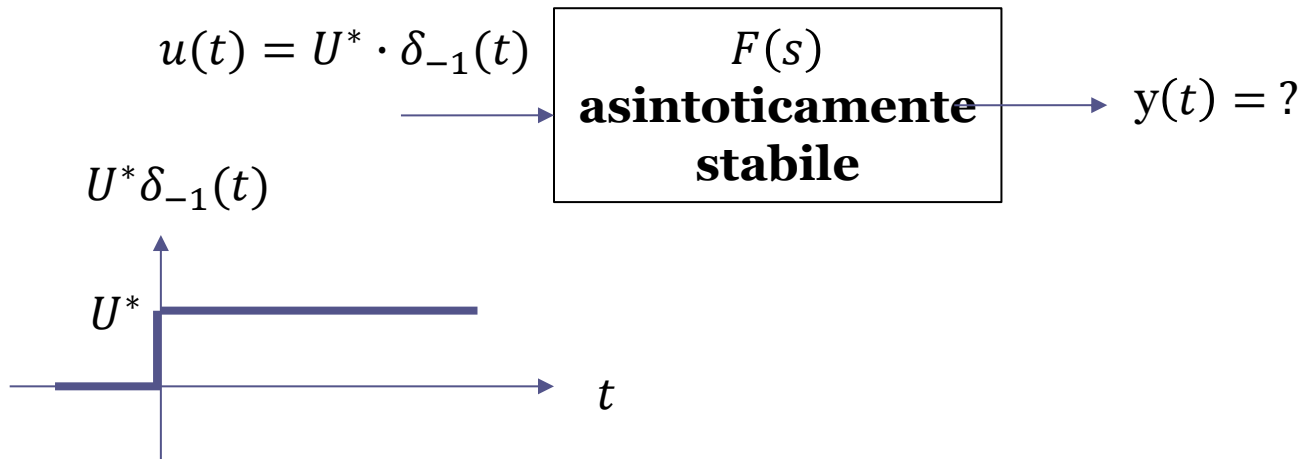
Si dimostra con facilità mediante il teorema del valore finale (fatelo per esercizio) che la risposta $y(t)$ di un sistema dinamico $F(s)$ **asintoticamente stabile** al gradino di ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$ converge al valore costante di regime

$$Y^* = F(0)$$

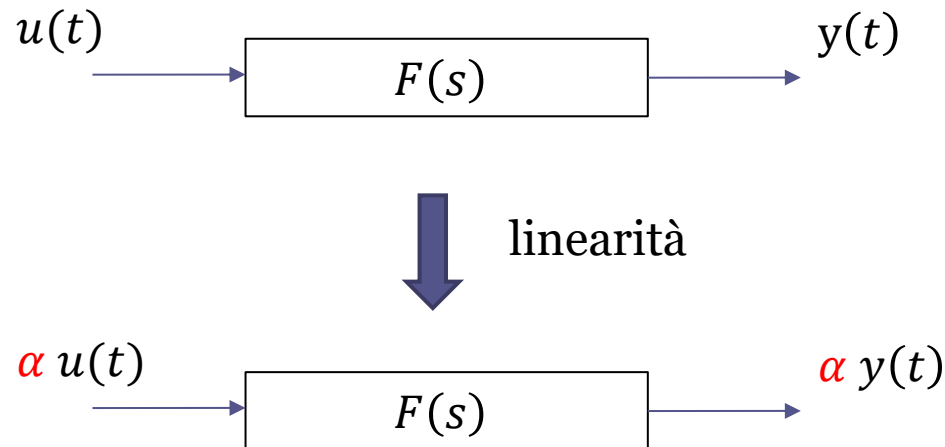
$$F(0) = \text{guadagno statico della } F(s)$$



Possiamo desumere, sulla base di questo risultato, quale sarà il comportamento della variabile di uscita in risposta ad un gradino in ingresso di **ampiezza non unitaria** ?



Applicando la proprietà di linearità possiamo desumere quale sarà il comportamento della variabile di uscita in risposta ad un gradino in ingresso di **ampiezza non unitaria**.



Se un sistema LTI risponde ad un arbitrario ingresso $u(t)$ con un segnale di uscita $y(t)$ allora la sua risposta al segnale di ingresso $\alpha u(t)$, dove α è un coefficiente reale qualunque, sarà il segnale di uscita $\alpha y(t)$

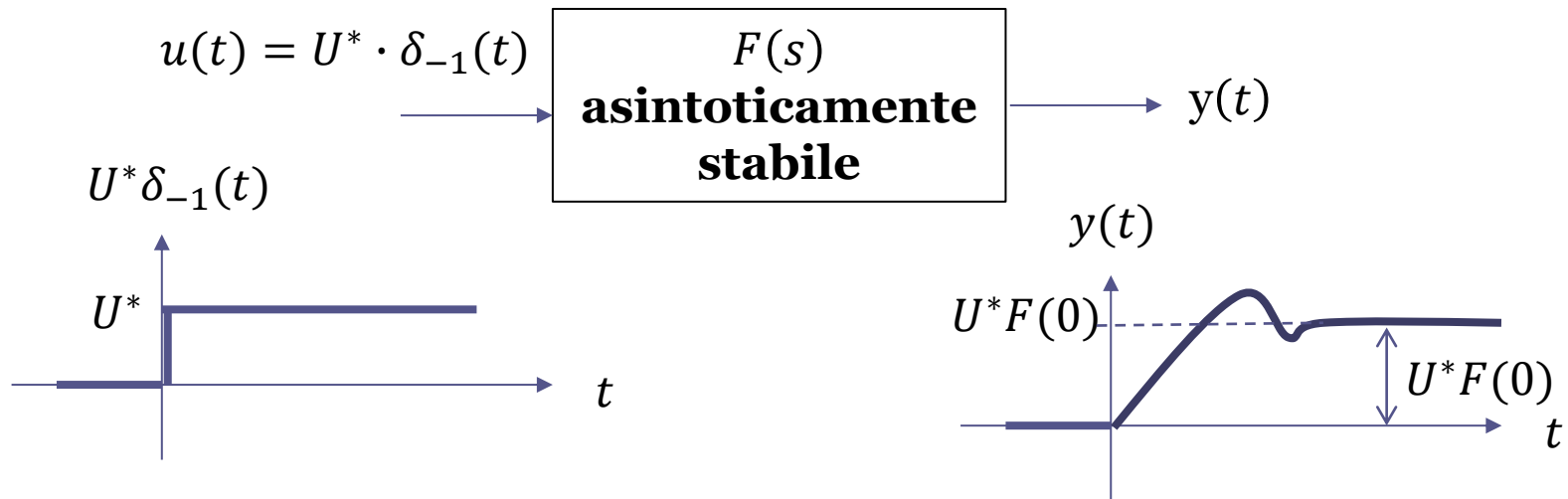
Si può pertanto affermare che:

TEOREMA FONDAMENTALE DELLA RIPOSTA AL GRADINO (T.F.R.G.)

La risposta $y(t)$ di un sistema dinamico $F(s)$ **asintoticamente stabile** al gradino di ingresso $u(t) = U^* \cdot \delta_{-1}(t)$ converge al valore costante di regime

$$Y^* = U^* \cdot F(0)$$

$F(0) =$ **guadagno statico della $F(s)$**

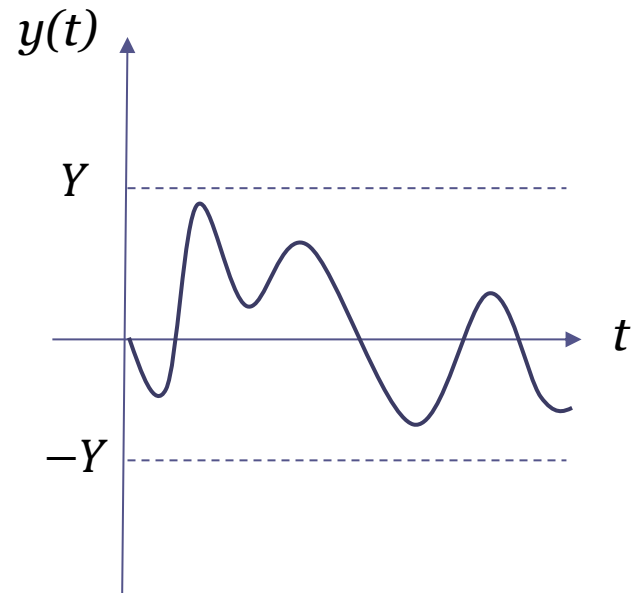
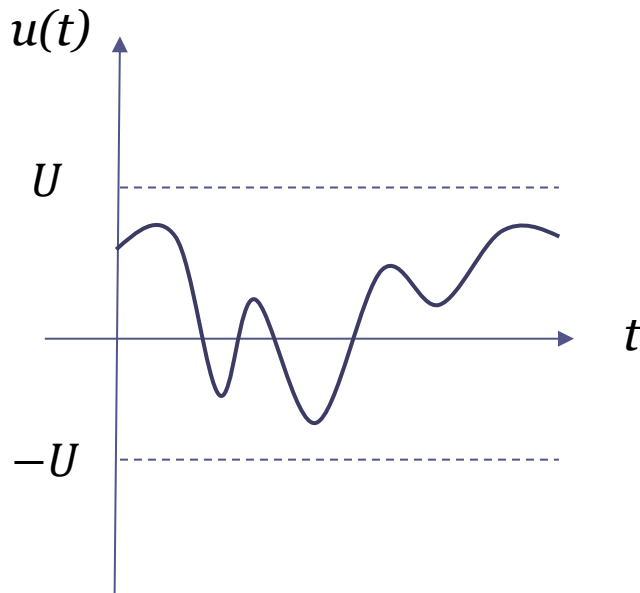


Sistemi dinamici **asintoticamente stabili** - AS

Con ingresso **nullo** ($u(t) = 0$) la variabile di uscita tende asintoticamente a **zero** ($y(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$)

Con ingresso **costante** ($u(t) = U^*$) l'uscita tende asintoticamente verso un valore **costante** ($y(t) \rightarrow Y^*$ per $t \rightarrow \infty$, con $Y^* = U^* \cdot F(0)$)

Con ingresso **limitato** ($|u(t)| \leq U$) la variabile di uscita si mantiene sempre **limitata** ($|y(t)| \leq Y$)



