Corso di Analisi Matematica 1

Monica Marras - Universitá di Cagliari

mmarras@unica.it

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$ un punto di accumulazione di A che appartiene ad A. Si dice che $f(x)$ è continua nel punto x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ossia $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta_\epsilon$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in I(x_0, \delta_\epsilon)$$

$(l = f(x_0))$

Una funzione è continua in x_0 se una piccola variazione del punto x_0 produce una piccola variazione dell'immagine $f(x_0)$.

Se una funzione $f(x)$ è continua in tutti i punti del suo insieme di definizione A diremo f è continua in A o semplicemente che è continua.

Esempi di funzioni continue:
Le funzioni costanti $f(x) = k, \ k \in \mathbb{R}$
Le potenze $f(x) = x^a \ (x > 0, \ a \in \mathbb{R})$
La funzione esponenziale $y = a^x \ (a > 0, \ a \neq 1)$
La funzione logaritmo $y = \log_a x, \ (x > 0, \ a > 0, \ a \neq 1)$
La funzione $y = \sin x$, infatti per es. si ha (per la formula $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$)

$$\lim_{x \to x_0} \sin x - \sin x_0 = \lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h) - \sin x_0$$
$$= \lim_{h \to 0} 2\cos(x_0 + \frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2}) = 0$$

La funzione $\cos x$ è continua.
Le funzioni elementari sono continue nel loro insieme di esistenza (o di definizione).

Abbiamo definito il limite destro e il limite sinistro in modo analogo possiamo definire una funzione continua a destra o continua a sinistra di un punto x_0 cioè:

- f è continua a destra di x_0 se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- f è continua a sinistra di x_0 se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

La composizione di funzioni continue è una funzione continua:

Teorema. Continuità della funzione composta

Siano $f : A \to B$ continua in $x_0 \in A$ e $g : B \to \mathbb{R}$ continua in $f(x_0) \in B$, allora $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

Dimostrazione

Per ipotesi g è continua in $f(x_0)$ quindi per ogni intorno U di $g(f(x_0))$ esiste un intorno W di $f(x_0)$ con $g(W \cap B) \subset U$.

Essendo f continua in x_0, per ogno intorno W esiste un intorno V di x_0 tale che $f(V \cap A) \subset W \cap B$. Allora si ha $g(f(V \cap A)) \subset U$ cioè $g \circ f$ è continua in x_0.

Proprietà

- Essendo il limite di somma, differenza, prodotto è uguale rispettivamente alla somma, differenza, prodotto dei limiti, allora la somma, differenza, prodotto di funzioni continue è una funzione continua,
- anche il quoziente di funzioni continue è continuo purchè si faccia attenzione ai punti dove il denominatore si annulla,
- la funzione composta di funzioni continue è continua,
- le funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione

Punti di discontinuità

a) Discontinuità eliminabile

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} = l \neq f(x_0) \; o \; non \; esiste \; f(x_0)$$

Allora la funzione $\bar{f}$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases} \qquad e' \; continua$$

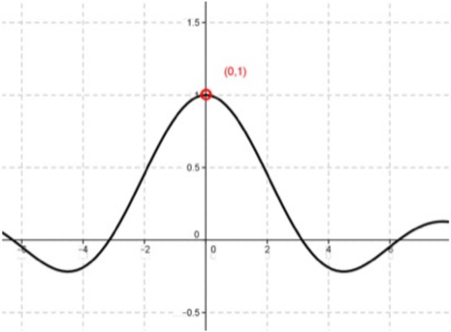
cioè $f(x)$ è stata prolungata (o ridefinita) per continuità attraverso $\bar{f}(x)$.

