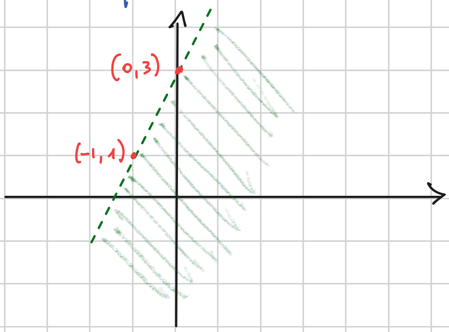
17 - 10 - 25

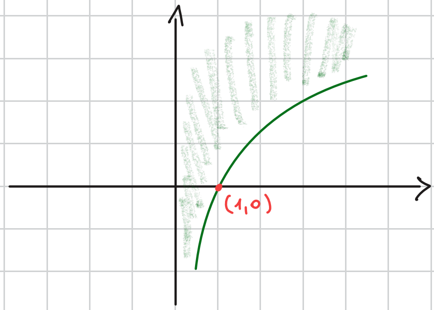
## Soluzioni esercizi dello scorso tutoraggio:

• Individuare le regioni date da:

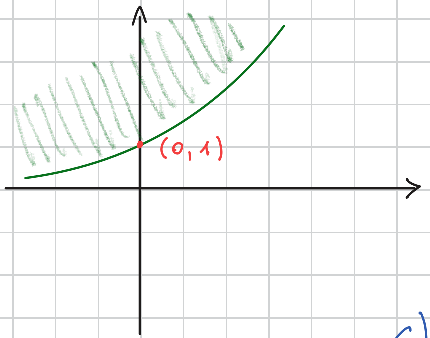
1) $2x - y + 3 > 0$



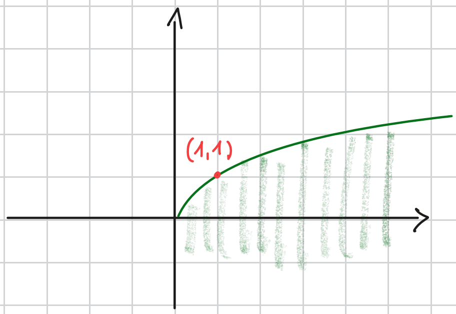

3) $y \geq \ln x$



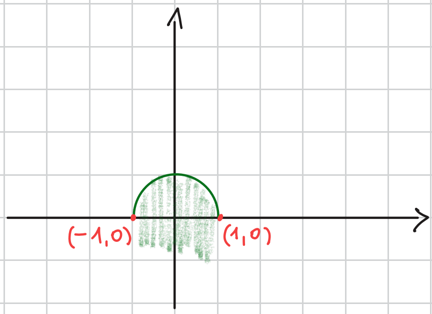

4) $e^x - y \leq 0$




5) $y \leq \sqrt{x}$




6) $y \leq \sqrt{1 - x^2}$

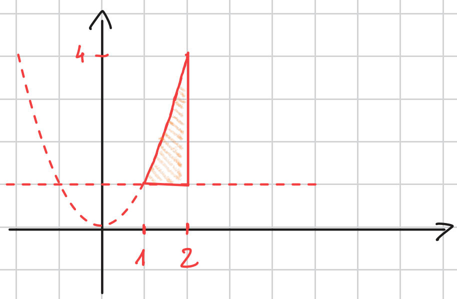



• Trovare il punto di intersezione tra le rette $x = -1$, $x = y + 2$.

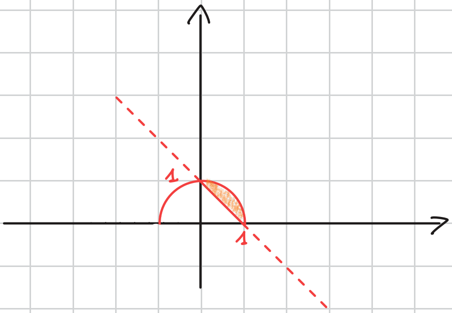
Risolvendo il sistema $\begin{cases} x = -1 \\ x = y + 2 \end{cases} \Rightarrow P = (-1, -3)$

• Disegnare i seguenti domini:

1) $D = \{1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq x^2\}$




DOMINIO NORMALE RISPETTO ALL'ASSE $x$

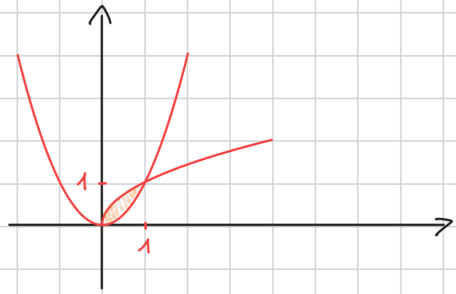



2) $F = \{ -1 \leq x \leq 1,\ 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \}$

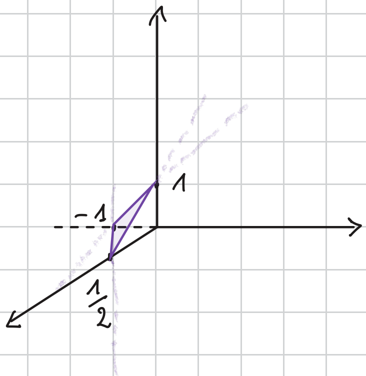
DOMINIO NORMALE RISPETTO ALL' ASSE $x$

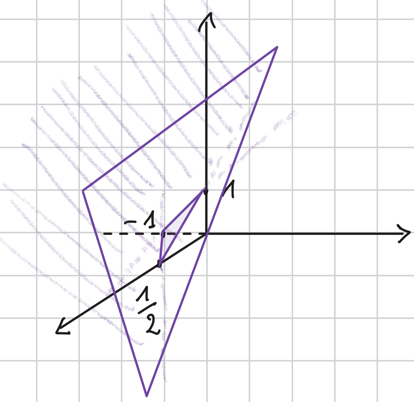
3) $G = \{ x \in [0,1],\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \}$

DOMINIO NORMALE RISPETTO ALL' ASSE $x$



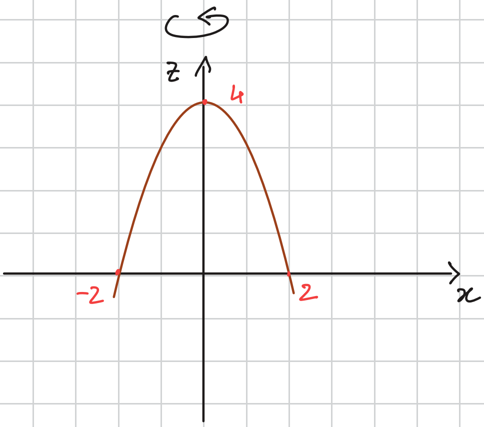

- Disegnare il piano $2x - y + z - 1 = 0$. Successivamente individuare la regione $2x - y + z - 1 \geq 0$.

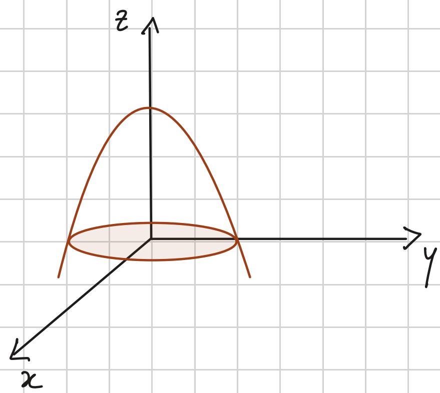


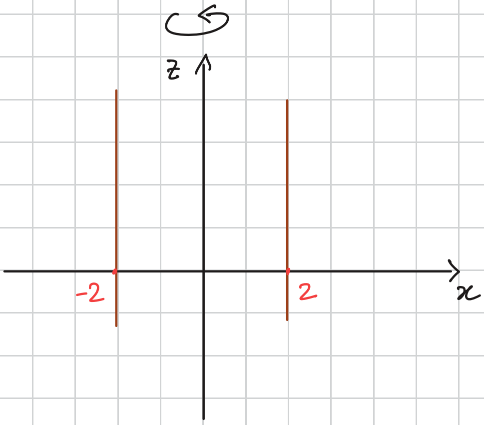

- Descrivere le seguenti sup. di rotazione:

