

Corso di Analisi Matematica 1

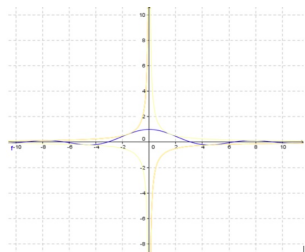
Monica Marras - Università degli Studi di Cagliari

mmarras@unica.it

Limiti di funzioni

$$y = \frac{\sin x}{x}, \quad C.E. \equiv \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

x	y
0,1	0,998
0,001	0,999
\vdots	\vdots



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Definizione. Sia $f(x)$ definita in $A \subseteq \mathbb{R}^*$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per A . Si dice che $f(x)$ ha limite $l \in \mathbb{R}^*$ per x che tende a x_0 se,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : |f(x) - l| < \epsilon, \text{ per ogni } x \in A : |x - x_0| < \delta_\epsilon.$$

In simboli:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \text{ oppure } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$$

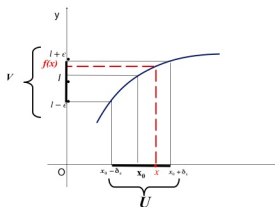
In altre parole: per ogni intorno V di l , è possibile trovare un intorno U di x_0 per cui

$$f(x) \in V, \text{ se } x_0 \neq x \in U \cap A.$$

NOTA.

- x_0 può non appartenere ad A e quindi $f(x_0)$ può non essere definito.
- Un limite può essere finito oppure $+\infty$ o $-\infty$ o non esistere. Se il limite esiste può non appartenere all'insieme delle immagini di f ma è sempre un punto di accumulazione per tale insieme.

per $x \rightarrow x_0$ si ha che
 $f(x)$ appartiene **definitivamente**
ad un qualsiasi intorno V di l .



Definizione Data una funzione $f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}^*$ si dice che, per $x \rightarrow x_0$, possiede **definitivamente** una proprietà \mathcal{P} se esiste un intorno U di x_0 tale che nei punti di $x \in A \cap U$ e distinti da x_0 , la funzione possiede la proprietà \mathcal{P} .

Esempi

La funzione $y = x^2 - 1$ è definitivamente negativa per $x \rightarrow 0$, infatti è negativa nell'intorno $(-1, 1)$.

La funzione $y = \frac{1}{x}$ è definitivamente < 1 per $x \rightarrow +\infty$, infatti essa è < 1 nell'intorno $(1, +\infty)$.

Definizione l_1 si definisce **limite destro** di $f(x)$ per x che tende a x_0^+ ,

(in simboli: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_1$),

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : |f(x) - l_1| < \epsilon, \forall x \in A : x_0 < x < x_0 + \delta_\epsilon$$

cioè $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_1$ se per ogni intorno V di l_1 è possibile trovare un intorno destro di x_0 per cui $f(x) \in V$ se $x \in U_+ \cap A$, dove $U_+ = (x_0, x_0 + \delta_\epsilon)$.

Definizione l_2 si definisce **limite sinistro** di $f(x)$ per x che tende a x_0^- ,

(in simboli: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_2$),

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : |f(x) - l_2| < \epsilon, \forall x \in A : x_0 - \delta_\epsilon < x < x_0$$

cioè $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_2$ se per ogni intorno V di l_2 è possibile trovare un intorno sinistro di x_0 per cui $f(x) \in V$ se $x \in U_- \cap A$, dove $U_- = (x_0 - \delta_\epsilon, x_0)$.

Teorema(unicità del limite). Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

allora l è unico.

Dimostrazione

Per assurdo supponiamo che $\exists l_1, l_2 : l_1 \neq l_2$ con

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \text{nell'intorno } I(x_0, \delta_{1\epsilon})$$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \text{nell'intorno } I(x_0, \delta_{2\epsilon})$$

Sia $\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$, allora si ha

$$2\epsilon = |l_1 - l_2| = |l_1 - l_2 \pm f(x)| \stackrel{\text{per la diseg. triangolare}}{\leq} \underbrace{|f(x) - l_1|}_{< \epsilon} + \underbrace{|f(x) - l_2|}_{< \epsilon} < 2\epsilon \text{ in } I(x_0, \delta_\epsilon), \text{ con } \delta_\epsilon = \min\{\delta_{1\epsilon}, \delta_{2\epsilon}\}, \quad \text{ASSURDO!}$$

Quindi $l_1 = l_2$.