Esempio di discontinuità eliminabile

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x}$$

$C.E.\ \{x \in \mathbb{R} :\ x \neq 0\}$

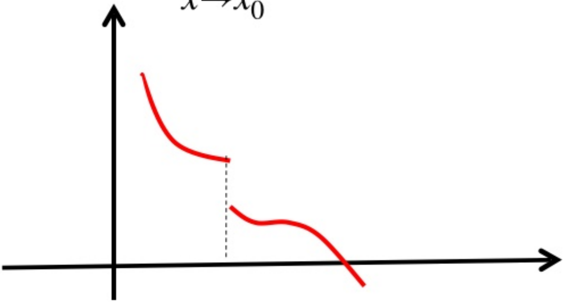
$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Discontinuità

b) **Discontinuità di prima specie (salto)**

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_1 \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_2 \qquad l_1 \neq l_2$$

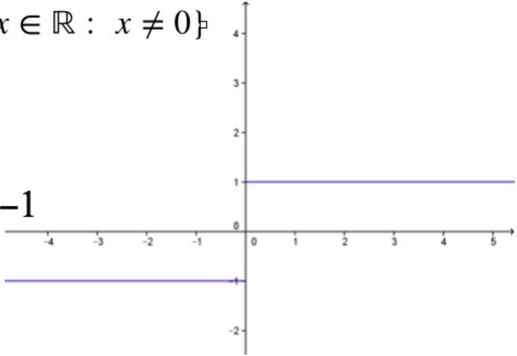


Esempio di discontinuità di prima specie

$$y = \frac{|x|}{x}$$

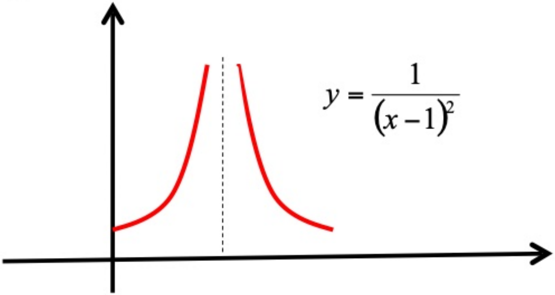
$$C.E : \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq 0\}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$



$c)$ Discontinuità di seconda specie

Se uno dei due limiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ *non esiste oppure è* ∞



Esercizi:

1. Dire se è continua in $x = 0$ la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{2x \ln |x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2. Dire per quali valori di k è continua la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x > 0 \\ x + 2k & x \leq 0 \end{cases}$$

3. Dire per quali valori di k la funzione $f(x)$ è continua in $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln x}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$$

Teorema Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona può avere al più una infinità numerabile di punti di discontinuità e questi possono essere di 1^a specie (oppure eliminabili se sono in $x = a$ o in $x = b$).

Dimostrazione.
Se per esempio f è crescente allora per il teorema sull'esistenza del limite per le funzioni monotone si ha

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

perciò o $f(x)$ è continua (i due limiti sono uguali) oppure $f(x)$ ha un salto in x_0. In modo analogo, in $x = a$ si ha

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \geq f(a)$$
$$\lim_{x \to b^-} f(x) \leq f(b)$$

e quindi $x = a$ e $x = b$ o sono punti di continuità o sono punti di discontinuità eliminabile.

Per dimostrare che i punti di discontinuità sono al più una infinità numerabile si pone $S = f(b) - f(a)$ e si osserva che non possono esserci più di $[S]$ (parte intera di S) punti con salto maggiore di 1. Non possono esserci più di $2[S]$ punti con salto tra $\frac{1}{2}$ e 1, non possono esserci più di $4[S]$ punti con salto tra $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ e così via. Cioè i punti di discontinuità si possono numerare cioè si possono mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali (si possono mettere in successione) e quindi sono al più una infinità numerabile.

Funzione di Dirichlet

Consideriamo la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

l'insieme dei punti di discontinunità di $f(x)$ è $\mathbb{R}$ (è anche il suo insieme di esistenza) che non è numerabile, quindi la funzione di Dirichlet non è continua in nessun punto.

Teorema della permanenza del segno. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $x_0 \in A$. Se $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in U \cap A$.