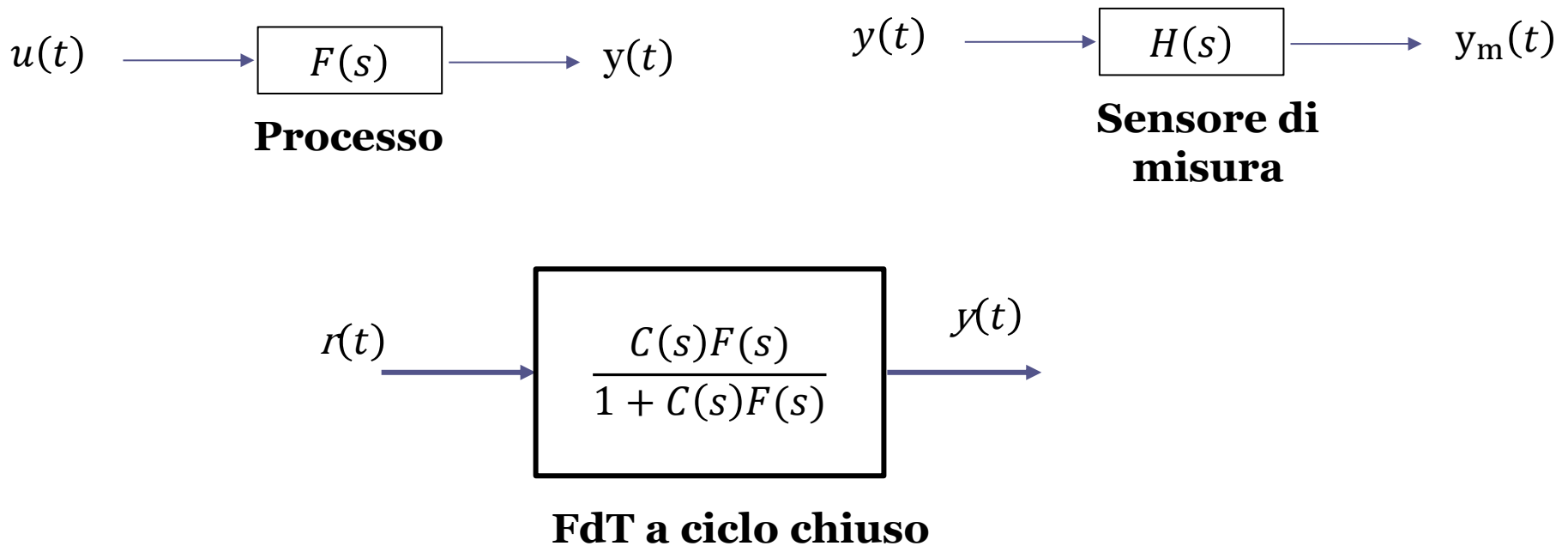
Sistemi dinamici semplicemente stabili - SS

Con ingresso **nullo** ($u(t) = 0$) la variabile di uscita si mantiene sempre limitata ($|y(t)| \leq Y$)

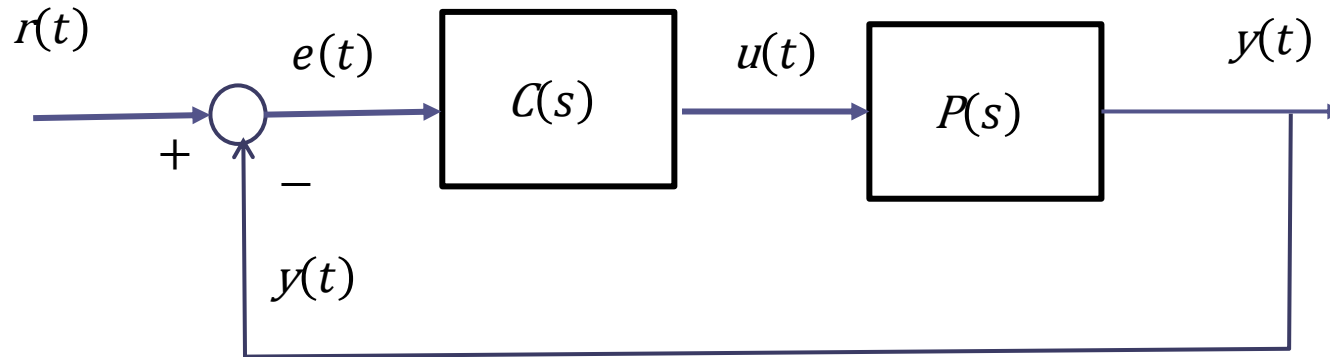
Sistemi dinamici instabili - I

La variabile di uscita generalmente **diverge** ($|y(t)| \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$)
eccetto che in corrispondenza di determinate e specifiche condizioni iniziali e segnale di ingresso

Il sistema dinamico (AS, SS, o I) può rappresentare la dinamica del processo da controllare, oppure la FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita, oppure il controllore, oppure ancora il modello matematico di un sensore di misura

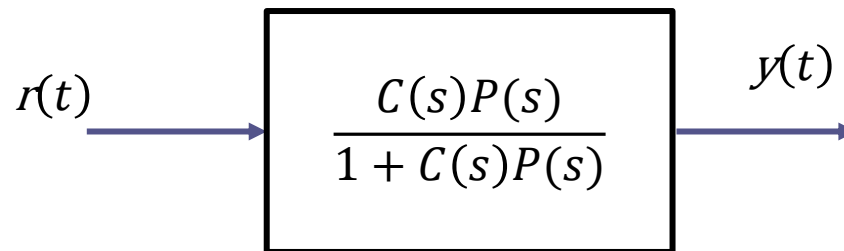


Ora approfondiamo l'analisi di ciò che succede nel momento in cui un sistema dinamico $P(s)$ (asintoticamente stabile, stabile, o instabile) viene inserito in un sistema di controllo in retroazione.



Le proprietà del sistema vengono «alterate» grazie alla retroazione, cioè grazie al fatto che l'uscita del sistema viene retroazionata e influisce quindi direttamente sul segnale applicato in ingresso all'impianto.

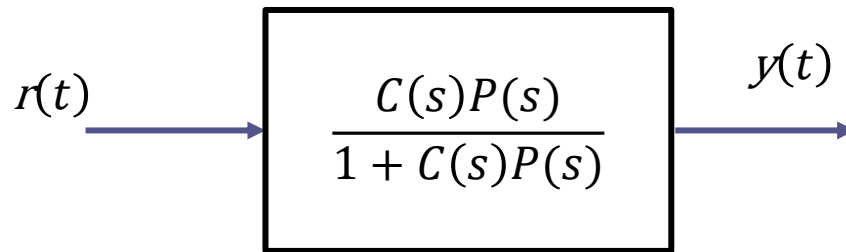
Di fatto, siamo interessati ad imporre le caratteristiche desiderate al sistema a ciclo chiuso. Indipendentemente dal fatto che il processo $P(s)$ da controllare sia as. stabile, stabile o instabile il nostro compito è quello di **progettare il controllore $C(s)$ per fare in modo che il sistema a ciclo chiuso**



sia asintoticamente stabile e tale inoltre da garantire una risposta caratterizzata una evoluzione temporale soddisfacente (ad esempio in termini di durata del transitorio, o della presenza di sovraelongazione o oscillazioni contenute).

Altre specifiche di progetto si riferiscono alla capacità di attenuare, o compensare del tutto, l'effetto sulla variabile di uscita di ingressi disturbanti.

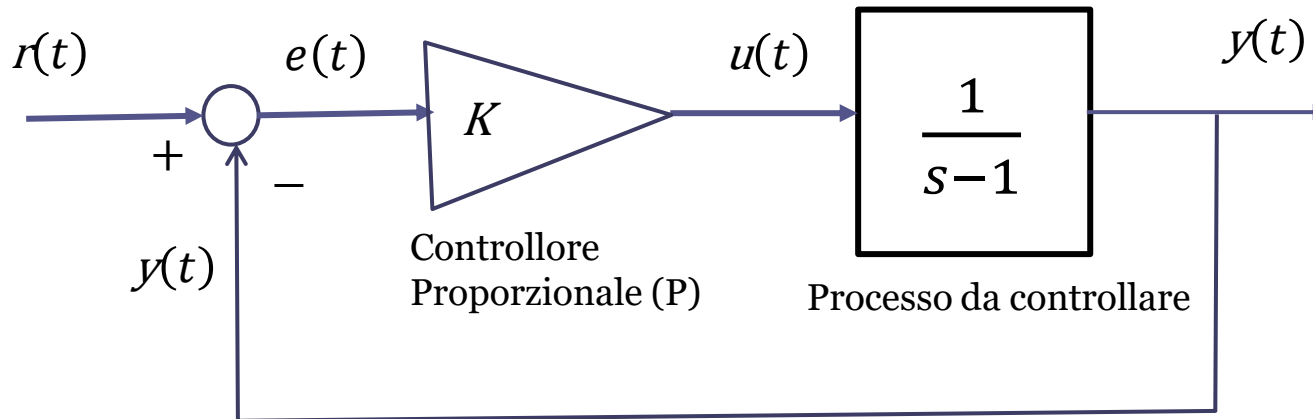
Il comportamento del sistema a ciclo chiuso è governato dalle caratteristiche della FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita.



Il primo e imprescindibile vincolo sulla scelta del controllore è garantire che **la FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita sia asintoticamente stabile.**

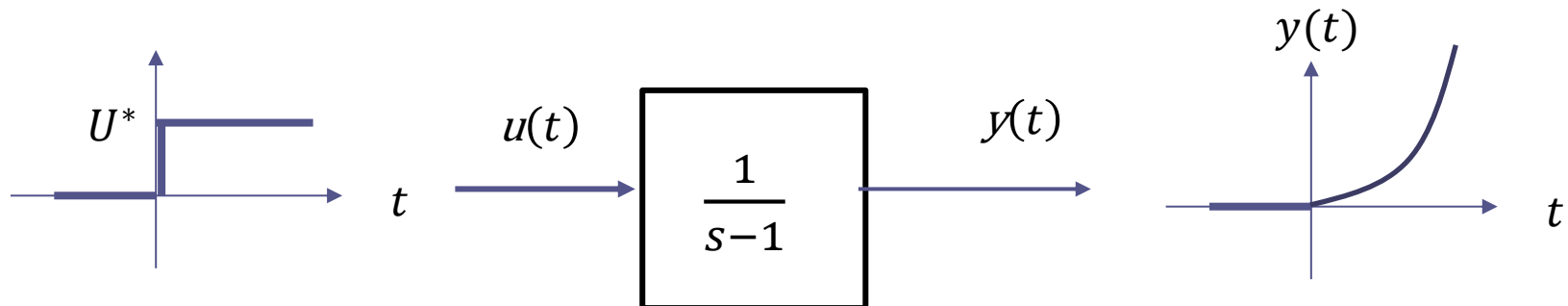
Vediamo alcuni esempi

Esempio Sistema di controllo a retroazione unitaria. Processo instabile.