Esempio.

$$y = \frac{|x|}{x}, \quad C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{-x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = -1$$

il limite destro è diverso dal limite sinistro $\Rightarrow \nexists$ *limite*

Nella precedente dimostrazione si è utilizzata la seguente:

Diseguaglianza triangolare. Per ogni coppia di numeri reali x_1, x_2 vale la diseguaglianza

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$$

Dimostrazione. Ricordando che $|x| \leq r$, con $r > 0$, è equivalente a $-r \leq x \leq r$, ponendo $r = |x|$ si ottiene $-|x| \leq x \leq |x|$.

$$\text{per } x = x_1 \text{ si ha } -|x_1| \leq x_1 \leq |x_1|$$

$$\text{per } x = x_2 \text{ si ha } -|x_2| \leq x_2 \leq |x_2|$$

Sommando membro a membro si ha: $-(|x_1| + |x_2|) \leq x_1 + x_2 \leq |x_1| + |x_2|$
Cioè la tesi.

(La dimostrazione che $|x| \leq r$ è equivalente a $-r \leq x \leq r$ segue facilmente dalla definizione di valore assoluto)

Definizione Si definisce **limite per eccesso** il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+$ se per ogni intorno destro V^+ di l si può trovare un intorno U di x_0

Si definisce **limite per difetto** il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^-$ se per ogni intorno sinistro V^- di l si può trovare un intorno U di x_0 .

Esempi.

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{|x|} = 1^+,$$

infatti, fissato $\epsilon > 0$ si ha $0 < e^{|x|} < 1 + \epsilon$ per $|x| < \ln(1 + \epsilon)$ (che è un intorno di 0 con raggio $\delta_\epsilon = \ln(1 + \epsilon)$.)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1^-$, infatti considerato un intorno sinistro di 1: $(1 - \epsilon, 1)$ risulta $1 - \epsilon < \frac{x-1}{x} < 1$ per $x > \frac{1}{\epsilon}$ cioè per x appartenente all'intorno di $+\infty$: $(k, +\infty)$ con $k = \frac{1}{\epsilon}$

Definizione Limite infinito al finito.

Sia $f(x)$ definita in $A \subseteq \mathbb{R}^*$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per A . Si dice che $f(x)$ ha limite $+\infty$ per x che tende a x_0 se,

$$\forall M > 0 \exists \delta_M > 0 : f(x) > M, \text{ per ogni } x \in A : |x - x_0| < \delta_M.$$

In simboli:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ oppure } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$$

Allora $V = (M, +\infty)$, e $U = (x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M)$

In modo analogo si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

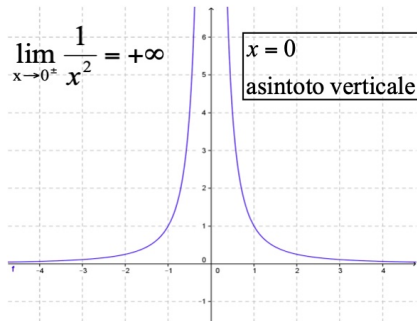
$$\forall M > 0 \exists \delta_M > 0 : f(x) < -M, \text{ per ogni } x \in A : |x - x_0| < \delta_M.$$

allora $V = (-\infty, -M)$.

Definizione. Asintoto verticale

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

allora la retta verticale $x = x_0$ si chiama Asintoto verticale per $f(x)$.



Definizione Limite finito all'infinito.

Sia $f(x)$ definita in $A \subseteq \mathbb{R}^*$. Si dice che $f(x)$ ha limite l per x che tende a $+\infty$ se,

$$\forall \epsilon > 0 \exists K_\epsilon > 0 : \text{risulta } |f(x) - l| < \epsilon, \text{ per ogni } x \in (K_\epsilon, +\infty).$$

In simboli:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \text{ oppure } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$$

Allora $V = (l - \epsilon, l + \epsilon)$, e $U = (K_\epsilon, +\infty)$

In modo analogo si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ se

$$\forall \epsilon > 0 \exists K_\epsilon > 0 : |f(x) - l| < \epsilon, \text{ per ogni } x \in (-\infty, -K_\epsilon).$$