Il teorema è stato dimostrato per i limiti di funzione, in questo caso essendo $f(x)$ continua in x_0 si ha $l = f(x_0)$.

Teoremi sulle funzioni continue

Teorema dell'esistenza degli zeri Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Dimostrazione (metodo di bisezione)

Sia per esempio $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Sia c il punto medio di $[a, b]$ cioè $c = \frac{a+b}{2}$. Se $f(c) = 0$ il teorema è dimostrato. Se $f(c) \neq 0$ allora o si ha $f(c) > 0$ oppure $f(c) < 0$. Se $f(c) > 0$ si considera l'intervallo $[c, b]$ perchè f cambia segno.
Se invece $f(c) < 0$ è l'intervallo $[a, c]$ in cui f cambia segno. Chiamiamo $[a_1, b_1]$ l'intervallo che si considera cioè

$$\begin{cases} se \quad f(c) > 0 & \Rightarrow \quad a_1 = c, \;\; b_1 = b \\ se \quad f(c) < 0 & \Rightarrow \quad a_1 = a, \;\; b_1 = c \end{cases}$$

L'intervallo $[a_1, b_1]$ ottenuto ha ampiezza uguale alla metà del precedente $[a, b]$ e $f(a_1)f(b_1) < 0$.

Ripetiamo il ragionamento e consideriamo il punto $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ il punto medio di $[a_1, b_1]$ e così via come prima. Se uno dei punti medi è uno zero per f allora il teorema è dimostrato, oppure si continua e si ottengono due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$:

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b$$

con $f(a_n) > 0$ e $f(b_n) < 0$ per ogni n e $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Per costruzione la succession a_n è crescente ed è limitata superiormente da b. Per il teorema delle successioni monotone ammette limite finito e sia x_0 questo limite: $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$. Anche la successione b_n ammette limite finito perchè monotona decrescente e limitata inferiormente da a. Si ha: $b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}$ che converge a x_0 per $n \to +\infty$ $\left(\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n + \dfrac{b-a}{2^n} = x_0\right)$. Essendo f continua si ha

$$\begin{cases} f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \geq 0 \\ f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \leq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = 0.$$

Dalla dimostrazione appena vista, non è chiaro quale zero della funzione viene determinato (ce ne possono essere più di uno). Le tre successioni $a_n, \ b_n, \ c_n$ convergono a x_0 e i termini di una qualunque di esse possono essere considerati approssimazioni di x_0.
Per esempio, fermandosi dopo n passi si può considerare a_n come valore approssimato di x_0 con un errore per difetto e b_n il valore approssimato di x_0 con un errore per eccesso, cioè

$$a_n \leq x_0 \leq b_n$$

e l'errore di approssimazione che si commette sostituendo x_0 con a_n (o b_n è inferiore a $\frac{b-a}{2^n}$. (se si considera il punto medio c_n allora l'errore è inferiore a $\frac{b-a}{2^{n+1}}$

Teoremi sulle funzioni continue

(primo) Teorema dell'esistenza dei valori intermedi (conseguenza del Teorema degli zeri).
Una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ assume tutti i valori compresi tra $\inf f$ e $\sup f$.

Dimostrazione
Dobbiamo far vedere che preso un qualunque valore y_0 compreso tra $\inf f$ e $\sup f$, esiste un x_0 in I tale che $f(x_0) = y_0$.
Sia y_0 compreso tra $\inf f$ e $\sup f$ e sia $g(x) = f(x) - y_0$. Essendo $\inf f < y_0 < \sup f$ esisteranno due punti $x_1, x_2 \in I$ tali che

$$\inf f \leq f(x_1) < y_0 < f(x_2) \leq \sup f.$$

Essendo $f(x)$ continua in I e quindi anche in $[x_1, x_2]$, la funzione $f(x) - y_0$ è continua in $[x_1, x_2]$ e si ha $g(x_1) < 0$ e $g(x_2) > 0$. Per il teorema dell'esistenza degli zeri applicato alla funzione $g(x)$ si ha che esiste $x_0 \in [x_1, x_2]$ zero per g: $g(x_0) = 0$ cioè $f(x_0) = y_0$.