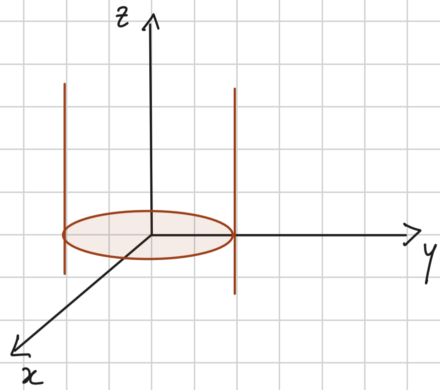
1) $z = 4 - x^2 - y^2$ (ottenuta dalla rotazione di $z = 4 - x^2$, parabola) $\rightsquigarrow$ PARABOLOIDE.



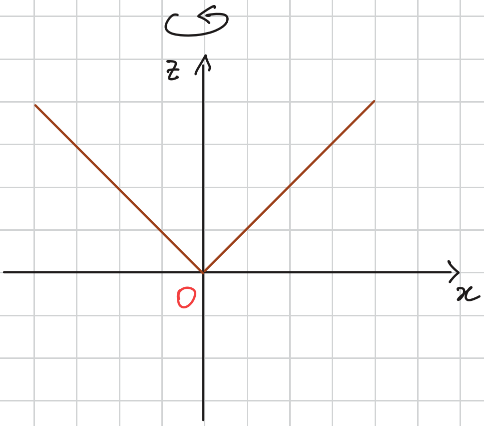



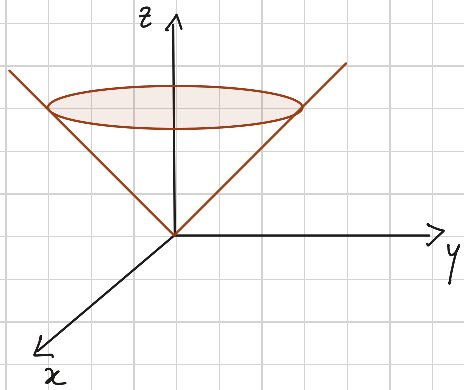
2) $x^2+y^2=2$ (ottenuta dalla rotazione di $x^2=2$, ossia $x=+2$ e $x=-2$, rette) $\rightsquigarrow$ CILINDRO



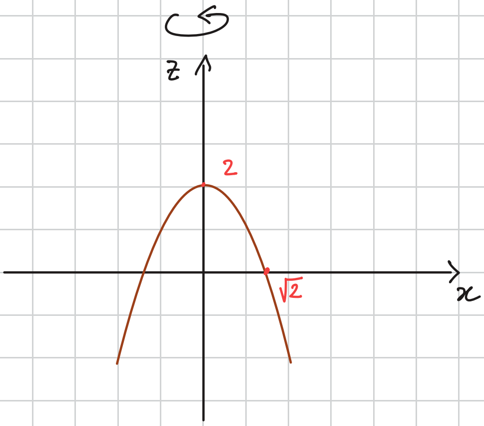



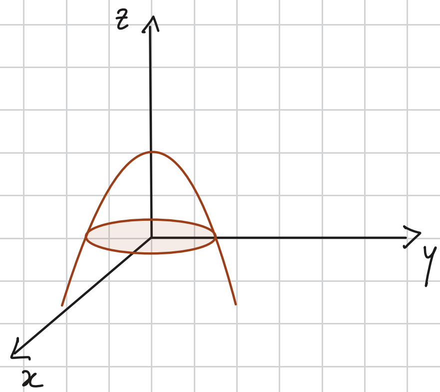

3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (ottenuta dalla rotazione di $z=\sqrt{x^2}$, ossia $z=|x|$, 2 semirette incidenti) $\rightsquigarrow$ CONO




4) $x^2+y^2+z=2$ (ottenuta dalla rotazione di $x^2+z=2$, parabola) $\rightsquigarrow$ PARABOLOIDE.



