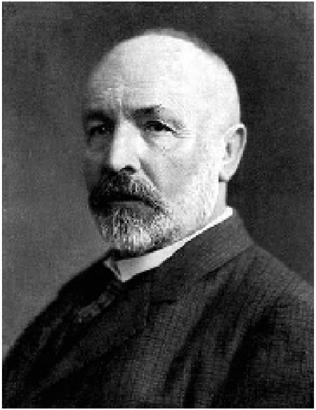
La teoria degli insiemi

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2025-26

Georg Cantor (1845-1918)



Gli albori della teoria degli insiemi

- Cantor inizia la sua carriera di matematico come analista e teorico delle funzioni di variabile complessa. Il tema degli insiemi infiniti fa la sua comparsa nel 1872, e poi in una serie di articoli intitolati *Űber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (1879-1884).
- Nello studio di insiemi infiniti di punti, o di numeri reali, Cantor si convince che accanto al tradizionale concetto di *infinito potenziale* (una grandezza che varia al di là di ogni limite o al di sotto di una quantità piccola a piacere, ma rimane comunque finita), deve avere piena cittadinanza in matematica anche il concetto di *infinito attuale* (un punto o un numero determinato, anche se infinitamente distante o grande).

Risposta alle obiezioni aristoteliche contro l'infinito attuale

1. *Prima obiezione: possiamo contare solo insiemi finiti*. Si tratta di una petitio principii, perché mediante il contare possiamo riconoscere solo insiemi finiti. Ma Aristotele assume indebitamente che gli unici numeri (interi) siano quelli che provengono dall'atto del contare, ossia appunto i numeri finiti.
2. *Seconda obiezione: se esistesse l'infinito attuale, ogni numero finito sarebbe "annientato" dall'aggiunta di un numero infinito.* Ma nell'aritmetica del transfinito di Cantor le cose funzionano diversamente. Aggiungendo un numero finito a un numero infinito il primo viene sì "annientato", ma, viceversa, aggiungendo un numero infinito a uno finito il primo può venire modificato (in un senso che preciseremo).

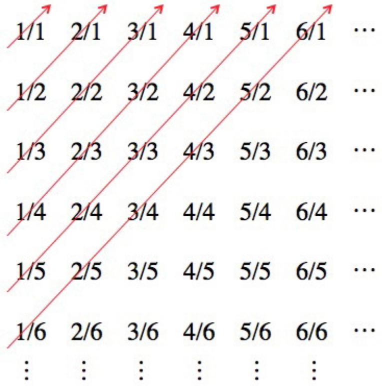
Equinumerosità: il criterio della corrispondenza biunivoca

Per Cantor, due insiemi A e B hanno lo stesso numero di elementi se esiste una corrispondenza biunivoca (funzione iniettiva e suriettiva) da A a B.
Due insiemi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca si dicono *equipotenti*.
Un insieme è numerabile se è equipotente all'insieme $\mathbb{N}$ di tutti i numeri naturali.

1874: l'insieme dei numeri razionali è numerabile

Theorem

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile.



1874: l'insieme dei numeri reali non è numerabile

Theorem

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non è numerabile.

$$
\begin{array}{l}
r_1 = 0.\ d_{11}\ d_{12}\ d_{13}\ d_{14}\ d_{15}\ \cdots \\
r_2 = 0.\ d_{21}\ d_{22}\ d_{23}\ d_{24}\ d_{25}\ \cdots \\
r_3 = 0.\ d_{31}\ d_{32}\ d_{33}\ d_{34}\ d_{35}\ \cdots \\
r_4 = 0.\ d_{41}\ d_{42}\ d_{43}\ d_{44}\ d_{45}\ \cdots \\
r_5 = 0.\ d_{51}\ d_{52}\ d_{53}\ d_{54}\ d_{55}\ \cdots \\
\quad \vdots
\end{array}
$$

$$r = 0.\ d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5\ \cdots$$

1895: le "caratterizzazioni" dei concetti di insieme e numero cardinale

> *Con "insieme" intendiamo ogni riunione M in un tutto di oggetti m (che vengono detti "elementi" di M) della nostra intuizione o del nostro pensiero.*

Il numero cardinale di un insieme M, indicato con $|M|$,

> *è quel concetto generale che si ottiene da M quando si astragga dalla natura particolare dei suoi elementi e dall'ordine col quale essi sono dati.*

L'equipotenza tra due insiemi è condizione necessaria e sufficiente per l'uguaglianza di numero cardinale.

Basi dell'aritmetica cardinale

Definition

Siano A, B due insiemi disgiunti (finiti o infiniti).

- $|A| \leq |B|$ sse esiste una funzione iniettiva da A a B.
- $|A| + |B| = |A \cup B|$;
- $|A| \cdot |B| = |A \times B|$;
- $|A|^{|B|} = \left|A^B\right|$.

L'addizione e moltiplicazione di numeri cardinali sono associative e commutative; la moltiplicazione distribuisce sull'addizione.