Il processo da controllare è **instabile**

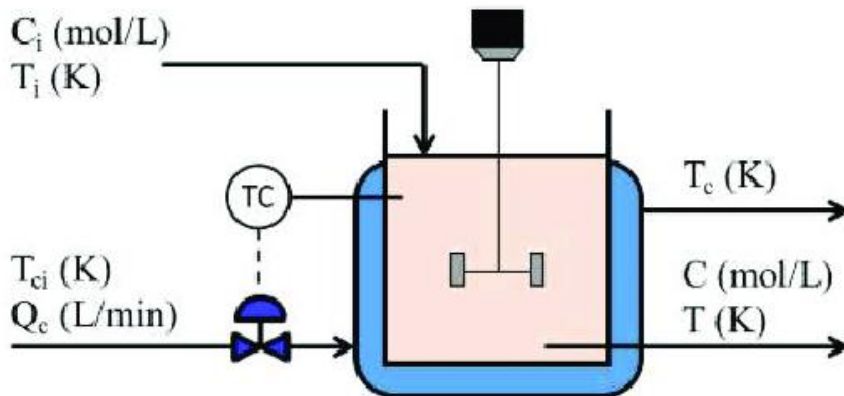
L'applicazione in ingresso al processo di un segnale $u(t)$ costante vedrebbe la variabile di uscita **divergere**



Processi instabili



I moderni velivoli da combattimento (in foto un caccia F-16) sono **intenzionalmente** progettati per essere (debolmente) **instabili** dal punto di vista del legame dinamico fra le grandezze di ingresso (l'orientamento delle varie superfici aerodinamiche di controllo) e le grandezze di uscita (assetto del velivolo). Ciò al fine di rendere il velivolo maggiormente performante (una volta che questo sia opportunamente controllato...)



Continuous stirred tank reactor (CSTR)

La dinamica **termica** di una particolare classe di reattori chimici è fortemente instabile, e si rende necessario un sistema di controllo che regoli istante per istante la portata Q_c di un fluido refrigerante che viene fatto circolare nella parete di contorno (jacket).

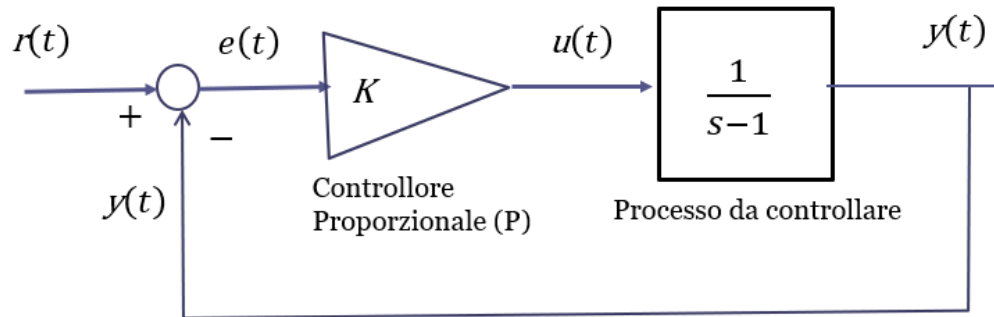


Approfondimenti sul caccia F-16

L'F-16 fu il primo aereo intenzionalmente progettato per essere «leggermente» instabile da punto di vista aerodinamico. Questa tecnica fu impiegata per migliorare ulteriormente le prestazioni di manovra dell'aereo. La stabilità ostacola la manovrabilità, poiché la tendenza a mantenere l'assetto si oppone agli sforzi del pilota che invece lo vuole modificare; d'altro lato, un aereo instabile, in assenza di controlli, perde rapidamente una condizione di volo rettilineo e livellato. Per questo motivo, un aereo instabile sarà maggiormente manovrabile, ma dovrà essere costantemente mantenuto sotto controllo.

Per controllare la tendenza dell'aereo a perdere un assetto stabile ed evitare al pilota la necessità di controbilanciare costantemente con la cloche, l'F-16 possiede un sistema fly-by-wire. Il sistema di controllo del volo, componente chiave del sistema, rileva i comandi del pilota dalla cloche e dal timone e comanda le superfici di controllo del volo per produrre la manovra desiderata senza perdere il controllo del velivolo. Il computer effettua ogni secondo migliaia di rilevazioni dell'assetto ed effettua correzioni automatiche per controbilanciare le deviazioni dal percorso di volo che non sono state richieste dal pilota, permettendo così un volo stabile.

Un aforisma che circola tra molti piloti di velivoli militari è: "Non piloti un F-16: è *lui* che ti pilota"



La FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita è:

$$W_r^y(s) = \frac{K \cdot \frac{1}{s-1}}{1 + K \cdot \frac{1}{s-1}} = \frac{K}{s-1+K} \quad \text{Polo } p = 1 - K$$

La FdT a ciclo chiuso (e quindi il sistema di controllo) risulta essere:

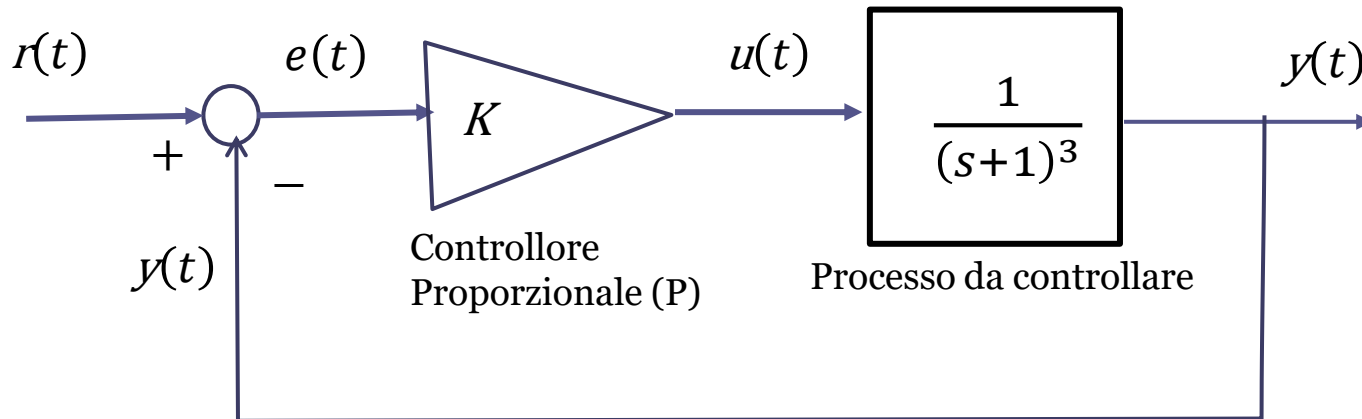
Instabile $0 < K < 1$

Semplicemente stabile $K = 1$

Asintoticamente stabile $K > 1$

Si svolga la medesima analisi con riferimento ad un controllore P.I. avente uno zero in $s=-1$

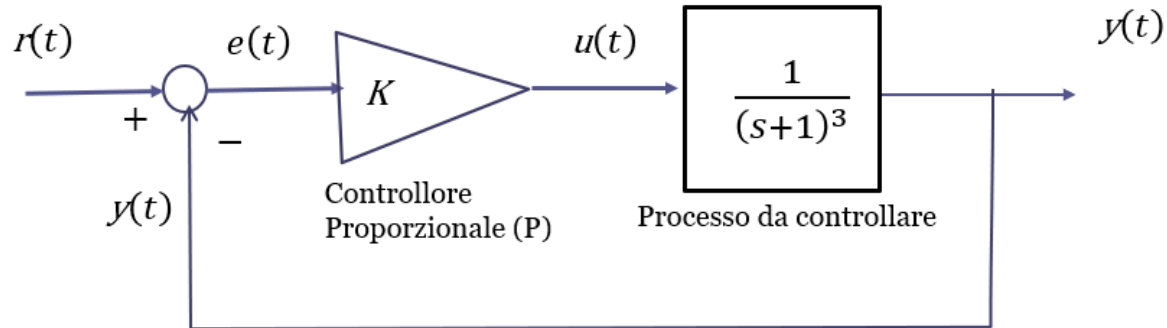
Esempio 2 Sistema di controllo a retroazione unitaria. Processo asintoticamente stabile.



Il processo da controllare è ora invece asintoticamente **stabile**

La FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita è:

$$W_r^y(s) = \frac{K \cdot \frac{1}{(s+1)^3}}{1 + K \cdot \frac{1}{(s+1)^3}} = \frac{K}{(s+1)^3 + K} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K}$$



FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita: $W_r^y(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K}$

$$K = 1$$

$$p_1 = -2$$

$$p_{2,3} = -0.5 \pm j0.86$$

Sistema di controllo
asintoticamente stabile

$$K = 15$$

$$p_1 = -3.46$$

$$p_{2,3} = 0.23 \pm j2.13$$

Sistema di controllo
instabile

Ricavare questi risultati ha richiesto l'impiego di Matlab per la determinazione delle radici del polinomio caratteristico $P_c(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K$ della FdT a ciclo chiuso in corrispondenza degli specifici valori di K considerati

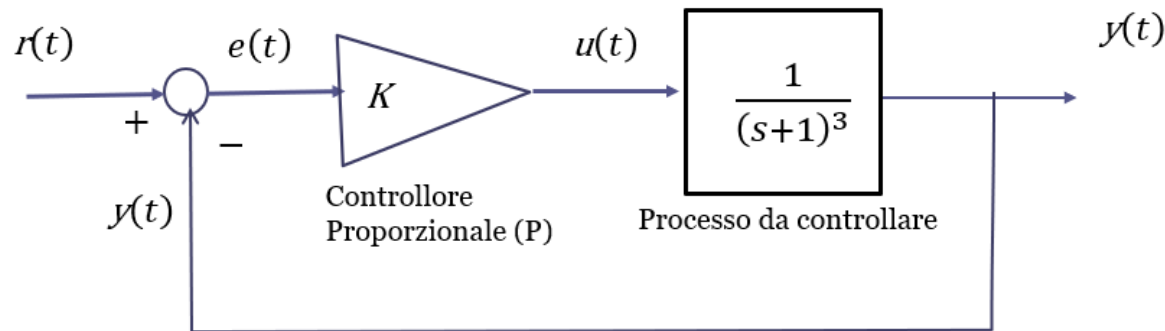
I due esempi precedenti hanno mostrato che:

- 1 Una adeguata scelta del controllore può assegnare un comportamento a ciclo chiuso stabile ad un processo che nel suo funzionamento a ciclo aperto esibisce un comportamento instabile
- 2 Una non adeguata scelta del controllore può condurre ad un comportamento a ciclo chiuso instabile anche per un processo che nel suo funzionamento a ciclo aperto esibisca un comportamento stabile

In generale **quindi il controllore può stabilizzare a ciclo chiuso un processo instabile, ma anche destabilizzare a ciclo chiuso un processo stabile.**

Le proprietà di stabilità del processo a ciclo aperto e di stabilità del processo a ciclo chiuso inserito in un sistema di controllo sono completamente indipendenti l'una dall'altra.

Il secondo esempio trattato:



FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita:
$$W_r^y(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K}$$

ha messo in luce difficoltà nel determinare le caratteristiche di stabilità al variare, ad esempio, di un parametro del controllore.