# Lista 1 – Serie (numeriche & di funzioni)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

SERIE NUMERICA

DIPENDE SOLTANTO DA UN INDICE NATURALE (DENOTATO $k$ o $n$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

SERIE DI FUNZIONI

DIPENDE SIA DA UN INDICE NATURALE, SIA DA UNA VARIABILE $x$.

Domande:

1) Quali criteri conosciamo sulle serie numeriche?
2) Come si calcola la somma di una serie?

$$\left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \quad \text{"SOMMA"} \right]$$

3) Che "tipi" di convergenza esistono per le serie di potenze?

<u>Risposte</u>:

1) Le serie numeriche si studiano in 2 STEP:

$\boxed{\text{STEP 1:}}$ Verifichiamo il seguente:

<u>TEOREMA</u>: [CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA]

$$\text{Se } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge} \implies \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

« È come "se piove ⟹ ci sono le nuvole". Qual è la prima che guardo per sapere se piove? Se ci sono nuvole (se non ce ne sono, allora sicuramente non piove)" »

Se la cond. é verificata (ossia $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$), andiamo avanti:

$\boxed{\text{STEP 2:}}$ Usare uno dei 5 criteri seguenti:

i) <u>TEOREMA DEL CONFRONTO</u>: $\{a_k\}, \{b_k\}$ due successioni, $0 \leq a_k \leq b_k$ (quindi di conseguenza $\sum_k a_k \leq \sum_k b_k$)

Se $\sum_k b_k < \infty$ (scriveremo "$<\infty$" per dire che una serie converge), allora anche $\sum_k a_k < \infty$.

ii) Uno dei due equivalenti:

- <u>CRITERIO DEL RAPPORTO</u>: $\{a_k\}$ successione, $a_k \geq 0 \Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \begin{cases} > 1 & \to \text{la serie } \sum_k a_k \text{ DIVERGE} \\ < 1 & \to \text{la serie } \sum_k a_k \text{ CONVERGE} \\ = 1 & \to \text{NULLA POSSO CONCLUDERE} \end{cases}$$

- <u>CRITERIO DELLA RADICE</u>: $\{a_k\}$ successione, $a_k \geq 0 \Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \begin{cases} > 1 & \to \text{la serie } \sum_k a_k \text{ DIVERGE} \\ < 1 & \to \text{la serie } \sum_k a_k \text{ CONVERGE} \\ = 1 & \to \text{NULLA POSSO CONCLUDERE} \end{cases}$$

Esempi:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ (SERIE NUMERICA)

STEP 1: $a_k = \frac{k}{k+1} \rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}(1)}{\cancel{k}(1+\underbrace{\tfrac{1}{k}}_{\to 0})} = 1$

Poiché il limite NON é zero, la serie NON può convergere (e l'esempio termina qui!)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$ (SERIE NUMERICA)

STEP 1 : $a_n = \frac{e^{-n}}{n} \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}}{n} = "\frac{0}{\infty}" = 0$

Quindi lo STEP 1 é verificato, proseguo.

STEP 2 : usiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-(n+1)}}{(n+1)} : \frac{e^{-n}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\cancel{-n}-1}}{n+1} \cdot \frac{n}{\cancel{e^{-n}}} = e^{-1} \overbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}}^{1} = e^{-1}$$

Poiché il limite dá $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2.71} < 1$, segue che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}/n$ é CONVERGENTE.

Esercizio: rifare il calcolo col criterio della radice.

iii) <u>ASSOLUTA CONVERGENZA</u>:

Se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente

(Ha senso usare questo criterio solo se la serie iniziale contiene anche termini negativi)

iv) <u>TEO. DI LEIBNIZ</u>: [Serie a segno alterno]

Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k p_k$ (quindi una serie che ha valori positivi se $k$ é pari, negativi se $k$ dispari) una serie a segni alterni. Se $\{p_k\}$ é decrescente $(p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \dots)$ e $\lim_{k\to\infty} p_k = 0$, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k p_k$ converge.

v) <u>CRITERIO ASINTOTICO</u>: Se $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ sono due successioni tali che $a_k \sim b_k$ (ossia $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$)

allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hanno stesso comportamento (convergono entrambe o divergono entrambe)