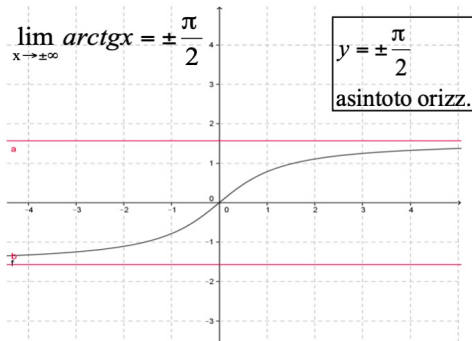
allora $V = (l - \epsilon, l + \epsilon)$ e $U = (-\infty, -K_\epsilon)$

Definizione. Asintoto orizzontale

Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$

allora

la retta orizzontale $y = l$ si chiama
Asintoto orizzontale per $f(x)$.



Definizione Limite infinito all'infinito.

Sia $f(x)$ definita in $A \subseteq \mathbb{R}^*$. Si dice che $f(x)$ ha limite $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ se,

$$\forall M > 0, \exists K_M > 0 : \text{risulta } f(x) > M, \text{ per ogni } x \in (K_M, +\infty).$$

In simboli:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ oppure } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Allora $V = (M, +\infty)$, e $U = (K_M, +\infty)$

In modo analogo si definiscono i limiti

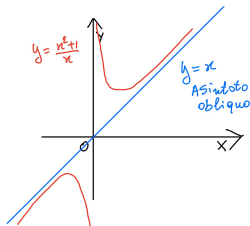
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$$

Definizione. Asintoto obliquo

Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ allora non esiste l'asintoto orizzontale ma potrebbe esserci un **Asintoto obliquo** di equazione $y = mx + q$ dove $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$



Teorema Algebra dei limiti

Supponiamo che esistano finiti i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Allora

$$i) \lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cl_1, \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = l_1 \pm l_2;$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = l_1 l_2;$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{se } l_2 \neq 0).$$

Dimostrazione

Teorema (convenzioni con ∞)

- ◇ $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a \pm \infty = \pm\infty$ (si legge: se $f(x) \rightarrow a$ e $g(x) \rightarrow \pm\infty$ allora $f(x) + g(x) \rightarrow \pm\infty$ (vale anche quando $f(x)$ non ammette limite ma è limitata)
- ◇ $+\infty + \infty = +\infty,$
- ◇ $-\infty - \infty = -\infty,$
- ◇ $\forall a > 0, \quad a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,$ ($f(x)$ tende ad a , $g(x)$ tende a $\pm\infty$)
- ◇ $\forall b < 0, \quad b \cdot (\pm\infty) = \mp\infty,$
- ◇ $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty,$
- ◇ $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty,$
- ◇ $\frac{a}{\infty} = 0$, vale anche quando al num $f(x)$ non ammette limite ma è limitata.
- ◇ $\frac{a}{0} = \infty.$

Forme Indeterminate

- ◇ $+\infty - \infty$ si legge: se $f(x) \rightarrow +\infty$ e $g(x) \rightarrow -\infty$ allora $f(x) + g(x) \rightarrow +\infty - \infty$ Forma indeterminata,
- ◇ $0 \cdot \infty$,
- ◇ $\frac{\infty}{\infty}$,
- ◇ $\frac{0}{0}$,
- ◇ 1^∞ , il limite è del tipo $[f(x)]^{g(x)} \rightarrow 1^\infty$ Forma Indeterminata!.
- ◇ 0^0 ,
- ◇ ∞^0

Teorema del confronto (dei due carabinieri).

Siano $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ tre funzioni definite in $A \subset \mathbb{R}^*$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A e

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x).$$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Dimostrazione

Per definizione di limite, fissato $\epsilon > 0$ si ha

$$l - \epsilon < f_1(x) < l + \epsilon, \quad \forall x \in I(x_0, \delta_{1\epsilon})$$

$$l - \epsilon < f_2(x) < l + \epsilon, \quad \forall x \in I(x_0, \delta_{2\epsilon})$$

e quindi

$$l - \epsilon < f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) < l + \epsilon, \quad \forall x \in I(x_0, \delta_\epsilon), \quad \delta_\epsilon = \min\{\delta_{1\epsilon}, \delta_{2\epsilon}\}.$$

C.V.D

Caso particolare del $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$

Teorema

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0; \quad e \quad |g(x)| \leq M,$$

allora per ogni $x \in I(x_0, \delta)$ si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Dimostrazione

Si ha

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) \cdot g(x)| \leq M \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

e per il Teorema del confronto si ha la tesi.