L'aritmetica dei cardinali numerabili

Il cardinale $|\mathbb{N}|$ dell'insieme dei numeri naturali viene notato con $\aleph_0$.

Theorem

- *Per ogni numero naturale n,* $\aleph_0 + n = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
- *Per ogni numero naturale n,* $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
- *Per ogni numero naturale n,* $\aleph_0^n = \aleph_0$.

I cardinali non numerabili

Il cardinale $|\mathbb{R}|$ dell'insieme dei numeri reali (o dei reali compresi tra 0 e 1) viene notato con $\mathfrak{c}$. Si vede facilmente che $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Theorem

Per ogni numero cardinale $\mathfrak{m}$, vale $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$.

La non numerabilità dei reali è un caso particolare di questo teorema:
$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.
Si ottiene allora una successione infinita di cardinali, ciascuno strettamente maggiore del precedente:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} \ldots$$

I numeri ordinali

Definition

Un *tipo d'ordine* è una struttura della forma $(A, <)$, dove A è un insieme e $<$ è una relazione di ordine lineare su A. Un tipo d'ordine $(A, <)$ si dice *bene ordinato* se ogni sottoinsieme non vuoto di A ha un elemento minimale rispetto a $<$.

Definition

Due tipi d'ordine $\left(A, <^A\right)$ e $\left(B, <^B\right)$ si dicono *simili* se esiste una corrispondenza biunivoca $f : A \rightarrow B$ tale che, per ogni $a, b \in A$:

$$\text{se } a <^A b, \text{ allora } f(a) <^B f(b).$$

La relazione di similitudine è una relazione di equivalenza tra tipi d'ordine.

Definition

Un *numero ordinale* è la classe di equivalenza di un tipo d'ordine bene ordinato $(A, <)$ rispetto alla relazione di similitudine.

Caratteristiche dell'aritmetica ordinale

Su numeri ordinali si possono definire una relazione d'ordine (lineare) e operazioni di addizione, moltiplicazione, elevamento a potenza. Si indica con ω il numero ordinale che spetta al tipo d'ordine $(\mathbb{N}, <)$.
Tuttavia le operazioni di addizione e moltiplicazione tra ordinali *non sono commutative*: ad esempio

$$1 + \omega = \omega < \omega + 1.$$

Tuttavia, per i numeri ordinali (diversamente che per i numeri cardinali) vale il *principio di tricotomia*: presi due ordinali qualsiasi α, β, vale che o $\alpha < \beta$ o $\alpha > \beta$ o $\alpha = \beta$.

Le classi numeriche cantoriane

L'insieme dei numeri ordinali di tipi d'ordine finiti, ordinati dalla relazione $<$ tra ordinali, è un tipo d'ordine bene ordinato. La cardinalità di tale insieme è $\aleph_0$.
L'insieme dei numeri ordinali di tipi d'ordine numerabili, ordinati dalla relazione $<$ tra ordinali, è un tipo d'ordine bene ordinato. Cantor dimostra che la cardinalità di tale insieme è il più piccolo cardinale strettamente maggiore di $\aleph_0$. Lo denota con $\aleph_1$.
Iterando tale procedimento, Cantor definisce una gerarchia infinita di cardinali transfiniti, ciascuno maggiore dell'altro:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 ...$$

Ernst Zermelo (1871-1953)

L'ipotesi del continuo

Problema della confrontabilità: ogni numero cardinale transfinito è un aleph? Ossia: ogni cardinale transfinito è ottenibile come cardinale di una classe numerica cantoriana? Il problema viene risolto in modo affermativo da E. Zermelo nel 1904, usando l'assioma di scelta.
Problema del continuo: Con quale aleph coincide $2^{\aleph_0}$? Cantor enuncia l'*ipotesi del continuo*:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Cesare Burali-Forti (1861-1931)

Le antinomie

- *Antinomia di Burali-Forti (1897)*. L'insieme Ω di tutti i numeri ordinali si può considerare un tipo d'ordine bene ordinato. Gli spetterà quindi un ordinale $\overline{\Omega}$, che in base a principi generali dell'aritmetica ordinale dovrebbe essere *strettamente maggiore* di ogni ogni elemento di Ω. Ma allora $\overline{\Omega}$ allo stesso tempo è e non è un numero ordinale.
- *Antinomia di Cantor (1899)*. Il cardinale $|V|$ dell'insieme V di tutti gli insiemi è il massimo numero cardinale, perché preso un qualsiasi insieme A, esiste una funzione iniettiva f da A a V. Ma per il teorema di Cantor:
$$2^{|V|} > |V| .$$

Le antinomie: la soluzione di Cantor

Esistono molteplicità coerenti, che possiamo considerare come oggetti e che possiamo raccogliere in nuove collezioni, e molteplicità incoerenti come ad esempio V.
Cantor non è molto preciso a proposito di questa distinzione.