2) In generale, BOH!?!? Ci concentreremo su 2 tipi di serie:

a) GEOMETRICHE: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ ($q$ costante $|q|<1$)

b) TELESCOPICHE: $\sum_{k=0}^{\infty} (A_{k+1} - A_k) \Rightarrow S = \lim_{k \to \infty} A_{k+1} - A_0$

Terremo inoltre a mente che sono CONVERGENTI (ma non é facile esprimerne la somma) le serie

c) ARMONICHE (GENERALIZZATE): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$

(se $\alpha \leq 1$ la serie diverge)

3) Le serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ possono convergere:

a) PUNTUALMENTE: se fissato $x$ vale $\lim_{k \to \infty} \sum_k f_k(x) = S(x)$

b) UNIFORMEMENTE: $\lim_{n \to \infty} S_n = 0$ dove $S_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$

con $f(x)$ limite delle $(f_n(x))$.

c) TOTALMENTE: se $|f_k(x)| \leq M_k$ e la serie (numerica) $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$.

Ci concentreremo su un particolare tipo di serie di funzioni, le SERIE DI POTENZE, ovvero della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (\heartsuit)$$

Per ese la convergenza é più semplice da studiare: se $I = (a,b)$ é l' INTERVALLO DI CONVERGENZA $\Longrightarrow$

- la serie (♡) converge totalmente e uniformemente in ogni $[c,d] \subset (a,b)$ (sottoinsieme chiuso e limitato contenuto in $I$).

---

Esempi:

1.c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n$ serie numerica, geometrica $\left(\left|-\frac{4}{5}\right|<1\right)$

$$\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{\frac{9}{5}} = \frac{5}{9}$$

1.d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+(x^2+2)n^2+4} - \sqrt{n^3+3xn^2+1}\right)$

serie di funzioni.

Pensiamo $x$ fissato e studiamola "puntualmente" come una serie numerica.

STEP 1:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3+(x^2+2)n^2+4} - \sqrt{n^3+3xn^2+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3+(x^2+2)n^2+4} - \sqrt{n^3+3xn^2+1}\right) \frac{\left(\sqrt{n^3+(x^2+2)n^2+4} + \sqrt{n^3+3xn^2+1}\right)}{\left(\sqrt{n^3+(x^2+2)n^2+4} + \sqrt{n^3+3xn^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}+(x^2+2)n^2+4 - (\cancel{n^3}+3xn^2+1)}{\left(\sqrt{n^3+(x^2+2)n^2+4} + \sqrt{n^3+3xn^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(x^2+2-3x)n^2 + 3}{\left(\sqrt{n^3+(x^2+2)n^2+4} + \sqrt{n^3+3xn^2+1}\right)}$$

Questo limite ha denominatore $\sim \sqrt{n^3} = n^{\frac{3}{2}}$.

Il numeratore ha ordine:

- $n^2$ se $(x^2+2-3x) \neq 0 \longrightarrow \lim = \infty$
- $0$ se $(x^2+2-3x) = 0 \longrightarrow \lim = 0$

Quindi affinché sia soddisfatto lo STEP 1, deve essere $x^2+2-3x=0$, ossia $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

$\rightsquigarrow x=1$ o $x=2$.

Se $x$ è diverso da 1 e da 2, lo step 1 NON è verificato e quindi la serie NON converge.

Resta da studiare $x=1$ o $x=2$.

$\boxed{x=1} \rightsquigarrow$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+(\underbrace{x^2+2}_{1})n^2+4} - \sqrt{n^3+3\underbrace{x}_{1}n^2+1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+3n^2+4} - \sqrt{n^3+3n^2+1}\right)$$

STEP 1: già verificato

STEP 2: riscrivo la serie come fatto prima:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\underbrace{\sqrt{n^3+3n^2+4}}_{\sqrt{n^3}} + \underbrace{\sqrt{n^3+3n^2+1}}_{\sqrt{n^3}}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n^3}+\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^{3/2}}$$

$$= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

(serie armonica generalizzata con $\alpha = \frac{3}{2} > 1$).

Esercizio: studiare il caso $x=2$.