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Applicazione del teorema del confronto nella dimostrazione

del limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

x = misura dell'arco PA in radianti

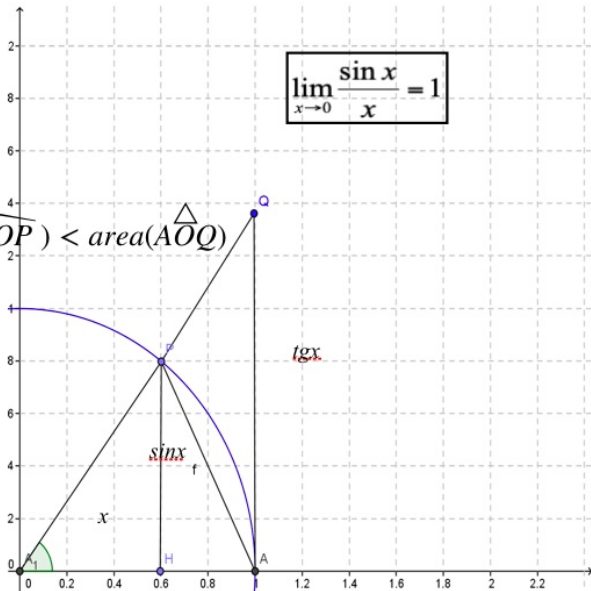
$PH = \sin x$

$QA = \operatorname{tg} x$

$$\operatorname{area}(\triangle AOP) < \operatorname{area}(\widehat{AOP}) < \operatorname{area}(\triangle AOQ)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$



Teorema della permanenza del segno.

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ (oppure < 0),

allora definitivamente si ha $f(x) > 0$ finito (rispettivamente < 0) per $x \rightarrow x_0$

Dimostrazione

Sia $l > 0$, fissato $\epsilon = \frac{l}{2}$ per la definizione di limite si ha che esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon \quad \text{per ogni } x \in I(x_0, \delta_\epsilon)$$

e in particolare

$$f(x) > l - \epsilon = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} > 0.$$

Analoga dimostrazione nel caso di $l = \pm\infty$ e nel caso $l < 0$ finito.

Teorema Limite di funzione composta

Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ con $IM(g) \subseteq A$, allora è definita la composizione $f \circ g : B \rightarrow \mathbb{R}$.

Sia x_0 un punto di accumulazione per B e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l.$$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l$

Dimostrazione

Essendo $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l$ allora y_0 è un punto di accumulazione per A (è infatti un punto di accumulazione per $Im(g)$).

Per la definizione di limite, fissato $\epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon : |f(y) - l| < \epsilon$ se $y \in A$ e $0 < |y - y_0| < \delta_\epsilon$

(Continua la Dimostrazione)

Avendosi $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$, allora in corrispondenza di δ_ϵ , $\exists \sigma_{\delta_\epsilon}$:

$$0 < |g(x) - y_0| < \delta_\epsilon \quad \text{se } x \in B \text{ e } 0 < |x - x_0| < \sigma_{\delta_\epsilon}.$$

Quindi abbiamo dimostrato che

fissato $\epsilon > 0$, $\exists \sigma_{\delta_\epsilon}$: $|f(g(x)) - l| < \epsilon$ se $x \in B$ e $0 < |x - x_0| < \sigma_{\delta_\epsilon}$.

Cioè la tesi.

Per le funzioni monotone l'operazione di limite è sempre possibile

Teorema Esistenza del limite per funzioni monotone

Siano $a, b \in \mathbb{R}^*$ con $a < b$.

i) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente.

$$i_1) \text{ Per ogni } x_0 \in (a, b) \text{ si ha } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{(a, x_0)} f.$$

$$i_2) \text{ Per ogni } x_0 \in [a, b) \text{ si ha } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{(x_0, b)} f.$$

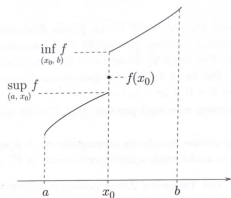
ii) Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione decrescente.

