Esercitazione: esponenziali e logaritmi

Esercizi

Semplifica le seguenti espressioni, applicando le proprietà delle potenze.

$3^{\sqrt{5}} \cdot 3^{\sqrt{20}}$; $\quad 2^{\sqrt{3}} \cdot 3^{\sqrt{3}}$. $\quad [3^{3\sqrt{5}}; 6^{\sqrt{3}}]$

$5^{3\sqrt{3}} : 5^{\sqrt{3}}$; $\quad (3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$. $\quad [5^{2\sqrt{3}}; 9]$

$(5^{4\pi} : 5^4) \cdot 5^{\pi}$; $\quad [(6^{\sqrt{2}})^2]^{\sqrt{2}}$. $\quad [5^{5\pi-4}; 6^4]$

$\sqrt{32^{\sqrt{2}}}$; $\quad [(5)^{\sqrt{3}-1}]^{\sqrt{3}+1}$. $\quad \left[2^{\frac{5}{2}\sqrt{2}}; 25\right]$

$(2^x \cdot 2^3)^x$; $\quad \sqrt{a} \cdot a^{3x}$. $\quad \left[2^{x^2+3x}; a^{3x+\frac{1}{2}}\right]$

$\sqrt{2\sqrt{4^x}}$; $\quad \left(\dfrac{2^x}{4^{2x}}\right)^3$. $\quad \left[2^{\frac{x+1}{2}}; 2^{-9x}\right]$

$(3^{-2x} \cdot 3^3) : 3^x$; $\quad \sqrt{\dfrac{9^{x+1}}{3^{4x}}}$. $\quad [3^{-3x+3}; 3^{1-x}]$

$2^x \cdot 4^{x+1} \cdot 16^{x+2}$; $\quad 3^{-x} \cdot 9^{-\frac{1}{2}x}$. $\quad \left[2^{7x+10}; \dfrac{1}{9^x}\right]$

$[(2^{x+1} \cdot 2^{-x})^3 : 2^{x-1}]^{\sqrt{x}}$, $x \geq 0$. $\quad [2^{\sqrt{x}(4-x)}]$

$(5^x)^x \cdot 25^{-x} : [(5^{2-x})^x \cdot 5]^{-1}$ $\quad [5]$

Disegna i grafici delle funzioni $y = 2^x$, $y = 4^x$, $y = 5^x$ in uno stesso piano cartesiano. Che cosa puoi dedurre dal confronto dei tre grafici?

Come nell'esercizio precedente, ma con le funzioni $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Rappresenta le seguenti funzioni in uno stesso piano cartesiano. Che cosa puoi notare?

$y = 2^x, \quad y = 2^{x+1}, \quad y = 2^x + 1.$

Esercizi

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali.

$2^{3x-1} = 16$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

$2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

$5^x = \frac{1}{25} \cdot \sqrt{5}$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

$3^x = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$ $\left[\frac{9}{4}\right]$

$4^x = 2 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

$\sqrt[3]{5^x} = \frac{1}{3125}$ $[-15]$

$8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

$2^x + 9 \cdot 2^x = 40$ $[2]$

$3 \cdot 4^x + \frac{7}{4} \cdot 4^x = 19 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

$5 \cdot 2^x + 2^{x-3} = 328$ $[6]$

$9^{x+2} = \sqrt[3]{3^{x+7}}$ $[-1]$

$8^{x-1} = \sqrt[3]{2^{x-3}}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

$3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 8 \cdot 5^3$ $[3]$

$3^x - 3^{x-2} + 3^{x+1} = 35$ $[2]$

$3^{3(x+2)} = 9^{\frac{1}{x}+1}$ $\left[\frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}\right]$

$\frac{2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2}}{8 \cdot 2^{x+3}} = \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$ $\left[\frac{28}{15}\right]$