Se l'intervallo I è chiuso e limitato $[a, b]$ allora il teorema dei valori intermedi si enuncia in questo modo:

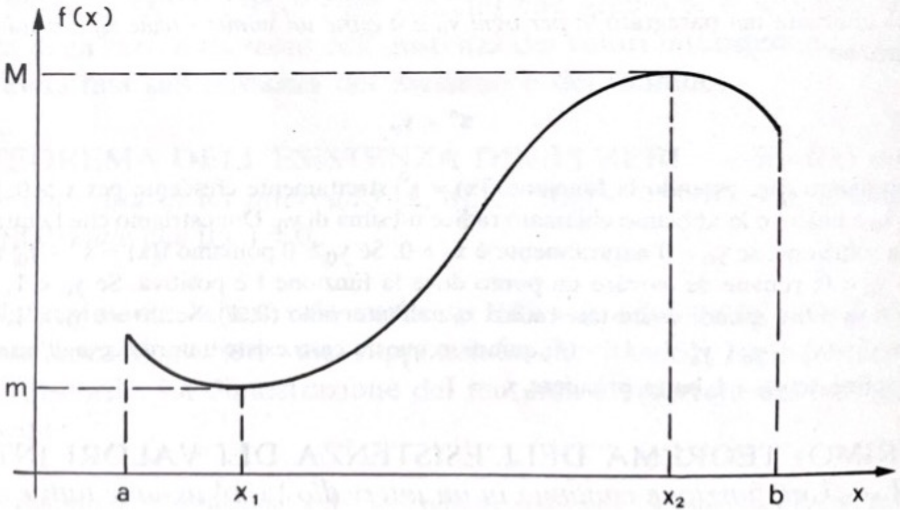
Se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$ allora assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.
La dimostrazione è analoga alla precedente.

Teorema di Weierstrass

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b]$$

I numeri x_1 e x_2 sono detti punti di minimo e di massimo per $f(x)$ in $[a, b]$; i corrispondenti valori $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ sono detti minimo e massimo di $f(x)$ in $[a, b]$.


f(x)
M
m
a
x₁
x₂
b
x

Dimostrazione del Teorema di Weierstrass.

Essendo f una funzione continua in $[a, b]$, l'insieme delle immagini $f([a, b])$ è un insieme chiuso e limitato (un compatto). Essendo limitato, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f sono finiti $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{[a,b]} f(x)$. Inoltre $f([a, b])$ è chiuso e quindi esiste almeno un elemento di $[a, b]$ in cui f assume il valore m e un punto in cui f assume il valore M.

Per dimostrare che una funzione continua trasforma compatti in compatti, si utilizzano le successioni. Vedremo la dimostrazione più avanti.

$$Es.\ y = \frac{1}{x}, \qquad in\ x \in [1, +\infty)$$

Il teorema di Weierstrass non è applicabile: l'intervallo non è limitato.

f(x) è limitata ma non ammette minimo, $\inf\limits_{[1,+\infty)} \frac{1}{x} = 0$

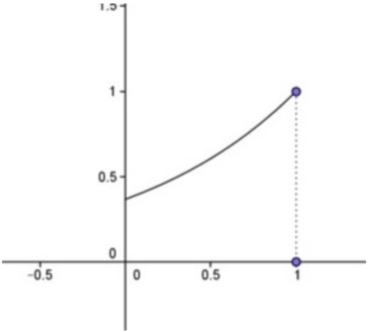
Esempio.

1) Si consideri ora $y = \frac{1}{x}$ nell'intervallo $x \in (0, 1]$. Il teorema di Weierstrass non è applicabile nell'intervallo $(0, 1]$ perchè non è chiuso. Si trova che $y = \frac{1}{x}$ non è limitata superiormente.