$$ii_1) \text{ Per ogni } x_0 \in (a, b] \text{ si ha } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf_{(a, x_0)} f.$$

$$ii_2) \text{ Per ogni } x_0 \in (a, b) \text{ si ha } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup_{(x_0, b)} f.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{(a, x_0)} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{(x_0, b)} f(x)$$



Dimostrazione

$i_1)$ Sia $\sup_{(a, x_0)} f = l$. Se l è finito, essendo l'estremo superiore di f allora è un maggiorante di f e quindi $f(x) \leq l, \forall x \in (a, x_0)$. Fissiamo $\epsilon > 0$ e sia $x_\epsilon \in (a, x_0)$ tale che $l - \epsilon < f(x_\epsilon)$. Per ipotesi f è crescente e si ha $l - \epsilon < f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq l < l + \epsilon, \forall x \in (x_\epsilon, x_0)$ e quindi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$.

Se $\sup_{(a, x_0)} f(x) = l = +\infty$ allora fissato $M > 0$

$\exists x_M \in (a, x_0 \equiv b) : f(x_M) > M$. Essendo f crescente allora si ha $f(x_0) > f(x_M) > M$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l = +\infty$.

(Nota che $x_0 \equiv b$ perchè se fosse $x_0 < b$ allora, essendo $f(x)$ crescente si avrebbe che $\sup_{(a, x_0)} f(x) < f(b)$).

Limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Definizione

Una funzione $f(x)$ si dice **infinitesima** (o è un infinitesimo) per $x \rightarrow x_0$ (oppure per $x \rightarrow \infty$), x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad (\text{oppure } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0)$$

Esempi

$y = e^x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow -\infty$,

$y = \log_a x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 1$,

$y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$ (ma anche per $x \rightarrow \pi, 2\pi, \text{ etc.}$),

$y = \frac{1}{x}$ è un infinitesimo per $x \rightarrow \infty$

Definizione. Ordine di infinitesimo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), con $g(x) \neq 0$.
Se $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ e $l \neq 0$, tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l \quad (\text{o} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l),$$

allora si dice che per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine α** rispetto all'infinitesimo campione $g(x)$.

Esempi.

- $y = \sin x$ per $x \rightarrow 0$ è un infinitesimo di ordine 1 rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$, infatti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^\alpha} = 1$ solo se $\alpha = 1$.
- $y = \tan^2 x$ per $x \rightarrow 0$ è un infinitesimo di ordine 2 rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$
- $ord(1 - \cos x) = 2$ rispetto ad x per $x \rightarrow 0$.

Confronto tra infinitesimi

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi per $x \rightarrow x_0$, allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \begin{cases} \neq 0, & \text{se } \text{ord}(f) = \text{ord}(g) \\ = 0, & \text{se } \text{ord}(f) > \text{ord}(g), \\ \pm\infty, & \text{se } \text{ord}(f) < \text{ord}(g), \\ \text{non esiste} & \text{se } f \text{ e } g \text{ non sono confrontabili.} \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime per $x \rightarrow \infty$.

Utilizzando il confronto tra infinitesimi nel calcolo dei limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2},$$

dove f_1 , f_2 , g_1 , g_2 sono **infinitesimi** per $x \rightarrow x_0$, allora **si possono trascurare** gli infinitesimi di ordine maggiore (analogo discorso per funzioni infinitesime per $x \rightarrow \infty$).

Infatti se per es. $ord(f_1) < ord(f_2)$ e al denominatore $ord(g_1) < ord(g_2)$ allora il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g_1}.$$

Questo perchè per il confronto tra infinitesimi si ha che $\frac{f_2}{f_1} \rightarrow 0$ e $\frac{g_2}{g_1} \rightarrow 0$ e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(1 + \frac{f_2}{f_1})}{g_1(1 + \frac{g_2}{g_1})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g_1}.$$

Esempi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3 + 2 \tan x}{(e^x - 1)^2 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{\sin x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2) + x\sqrt[3]{x^2} + \sin x}{e^{2x} - \cos x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin x^3 + 2x^4}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x^2} = -\infty$$

Definizione Si dice che due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono **asintotiche** per $x \rightarrow x_0$ e si scrive $f \sim g$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Una proprietà del simbolo asintotico \sim è: se $f \sim f_1$ e $g \sim g_1$ allora $\frac{f}{g} \sim \frac{f_1}{g_1}$.