Le difficoltà nel determinare «a mano» le radici di un polinomio di grado superiore al secondo possono essere ovviate grazie ad uno strumento di analisi in grado di determinare se le radici di un polinomio di grado arbitrario giacciono, o meno, nel semipiano sinistro.

Criterio di Routh-Hurwitz

Il criterio di Routh permette di determinare se un sistema retroazionato è asintoticamente stabile senza dover calcolare esattamente la posizione dei poli della FdT a ciclo chiuso, cioè le radici del polinomio caratteristico.

Sia dato il polinomio caratteristico del sistema di controllo:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Per applicare il criterio di Routh-Hurwitz occorre anzitutto costruire sulla base dei coefficienti del polinomio la **tabella di Routh-Hurwitz**:

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	\dots	
\dots	\dots	\dots	\dots	

Le **prime due righe** della tabella sono formate dai coefficienti del polinomio a partire da quello corrispondente alla potenza più elevata, con un percorso a «zig zag»

Condizione Necessaria (ma non sufficiente) perché le radici del polinomio caratteristico abbiano tutte parte reale negativa è che **tutti** i coefficienti abbiano segno concorde, cioè

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_{n-1} > 0, a_n > 0$$

oppure

$$a_0 < 0, a_1 < 0, \dots, a_{n-1} < 0, a_n < 0$$

Se non è verificata la condizione necessaria non c'è motivo di costruire la Tabella in quanto sappiamo già che il polinomio sotto esame non ha tutte le radici a parte reale negativa

Ritorniamo alla costruzione della Tabella

$$\begin{array}{c|cccc}
 n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
 n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
 n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots & \\
 n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & &
 \end{array}$$

Il termine b_{n-2} è espresso dal determinante 2×2 costituito dai primi due coefficienti delle prime due righe, cambiato di segno e diviso per il primo coefficiente della seconda riga.

Gli elementi della riga $n-2$ sono definiti dalle relazioni

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad b_{n-4} = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad b_{n-6} = \frac{a_{n-1} a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

Calcolo di b_{n-2}

$$\begin{array}{ccccccc}
 n & \boxed{a_n} & \boxed{a_{n-2}} & \boxed{a_{n-4}} & a_{n-6} & \dots & \\
 n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & \\
 n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots & & \\
 n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & & &
 \end{array}$$

Per il calcolo di b_{n-4} , la seconda colonna della matrice 2×2 di cui si deve calcolare il determinante «scorre verso destra». Tutto il resto è identico.

Gli elementi della riga $n-2$ sono definiti dalle relazioni

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad b_{n-4} = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad b_{n-6} = \frac{a_{n-1} a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_{n-4} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

Calcolo di b_{n-4}

$$\begin{array}{ccccccc}
 n & \boxed{a_n} & a_{n-2} & \boxed{a_{n-4}} & \boxed{a_{n-6}} & \dots & \\
 n-1 & \boxed{a_{n-1}} & a_{n-3} & \boxed{a_{n-5}} & \boxed{a_{n-7}} & \dots & \\
 n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots & & \\
 n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & & &
 \end{array}$$

Per il calcolo di b_{n-6} , la seconda colonna della matrice 2×2 di cui si deve calcolare il determinante «scorre verso destra» di un ulteriore passo.
Tutto il resto è identico.

Gli elementi della riga $n-2$ sono definiti dalle relazioni

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad b_{n-4} = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad b_{n-6} = \frac{a_{n-1} a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_{n-4} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \quad b_{n-6} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

Calcolo di b_{n-6}

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots	
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	\dots		
\dots	\dots	\dots	\dots		

In modo analogo si costruisce ogni successiva riga della tabella, in funzione dei termini delle due righe immediatamente precedenti.

Gli **elementi della riga $n-3$** sono definiti dalle relazioni

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}}$$

$$c_{n-5} = \frac{b_{n-2}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-6}}{b_{n-2}}$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}$$

Calcolo di c_{n-3}

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\dots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	\dots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots	\dots
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

In modo analogo si costruisce ogni successiva riga della tabella, in funzione dei termini delle due righe immediatamente precedenti.

Gli **elementi della riga $n-3$** sono definiti dalle relazioni

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}}$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-5} = \frac{b_{n-2}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-6}}{b_{n-2}}$$

$$c_{n-5} = -\frac{1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix}$$

Calcolo di c_{n-5}

Le righe della tabella sono contraddistinte con i numeri $n, n-1, \dots$ e sono di lunghezza decrescente: l'ultima riga, (la numero 0) ha un solo elemento

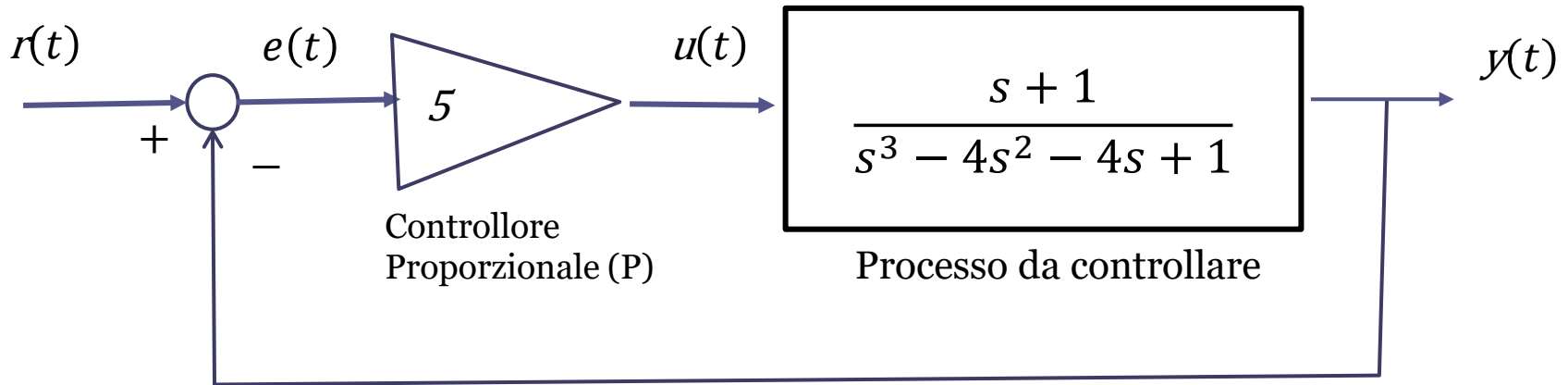
Criterio di Routh-Hurwitz

Ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della Tabella di Routh-Hurwitz, considerati nell'ordine, corrisponde una radice con parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice con parte reale negativa

Si deve quindi verificare (o imporre) che tutti gli elementi della prima colonna della Tabella abbiano lo stesso segno, in caso contrario il polinomio studiato non possiede tutte le radici a parte reale negativa.

Esempio

Analizzare la stabilità a ciclo chiuso del seguente sistema di controllo



$$W_r^y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5 \cdot \frac{s+1}{s^3 - 4s^2 - 4s + 1}}{1 + 5 \cdot \frac{s+1}{s^3 - 4s^2 - 4s + 1}} = \frac{5(s+1)}{s^3 - 4s^2 - 4s + 1 + 5(s+1)}$$

$$= \frac{5(s+1)}{s^3 - 4s^2 + s + 6}$$

$$P_{car} = s^3 - 4s^2 + s + 6$$

Il fatto che i coefficienti del polinomio caratteristico non abbiano segno concorde ci rivela che il polinomio ammette certamente radici a parte reale non negativa.

Costruendo la Tabella di RH si ottiene infatti:

3	1	1
2	-4	6
1	2.5	0
0	6	

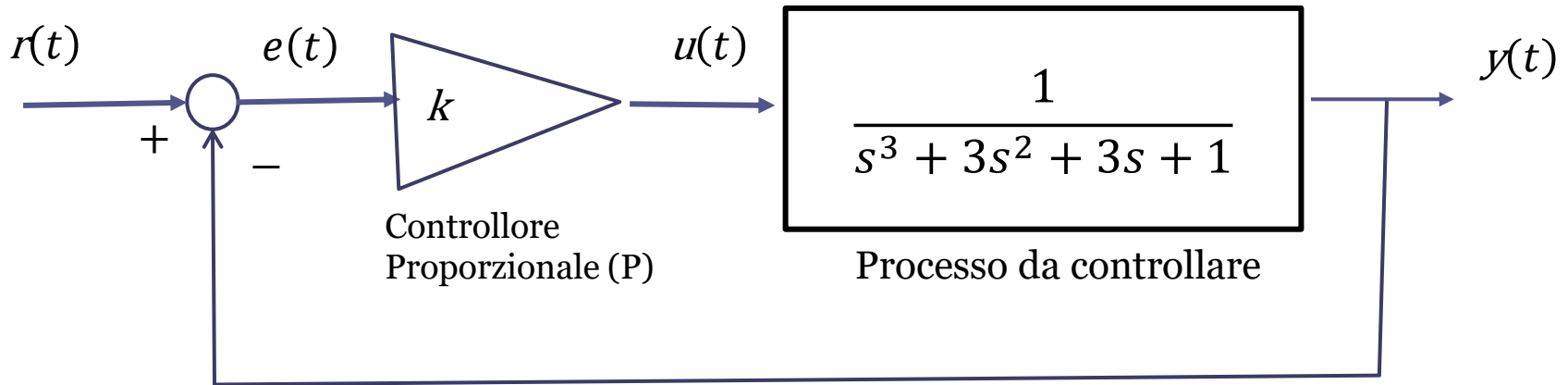
$$2.5 = -\frac{1}{-4} \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -4 & 6 \end{array} \right|$$

$$0 = -\frac{1}{-4} \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{array} \right|$$

$$6 = -\frac{1}{2.5} \left| \begin{array}{cc} -4 & 6 \\ 2.5 & 0 \end{array} \right|$$

Esempio

Analizzare al variare di $k > 0$ la stabilità a ciclo chiuso del seguente sistema di controllo



$$W_r^y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k \cdot \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}}{1 + k \cdot \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}} = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k}$$

Se $k > 0$, i coefficienti del polinomio caratteristico hanno segno concorde. ci rivela che il polinomio ammette certamente radici a parte reale non negativa.