2) Si consideri la funzione $y = e^{x-1}$ nell'intervallo $[0, 1]$. Per il Teorema di Weierstrass esistono il massimo e il minimo assoluto di f in $[0, 1]$. Si trova

$$\max_{[0,1]} e^{x-1} = 1$$

$$\min_{[0,1]} e^{x-1} = \frac{1}{e}.$$


1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.5
1

(secondo) Teorema dell'esistenza dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo.

Dimostrazione
Per il teorema di Weierstrass la funzione f assume in $[a, b]$ il valore minimo m e il valore massimo M. Dobbiamo dimostrare che considerato un qualunque $y_0 \in [m, M]$ esiste un $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.
Siano x_1 e x_2 rispettivamente i punti di minimo e di massimo per f e consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - y_0 \qquad x \in [a, b]$.
Si ha $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$ e quindi per la funzione g otteniamo

$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0$$
$$g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0.$$

Applicando il teorema dell'esistenza degli zeri alla funzione g nell'intervallo $[x_1, x_2]$, si ha che esiste $x_0 \in [x_1, x_2]$ tale che $g(x_0) = 0$ cioè la tesi.

Teoremi sulle funzioni continue

Criterio di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a, b]$ è invertibile in tale intervallo.

Dimostrazione

Supponiamo che $f(x)$ sia strettamente crescente in $[a, b]$. Per il primo teorema dell'esistenza dei valori intermedi si ha

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \quad \forall x \in [a, b]$$

dove $f(a) = \min_{[a,b]} f, \quad f(b) = \max_{[a,b]} f$ essendo f strettamente crescente.

Questo significa che $\forall y \in [f(a), f(b)], \quad \exists x \in [a, b] : \; f(x) = y$ e tale x è unico.
Infatti se $\exists x_1, x_2 : \; x_1 < x_2 : \quad y = f(x_1) = f(x_2)$ che è un assurdo in quanto f è strettamente crescente per ipotesi.

Quindi $f(x)$ è iniettiva e perciò è invertibile.

Teorema di continuità delle funzioni monotone

Sia $f(x)$ una funzione monotona nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ è continua in $[a, b]$ se e solo se l'immagine di $f(x)$ è tutto l'intervallo di estremi $f(a)$, $f(b)$.

Teoremi sulle funzioni continue

Teorema di continuità delle funzioni inverse

Sia $f(x)$ una funzione strettamente monotona in $[a, b]$. Se $f(x)$ è continua, allora anche la funzione f^{-1} è continua.

Dimostrazione

Essendo f strettamente monotona in $[a, b]$ allora è invertibile.
Supponiamo che f sia strettamente crescente in $[a, b]$, allora:

$$f : [a, b] \to [f(a), f(b)]; \quad f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b].$$

Per il teorema di esistenza dei valori intermedi, f assume tutti i valori compresi in $[f(a), f(b)]$ e quindi f^{-1} assume tutti i valori compresi in $[a, b]$ ed è monotona (se f è strettamente crescente si ha $f(x_1) < f(x_2)$ ogni volta che $x_1 < x_2$ quindi anche f^{-1} è strettamente crescente).
Allora per il teorema sulla continuità delle funzioni monotone anche f^{-1} è continua.

Continuità uniforme

Definizione Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che f è uniformemente continua in A se $\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni coppia di punti $x,\ x_0 \in A$ con $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Tale definizione differisce da quella di funzione continua perchè se f è solo continua allora δ dipende sia da ϵ che da x_0.
Quindi se f è uniformemente continua è anche continua. Il viceversa non è vero.

Esempio

1) $y = x^2$ è uniformemente continua in $(0, 1)$,
2) $y = \frac{1}{x}$ in $(0, 1)$ è continua ma non uniformemente.
Infatti per $y = x^2$:
fissiamo $\epsilon > 0$ e sia $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Se $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2}$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ci porta a

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < \frac{\epsilon}{2}|x + x_0| \leq \frac{\epsilon}{2}(|x| + |x_0|) < \epsilon$$