Esempi

$$\sin x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0,$$

$$\ln(1+x) \sim x \text{ per } x \rightarrow 0,$$

$$e^x - 1 \sim x \text{ per } x \rightarrow 0$$

Definizione

Una funzione $f(x)$ si dice **infinita** (o è un infinito) per $x \rightarrow x_0$ (oppure per $x \rightarrow \infty$), x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad (\text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty)$$

Esempi

$y = e^x$ è un infinito per $x \rightarrow +\infty$,

$y = \log_a x$ è un infinito per $x \rightarrow 0^+$,

$y = \frac{1}{x-1}$ è un infinito per $x \rightarrow 1$

$y = x^2 + x$ è un infinito per $x \rightarrow \infty$

Definizione. Ordine di infinito

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), con $g(x) \neq 0$. Se $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ e $l \neq 0$, tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l \quad (\text{o} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l),$$

allora si dice che per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), $f(x)$ è un infinito di ordine α rispetto all'infinito campione $g(x)$.

Esempi.

- $ord(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$ per $x \rightarrow +\infty$ rispetto all'infinito campione $g(x) = x$.
- $ord\left(\frac{1}{\sin x}\right) = 1$ per $x \rightarrow 0$ è un infinito di ordine 1 rispetto all'infinito campione $g(x) = \frac{1}{x}$
- $ord\left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = 1$ rispetto a $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0$.

Confronto tra infiniti

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \rightarrow x_0$, allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \begin{cases} \neq 0, & \text{se } \text{ord}(f) = \text{ord}(g) \\ = 0, & \text{se } \text{ord}(f) < \text{ord}(g), \\ \pm\infty, & \text{se } \text{ord}(f) > \text{ord}(g), \\ \text{non esiste} & \text{se } f \text{ e } g \text{ non sono confrontabili.} \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti per $x \rightarrow \infty$.

Utilizzando il confronto tra infiniti nel calcolo dei limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2},$$

dove f_1 , f_2 , g_1 , g_2 sono **infiniti** per $x \rightarrow x_0$, allora **si possono trascurare** gli infiniti di ordine minore (analogo discorso per funzioni infinite per $x \rightarrow \infty$). Infatti se per es. $ord(f_1) < ord(f_2)$ e al denominatore $ord(g_1) < ord(g_2)$ allora il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g_2}.$$

Questo perchè per il confronto tra infiniti si ha che $\frac{f_1}{f_2} \rightarrow 0$ e $\frac{g_1}{g_2} \rightarrow 0$ e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(1 + \frac{f_1}{f_2})}{g_2(1 + \frac{g_1}{g_2})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g_2}.$$

Esempi.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} + \ln x}{x^2 + 2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} + x + 1}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x^3 + \sqrt{x}}{x^2(2x - 1) + \sqrt{3}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

Gerarchia degli infiniti.

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$\left(\log_a x\right)^\alpha \ll x^\beta \ll b^x, \quad \text{con } \alpha, \beta > 0; a, b > 1$$

Non è sempre possibile calcolare l'ordine di infinito (o di infinitesimo) rispetto alla funzione campione usuale.

Esempi.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \forall \alpha > 0 \text{ e } a > 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha, \beta > 0, a > 1.$$

Siano $f(x) = o(x^\alpha)$ (si legge "o piccolo di x^α), e $g(x) = o(x^\beta)$ due funzioni **infinitesime di ordine superiore** rispettivamente ad α e β per $x \rightarrow 0$.

Allora si ha

- $cf(x) = o(x^\alpha), \quad \forall c \in \mathbb{R},$
- $x^\lambda f(x) = o(x^{\lambda+\alpha}), \quad \lambda > 0,$
- $f(x) \cdot g(x) = o(x^{\alpha+\beta}),$
- $f(x) + g(x) = o(x^\gamma), \quad \gamma = \min\{\alpha, \beta\}$

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni **infinite** di ordine rispettivamente α e β . Allora si ha

- $ord(f(x) + g(x)) = \max\{\alpha, \beta\}$,
- $ord(f(x) \cdot g(x)) = \alpha + \beta$,
- $ord\left((f(x))^\gamma\right) = \alpha\gamma$