Costruendo la Tabella di RH si ottiene infatti:

3	1	3
2	3	$1 + k$
1	$\frac{8 - k}{3}$	0
0	$1 + k$	

$$\frac{8 - k}{3} = -\frac{1}{3} \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 3 & 1 + k \end{array} \right| \quad 0 = -\frac{1}{-3} \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{array} \right|$$

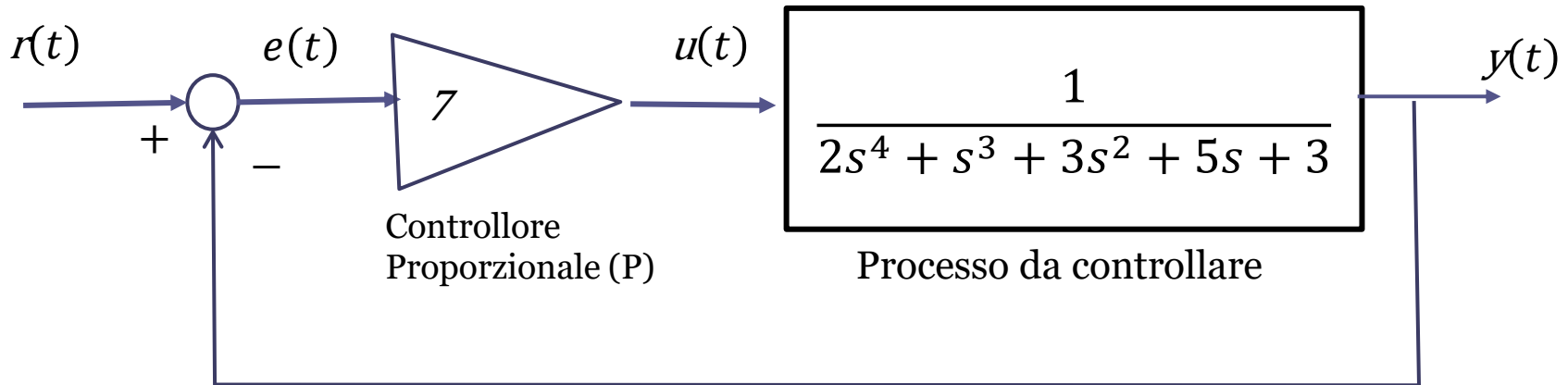
$$1 + k = -\frac{3}{8 - k} \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 + k \\ \frac{8 - k}{3} & 0 \end{array} \right|$$

Imponendo che gli elementi della prima colonna della tabella siano tutti positivi si ottengono le disequazioni:

$$-1 < k < 8$$

Esempio

Analizzare la stabilità a ciclo chiuso del seguente sistema di controllo



$$W_r^y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{7 \cdot \frac{1}{2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 3}}{1 + 7 \cdot \frac{1}{2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 3}} = \frac{7}{2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10}$$

$$P_{car}(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$$

I coefficienti sono tutti positivi, La condizione necessaria è pertanto soddisfatta.

La corrispondente tabella di RH è

4	2	3	10
3	1	5	0
2	-7	10	
1	$\frac{45}{7}$	0	
0	10		

La prima colonna della tabella di RH presenta due variazioni di segno.

Ciò implica che **due fra le radici del polinomio sotto studio hanno parte reale positiva.**

NB Ci si sarebbe potuti fermare non appena calcolato il primo elemento della riga numero 2, che vale -7 ed ha segno opposto all'elemento soprastante

$$-7 = -\frac{1}{1} \left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{array} \right|$$

$$10 = -\frac{1}{1} \left| \begin{array}{cc} 2 & 10 \\ 1 & 0 \end{array} \right|$$

$$\frac{45}{7} = -\frac{1}{-7} \left| \begin{array}{cc} 1 & 5 \\ -7 & 10 \end{array} \right|$$

$$0 = -\frac{1}{-7} \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -7 & 0 \end{array} \right|$$

$$10 = -\frac{7}{45} \left| \begin{array}{cc} -7 & 10 \\ \frac{45}{7} & 0 \end{array} \right|$$

```
>> roots([2 1 3 5 10])
```

```
ans =
```

```
0.7555 + 1.4444i
0.7555 - 1.4444i
-1.0055 + 0.9331i
-1.0055 - 0.9331i
```



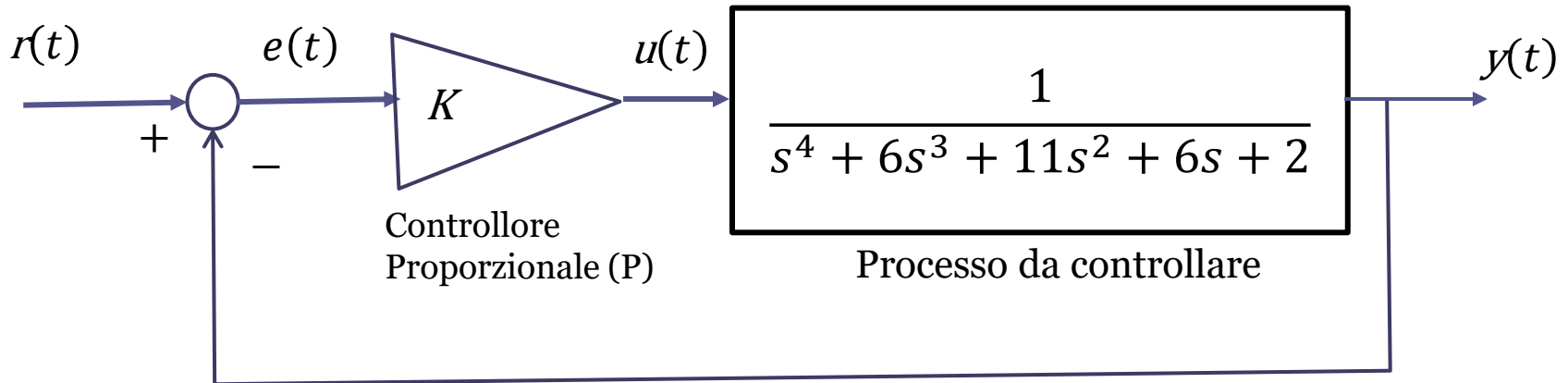
METODO SEMPLIFICATO PER LA COSTRUZIONE DELLA TABELLA DI R.H.

Se, durante la costruzione della tabella, **tutti i termini di una certa riga sono moltiplicati o divisi per uno stesso coefficiente positivo** non si ha nessuna conseguenza sulla applicazione del metodo.

Ciò può essere impiegato per semplificare i calcoli.

Esempio

Analizzare la stabilità a ciclo chiuso del seguente sistema di controllo



FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita:

$$W_r^y(s) = \frac{K}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 2 + K}$$

$$P_{car}(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 2 + K$$

$$P_{car}(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K + 2$$

Tabella di RH (costruita secondo il metodo semplificato descritto poche slides fa)

4	1	11	$K + 2$
3	6	6	0
2			
1			
0			

Dividiamo per 6 gli elementi della riga 3

4	1	11	$K + 2$
3	1	1	1
2	10	$K + 2$	
1			
0			

$$10 = - \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$K + 2 = - \begin{vmatrix} 1 & K + 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$P_{car}(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K + 2$$

Tabella di RH (costruita secondo il metodo semplificato descritto poche slides fa)

4	1	11	$K + 2$	
3	1	1	1	
2	10	$K + 2$		
1	$\frac{8 - K}{10}$			$\frac{8 - K}{10} = -\frac{1}{10} \left \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 10 & K + 2 \end{array} \right $
0				

Moltiplichiamo per 10 l'elemento riga 1

4	1	11	$K + 2$	
3	1	1	1	
2	10	$K + 2$		
1	$8 - K$			
0	$K + 2$			$K + 2 = -\frac{1}{8 - K} \left \begin{array}{cc} 10 & K + 2 \\ 8 - K & 0 \end{array} \right $

4	1	11	$K + 2$
3	1	1	1
2	10	$K + 2$	
1	$8 - K$		
0	$K + 2$		

Imponendo che gli elementi della prima colonna della tabella di RH siano tutti positivi si deducono le condizioni:

$$8 - K > 0$$

$$K + 2 > 0$$

Il campo di valori ammissibili per il guadagno K corrispondente alla stabilità asintotica a ciclo chiuso del sistema di controllo è pertanto

$$-2 < K < 8$$

Durante la costruzione della tabella di RH si possono presentare i seguenti due casi singolari, che non consentono di portarla a termine:

Caso A *il primo termine di una riga è nullo*

4	2	3	10
3	0	5	0
2	??		
1	...		
0	...		

Caso B *tutti i termini di una riga sono nulli.*

4	5	6	2
3	0	0	0
2	??		
1	...		
0	...		

Per questi due casi vi sono procedure ad hoc che consentono di determinare le proprietà di stabilità del sistema di controllo sotto esame. Non vediamo tali metodi, che peraltro sono da impiegarsi in un ridotto numero di casi pratici, ed hanno pertanto valenza applicativa limitata. Si rimanda ai testi consigliati per maggiori dettagli.

Concludiamo con un risultato che agevola lo studio di sistemi di controllo in retroazione in cui la FdT a ciclo chiuso sia del terzo ordine

Applicando il criterio di RH ad un generico polinomio del **terzo ordine**

$$P(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

si ottiene una condizione compatta e semplice da memorizzare fra i coefficienti del polinomio che garantisce che il polinomio ammetta tutte le radici a parte reale negativa (**un polinomio che ammette tutte le radici a parte reale negativa viene detto essere un «polinomio di Hurwitz»**)

*Regola di cartesio per polinomi di **terzo grado***

Un polinomio di terzo grado

$$P(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

*ammette tutte le radici a parte reale negativa **se e solo se** valgono le due seguenti relazioni:*

- 1. tutti i coefficienti a_3, a_2, a_1, a_0 del polinomio hanno **segno concorde***
- 2. I coefficienti del polinomio soddisfano la relazione*

$$a_1a_2 > a_0a_3$$

Dimostrazione

$$P(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

$$n = 3$$

$$b_1 = -\frac{1}{a_2} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_2}$$

$$c_0 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0$$

3	a_3	a_1
2	a_2	a_0
1	b_1	0
0	c_0	

3	a_3	a_1
2	a_2	a_0
1	$\frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_2}$	0
0	a_0	