//

# Metodi per calcolare la convergenza delle serie di potenze.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n}_{\text{TERMINE GENERICO}} (x - \underbrace{x_0}_{\text{CENTRO}})^n$$

Le serie di potenze convergono SEMPRE in un intervallo della forma $(x_0 - r, x_0 + r)$ $\quad r =$ RAGGIO DI CONVERGENZA

Per calcolare $r$, abbiamo 2 metodi: $r = \frac{1}{\ell}$, dove

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \qquad \text{(Criterio di D'Alembert)}$$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{(Criterio di Cauchy)}$$

Esempio:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad a_n = 1 \qquad x_0 = 0 \qquad r = ? \qquad r = \frac{1}{\ell},$$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{1} = 1$$

$\rightsquigarrow$ intervallo di convergenza: $I = (x_0 - r, x_0 + r) = (-1, 1)$.

**Esercizio 1.2** (Serie di potenze)**.** Verificare che le seguenti serie di potenze hanno raggio di convergenza $r = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

Studiarne il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Esercizio: svolgere (1.2.b).

1.2.c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n^3}, \quad x_0 = 0, \quad r = ?$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)^3} : \frac{1}{n^3} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)^3} \cdot n^3 \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+3n^2+3n+1} = 1$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad I = (x_0 - r, x_0 + r) = (-1, 1).$$

Studiamo il comportamento agli estremi: ossia le serie numeriche che si ottengono nei casi $x = -1$ e $x = +1$.

$\boxed{x = -1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3} \xrightarrow[x=-1]{} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

STEP 1: $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = ?$ Usiamo il teo. dei 2 carab.

$$\frac{-1}{n^3} \le \frac{(-1)^n}{n^3} \le \frac{1}{n^3} \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = 0.$$

$$\frac{-1}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} 0 \qquad \frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} 0$$

STEP 2: Dato che abbiamo una serie a segni alterni, proviamo ad applicare il teo. di Leibniz:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ ✓
- $\left\{ \frac{1}{n^3} \right\}$ é decrescente: $\frac{1}{1} > \frac{1}{2^3} > \frac{1}{3^3} > \frac{1}{4^3} > \ldots$ ✓

$\Rightarrow$ la serie é convergente.

(A fine esercizio scriveremo $[-1, 1)$ invece di $(-1, 1)$)

Esercizio: studiare l'estremo $x = +1$.

**Esercizio 1.3.** Determinare il raggio di convergenza $r$ delle serie di potenze

$$\sum_{\cancel{n=1}\atop n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n-1} x^n \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+1/n)^n}$$

1.3. a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n-1} x^n$ $\qquad a_n = \dfrac{3^n}{n-1}, \quad x_0 = 0, \quad r = ?$

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{n-1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

1.3. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ $\qquad a_n = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}, \quad x_0 = 0, \quad r = ?$

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}\right)} = 1 \Rightarrow r = 1.$$

**Esercizio 1.4.** Determinare l'intervallo di convergenza $I$ della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^2 e^n}{n 3^n} x^n$$

$$a_n = \frac{2^2 e^n}{n\, 3^n}, \qquad x_0 = 0, \qquad r = ?$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{4 e^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1}} : \frac{4 e^n}{n 3^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{4} e^{\cancel{n+1}}}{(n+1) 3^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{n \cancel{3^n}}{\cancel{4} \cancel{e^n}} = \frac{e}{3} \Rightarrow r = \frac{3}{e}$$

$$\rightsquigarrow I = (x_0 - r, x_0 + r) = \left(-\frac{3}{e}, \frac{3}{e}\right)$$

Studio del comportamento agli estremi:

$$\boxed{x = \frac{3}{e}} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^2 e^n}{n\, 3^n} \cdot \left(\frac{3}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\, \cancel{e^n} \cdot \cancel{3^n}}{n\, \cancel{3^n} \cdot \cancel{e^n}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

questa serie diverge (armonica generalizz. con $\alpha = 1$).

Esercizio: studiare $x = -\frac{3}{e}$ e verificare che in tal caso la serie converge. Il risultato finale è dunque $I = \left[-\frac{3}{e}, \frac{3}{e}\right)$.

Esercizio: svolgere 1.5.

**Esercizio 1.5.** Determinare l'intervallo di convergenza $I$ delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n n^3}$$