$$a_3 > 0$$

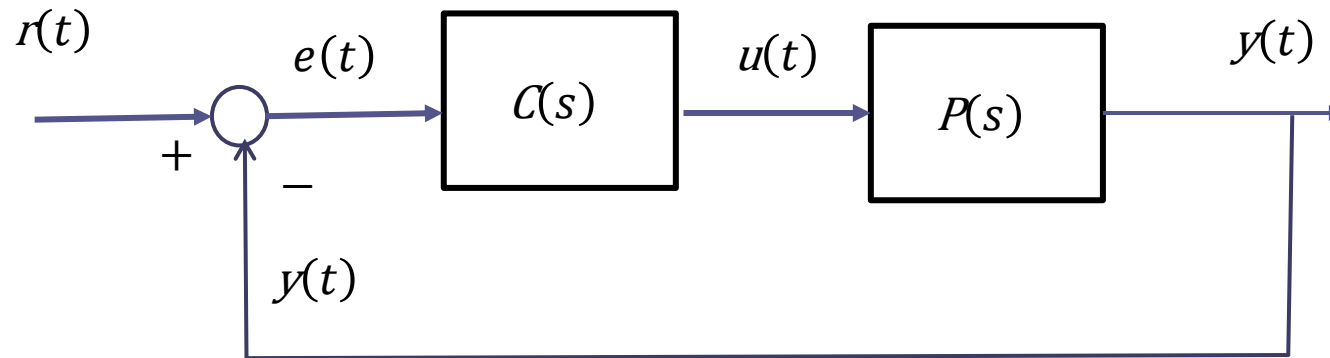
$$a_2 > 0$$

$$a_0 > 0$$

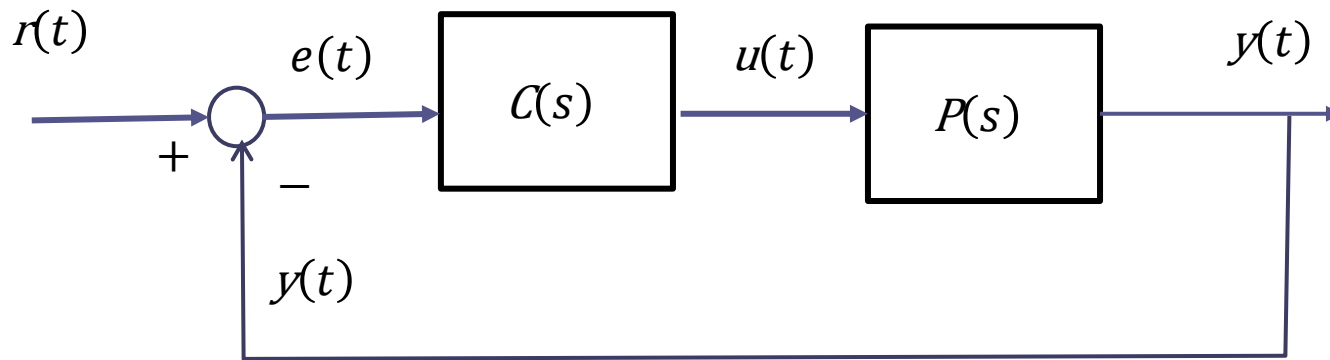
$$a_1a_2 > a_0a_3$$

Il prodotto fra i coefficienti «interni» deve essere strettamente maggiore del prodotto fra i coefficienti «esterni»

Stabilità **esterna** vs. stabilità **interna** di un sistema di controllo



La precedente trattazione in merito alla stabilità di un sistema di controllo in retroazione, unicamente basata sul garantire la stabilità asintotica della FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita, cioè sul garantire che i poli di tale FdT (le radici del polinomio caratteristico) debbano avere tutte le radici a parte reale negativa, va approfondita.



La FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita è, come sappiamo:

$$W_r^y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

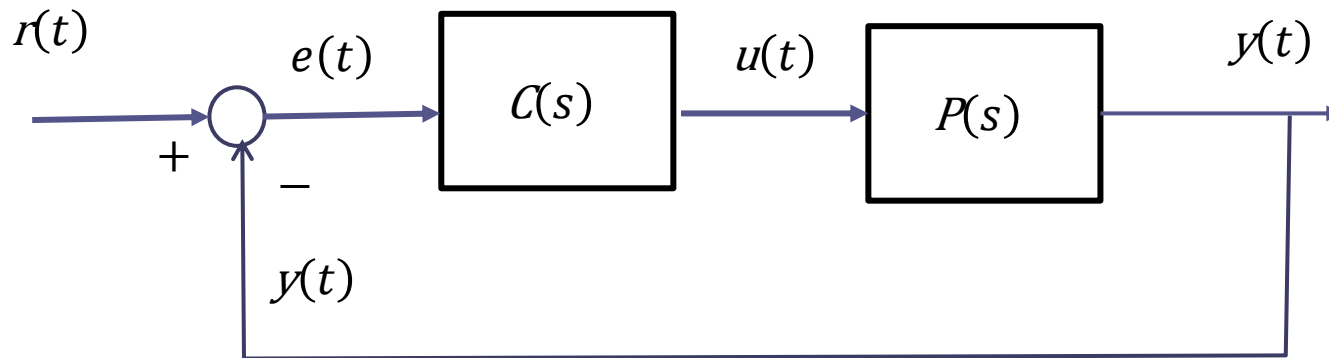
I poli della $W_r^y(s)$ («poli a ciclo chiuso») sono le soluzioni della

Equazione caratteristica: $1 + C(s)P(s) = 0$

Il fatto che le soluzioni della equazione caratteristica abbiano tutte parte reale negativa garantisce che la FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita sia una FdT asintoticamente stabile. Ne consegue che fra il set-point e la componente **forzata** dell'uscita vi sia un legame asintoticamente stabile, con tutte le conseguenze del caso (ad esempio, come stabilito dal T.F.R.G., l'applicazione di un set-point costante comporta che la componente forzata dell'uscita tenda ad un valore costante)

La limitatezza della risposta dell'uscita **forzata** ai **segnali esterni di ingresso** (come il set point, o eventuali disturbi) limitati prende il nome di **stabilità esterna**.

Vi sono però altri aspetti da considerare:



1. I segnali interni al sistema di controllo (uno fra tutti: l'ingresso $u(t)$ al processo) si mantengono limitati?
2. La risposta libera in presenza di condizioni iniziali non nulle dell'uscita e delle sue derivate tende ad estinguersi?

Il soddisfacimento di queste due proprietà prende il nome di **stabilità interna**

La **stabilità interna** di un sistema di controllo ha come prerequisito la stabilità esterna più alcuni **vincoli aggiuntivi**

Equazione caratteristica: $1 + C(s)P(s) = 0$

Stabilità esterna

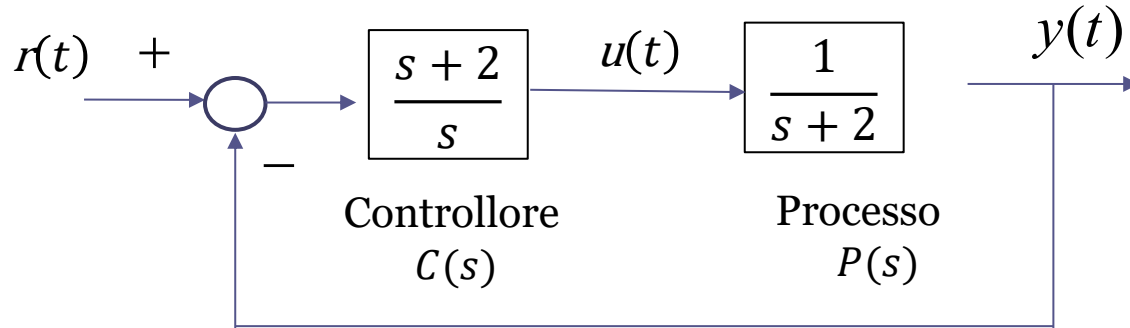


Le soluzioni della equazione caratteristica debbono avere tutte parte reale negativa

I **vincoli aggiuntivi** precedentemente menzionati si riferiscono all'effetto negativo di **cancellazioni** fra poli (o zeri) del controllore e zeri (o poli) del processo

Si nota infatti come l'equazione caratteristica dipenda in maniera aggregata dal prodotto $C(s)P(s)$ quindi fattori comuni a numeratore e denominatore di $C(s)$ e di $P(s)$ si semplificano. Tale fenomeno è detto «**cancellazione**».

Ragioniamo meglio su questo aspetto con alcuni esempi



$$C(s) = \frac{s+2}{s}$$

$$P(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$W_r^y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} = \frac{\cancel{s+2} \cdot \frac{1}{\cancel{s+2}}}{1 + \frac{\cancel{s+2} \cdot 1}{s \cdot \cancel{s+2}}} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1} \quad \text{Polinomio caratteristico}$$

Deduzione del polinomio caratteristico mediante l'equazione caratteristica $1 + C(s)P(s) = 0$

$$1 + C(s)P(s) = 1 + \frac{\cancel{s+2}}{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s+2}} = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s} = 0 \quad s+1=0$$

Anche se il controllore ed il processo sono entrambi descritti da FdT del primo ordine, il polinomio caratteristico risulta essere del primo ordine, anziché del secondo ordine come sarebbe stato «normale» attendersi. Ciò per effetto del fatto che lo zero del controllore in -2 ed il polo del processo in -2 si semplificano (si «cancellano»)

I problemi in termini di stabilità interna sorgono quando queste «cancellazioni» coinvolgono poli e zeri collocati nel semipiano destro e, in misura minore, sull'asse immaginario.

Cancellazioni nel semipiano destro («cancellazioni instabili»)

Possono essere di due tipi:

- A. Fra poli del controllore e zeri del processo
- B. Fra zeri del controllore e poli del processo

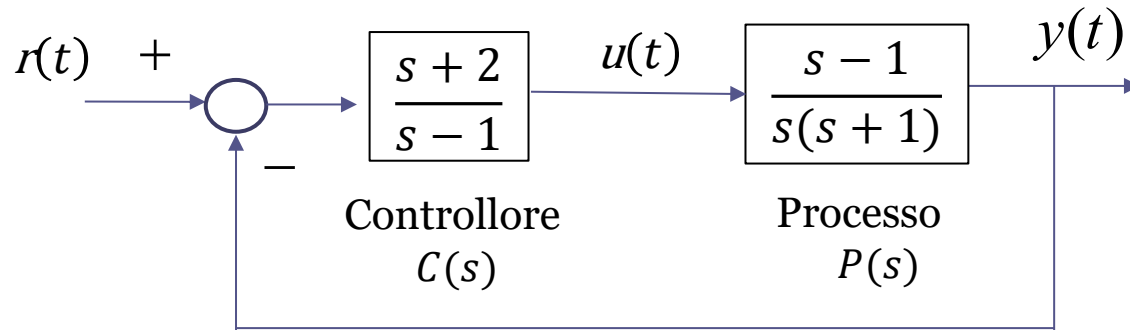
Una cancellazione instabile del **tipo A** comporta che **il segnale di ingresso al processo tende ad infinito**

Una cancellazione instabile del **tipo B** comporta che **la risposta libera** in presenza di condizioni iniziali dell'uscita (e delle sue derivate fino all'ordine $n-1$) diverse da zero **tende ad infinito**

Esempi di cancellazioni instabili

Tipo A: fra poli del controllore e zeri del processo

TEST 1



Equazione caratteristica:

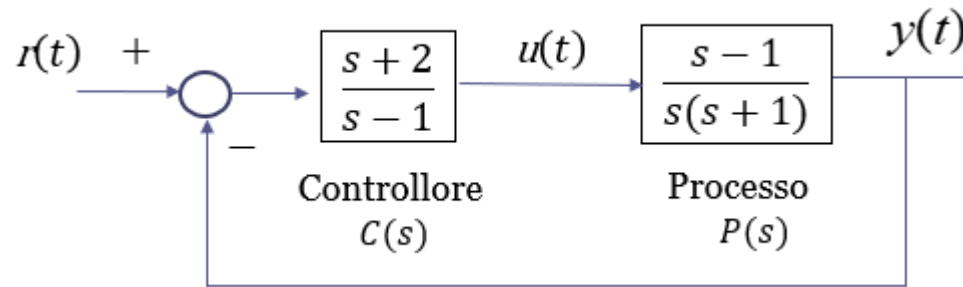
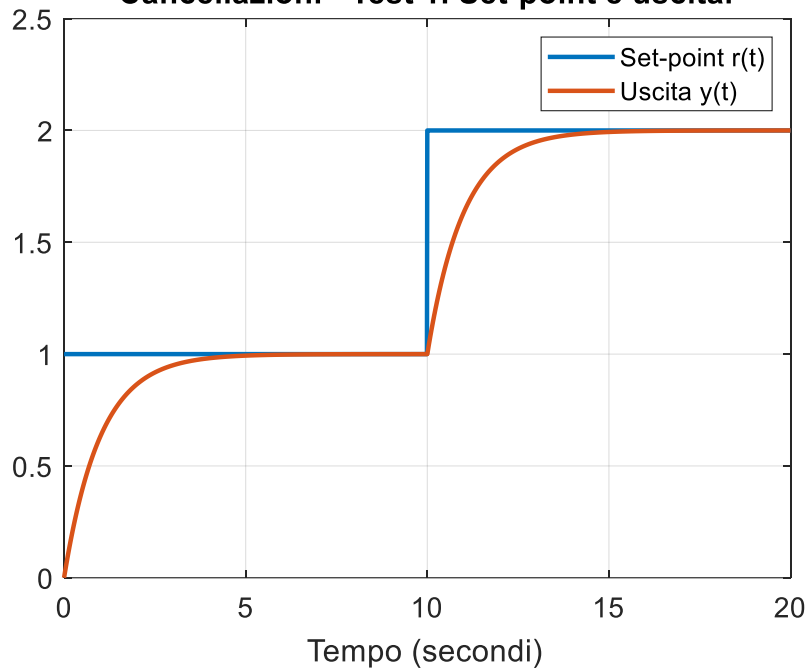
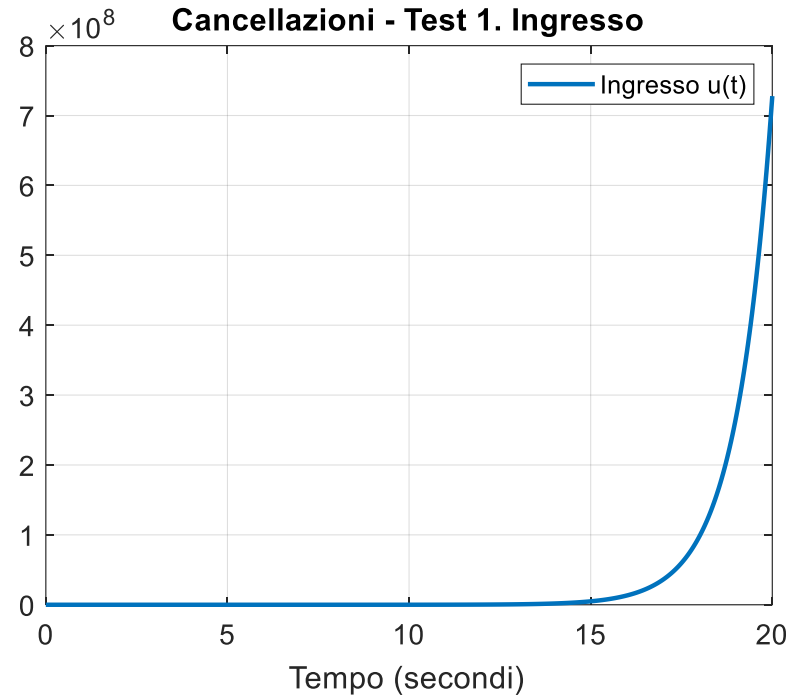
$$1 + C(s)P(s) = 1 + \frac{s+2}{\cancel{s-1}} \cdot \frac{\cancel{s-1}}{s(s+1)} = 1 + \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{s(s+1) + s+2}{s(s+1)} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s(s+1)} = 0$$

Polinomio caratteristico: $P_{car}(s) = s^2 + 2s + 2$ Il Pcar ha tutte le radici a parte reale negativa sulla base della regola di Cartesio

FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita

$$W_r^y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} = \frac{\frac{s+2}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s(s+1)}}{1 + \frac{s+2}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s(s+1)}} = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2}$$

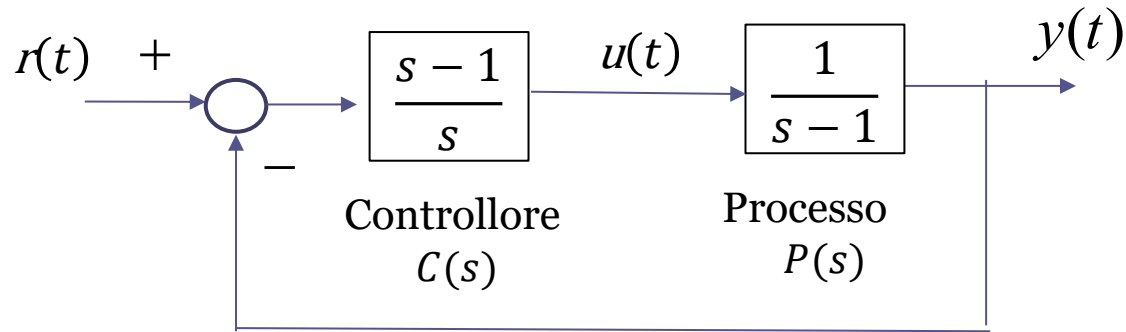
Il sistema di controllo gode della proprietà di stabilità esterna

TEST 1**Cancellazioni - Test 1. Set-point e uscita.****Cancellazioni - Test 1. Ingresso**

Esempi di cancellazioni instabili

Tipo B: fra zeri del controllore e poli del processo

TEST 2



Equazione caratteristica:

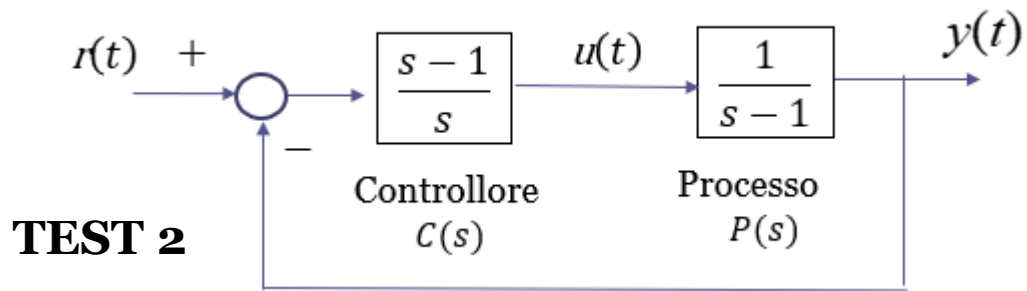
$$1 + C(s)P(s) = 1 + \frac{\cancel{s-1}}{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s-1}} = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s} = 0$$

Polinomio caratteristico: $P_{car}(s) = s + 1$ Il Pcar ha tutte le radici a parte reale negativa

FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita

$$W_r^y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} = \frac{\frac{s-1}{s} \cdot \frac{1}{s-1}}{1 + \frac{s-1}{s} \cdot \frac{1}{s-1}} = \frac{1}{s+1}$$

Il sistema di controllo gode della proprietà di stabilità esterna

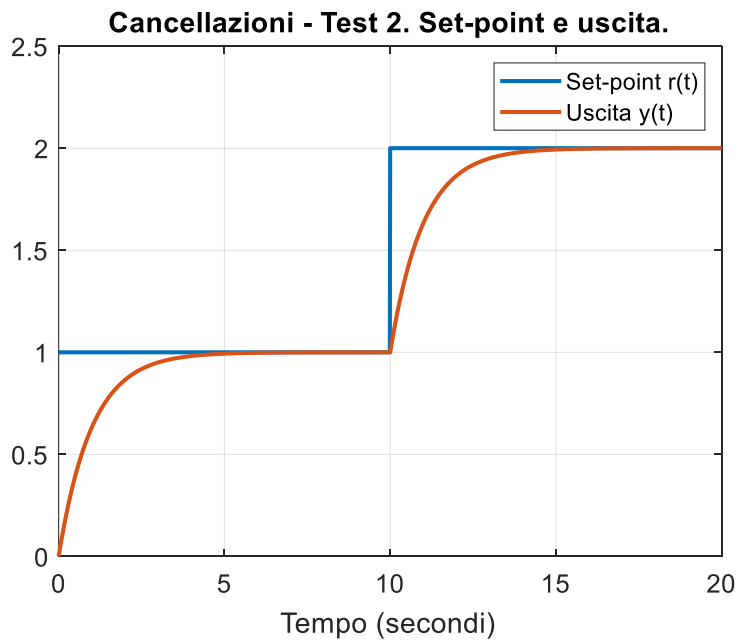


Modello I/O del processo

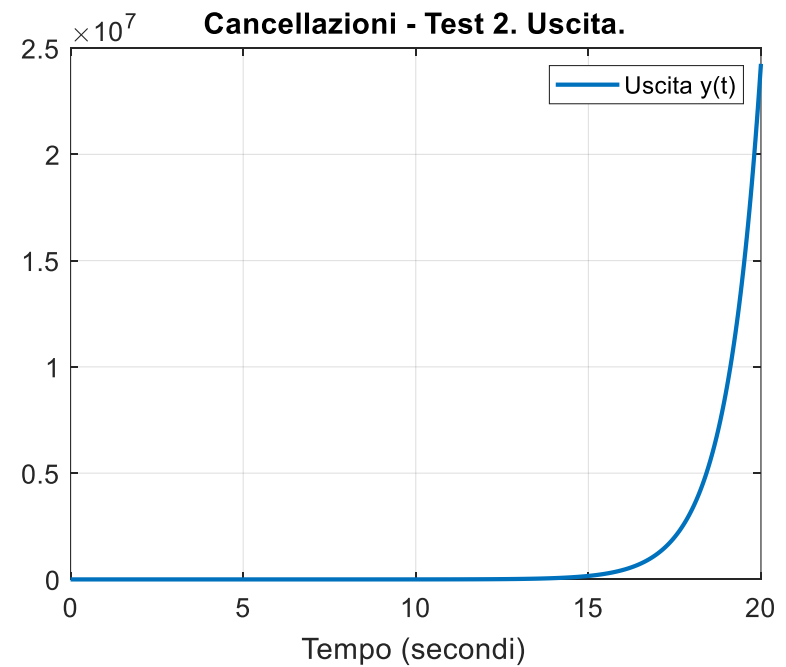
$$\dot{y}(t) - y(t) = u(t)$$

$$y(0) = y_0$$

$$y_0 = 0$$



$$y_0 = 0.1$$



Cancellazioni sull'asse immaginario («cancellazioni al limite di stabilità»)

Possono essere di due tipi:

- A. Fra poli del controllore e zeri del processo
- B. Fra zeri del controllore e poli del processo

Una cancellazione al limite di stabilità del **tipo A** non comporta particolari problemi

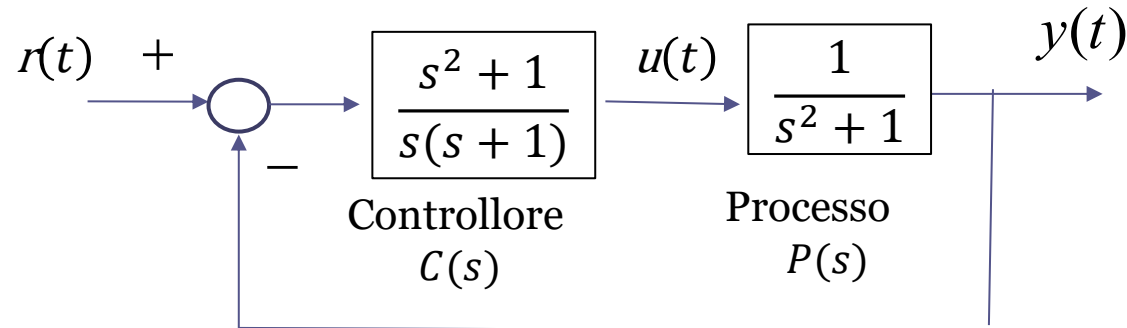
Una cancellazione al limite di stabilità del **tipo B** comporta che **la risposta libera** in presenza di condizioni iniziali dell'uscita (e delle due derivate fino all'ordine $n-1$) non nulle **non va a zero**.

In particolare essa:

- **oscilla** se si parla di coppia di poli-zeri immaginari puri e complessi coniugati, oppure
- **tende a un valore costante diverso da zero** se si parla di poli-zeri nell'origine.

Esempio di cancellazioni al limite di stabilità

Tipo B: fra zeri del controllore e poli del processo



Equazione caratteristica:

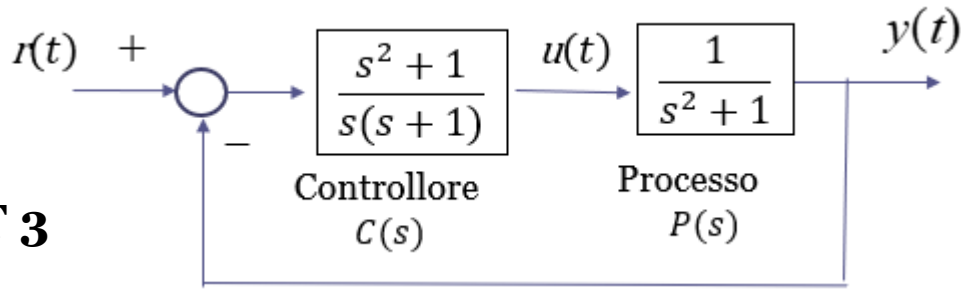
$$1 + C(s)P(s) = 1 + \frac{\cancel{s^2 + 1}}{s(s + 1)} \cdot \frac{1}{\cancel{s^2 + 1}} = 1 + \frac{1}{s(s + 1)} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s + 1)} = 0$$

Polinomio caratteristico: $s^2 + s + 1$ Il Pcar ha tutte le radici a parte reale negativa (regola di Cartesio)

FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita

$$W_r^y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{\frac{s^2 + 1}{s(s + 1)} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}}{1 + \frac{s^2 + 1}{s(s + 1)} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Il sistema di controllo gode della proprietà di stabilità esterna

TEST 3

Modello I/O del processo

$$\ddot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$y(0) = y_0$$

$$\dot{y}(0) = y'_0$$

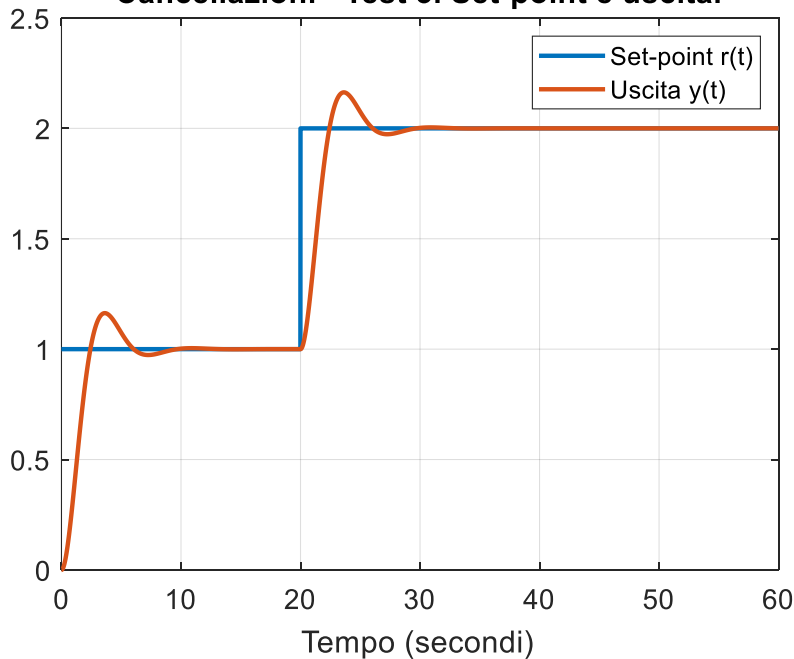
$$y_0 = 0$$

$$y'_0 = 0$$

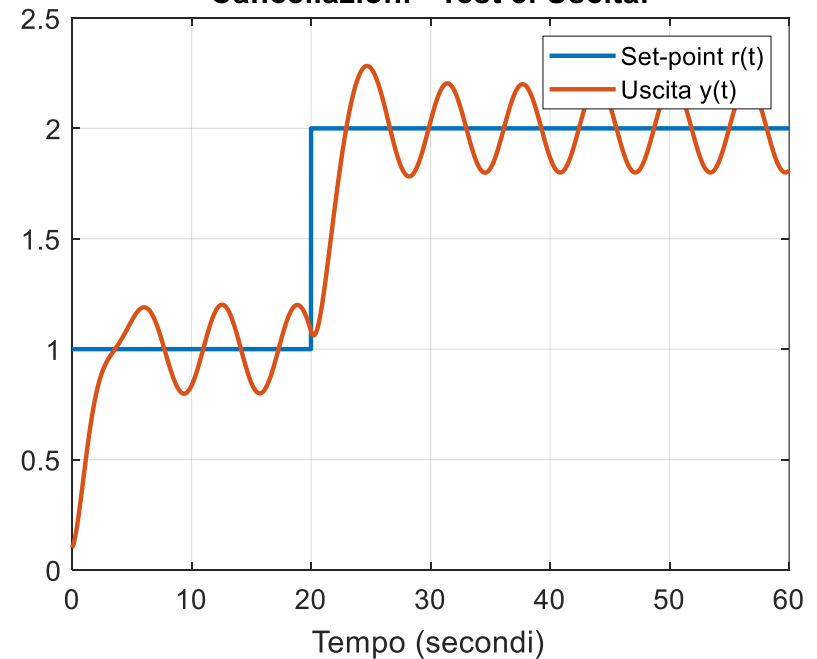
$$y_0 = 0.1$$

$$y'_0 = 0$$

Cancellazioni - Test 3. Set-point e uscita.

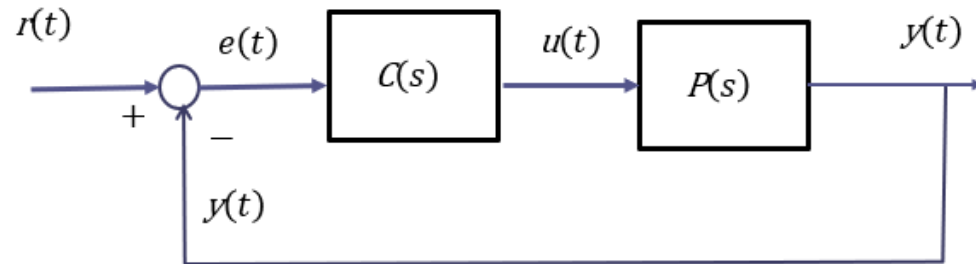


Cancellazioni - Test 3. Uscita.



ATTENZIONE

Riassunto



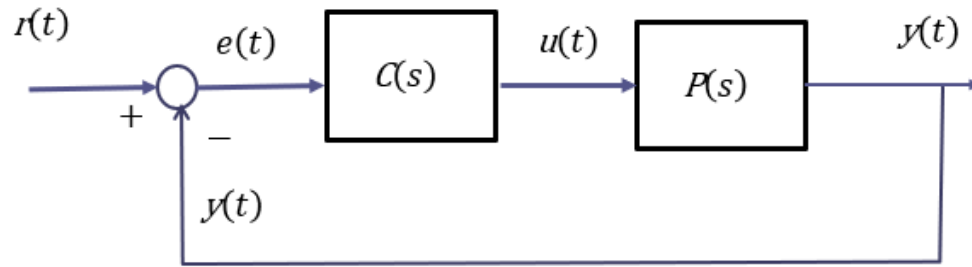
In un sistema di controllo in retroazione **devono essere garantite sia la stabilità esterna che la stabilità interna**

La stabilità esterna è garantita se le radici del polinomio caratteristico del sistema di controllo hanno tutte parte reale negativa.

La stabilità interna è garantita se:

Nessun polo del controllore «cancella» uno zero del processo avente parte reale positiva

Nessuno zero del controllore «cancella» un polo del processo avente parte reale positiva o nulla



Le cancellazioni fra poli e zeri «stabili» (cioè a parte reale negativa) sono **perfettamente lecite**, ed anzi costituiscono una soluzione progettuale utilizzata molto di frequente

Se si violano i vincoli sulle cancellazioni non consentite cosa succede?

Se un polo del controllore «cancella» uno zero del processo avente parte reale positiva l'ingresso $u(t)$ al processo tende a infinito (v. Test 1)

Se uno zero del controllore «cancella» un polo del processo avente parte reale positiva la risposta libera $y(t)$ in presenza di condizioni iniziali non nulle tende a infinito (v. Test 2)

Se uno zero del controllore «cancella» un polo del processo avente parte reale nulla la risposta libera $y(t)$ in presenza di condizioni iniziali diverse da zero non tende ad estinguersi (in particolare, oscilla se si tratta di poli complessi coniugati, v. Test 3)