$\frac{4^{2-x} \cdot 2^{x+3}}{16^x} = \frac{1}{8}$ $[2]$

$\sqrt{27\sqrt{9^x}} = 3^{x-2} \cdot 27$ $[1]$

$3^{2-x} + 3^{3-x} = 12$ $[1]$

$8^{x-\frac{2}{3}} = \sqrt{2^{x+1}}$ $[1]$

$4^x + (2^x)^2 - 2^{2(x-2)} = 124$ $[3]$

$7^x + 49^{\frac{x}{2}} = 2 \cdot \sqrt[5]{343}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

$4^{2x-1} - 4^{2x+1} + 3 \cdot 2^{4x} = -\frac{3}{2}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

Esercizi

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali utilizzando un'incognita ausiliaria.

$4^x = 2^x - 2$	[impossibile]	$2^x - \sqrt{2} = 4 - 2^{\frac{5}{2} - x}$	$\left[\frac{1}{2}; 2\right]$
$8 + 2^{x+1} = 2^{2x}$	[2]	$(3^x - 5)^2 + 1 = 3^x - 5$	[impossibile]
$9^x - 3 = 2 \cdot 3^x$	[1]	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \frac{12}{2^x} + 32 = 0$	$[-2; -3]$
$3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = \frac{1}{3} \cdot 3^x$	$[-1; 2]$	$-2 \cdot 5^{x+2} + 25^{x+1} = 375$	[1]
$5^{2x} - 5^x = 5^{x-2} - \frac{1}{25}$	$[0; -2]$	$9^x + 9 = 10 \cdot 3^x$	[0; 2]
$\frac{2}{3^x - 1} = \frac{1}{3^x - 5}$	[2]	$2^{4x+3} + 2 = 17 \cdot 4^x$	$\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$
$2^x + 8 = \frac{1}{4} + 2^{1-x}$	$[-2]$	$5^{x+2} - 4 \cdot 5^{1-x} - 30 = -5^{2-x}$	$[0; -1]$
$10^x + 10^{2-x} = 101$	[0; 2]	$3^x - 3^{-1} = 3(2 \cdot 3^{-x} + 8 \cdot 3^{-1})$	[2]

Esercizi

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali i cui membri sono riconducibili a potenze di uguale base.

a. $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2$; **b.** $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81}$.

Se $0 < a < 1$, nel passare dalle potenze agli esponenti il verso della disequazione cambia: $a^t > a^z \leftrightarrow t < z$.

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

a. $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2$

$5^{\frac{x}{3}} > \frac{\cancel{2}}{\cancel{250}_{125}}$

dividiamo entrambi i membri per 250

$5^{\frac{x}{3}} > 5^{\square}$

$\frac{x}{3} > \square$

$x > -9$

la base è $5 > 1$: lasciamo lo stesso verso nella disequazione

b. $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\square} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\square}$

scriviamo $\frac{1}{27}$ e $\frac{1}{81}$ come potenze di $\frac{1}{3}$

$3x \ \square \ 4$

$x < \frac{4}{3}$

la base è $\frac{1}{3} < 1$: cambiamo verso nella disequazione

---

$4^x \leq 32$	$\left[x \leq \frac{5}{2}\right]$	$100^x < 0{,}001$	$\left[x < -\frac{3}{2}\right]$
$\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{27}{8}$	$[x < 3]$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2}$	$\left[x > -\frac{1}{2}\right]$
$\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{8}{27}$	$[x < -3]$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} < 625$	$\left[x > -\frac{5}{2}\right]$
$3^{2x+2} < \frac{1}{3}$	$\left[x < -\frac{3}{2}\right]$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-2x} < \frac{3}{2}$	$[x \neq 1]$
$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} < 64$	$[x > -2]$	$5^{x^2-1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+1}$	$[x < -3 \vee x > 0]$

Esercizi

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali con l'uso di un'incognita ausiliaria.

$2 \cdot 3^{-x} - 3^{x} \geq 1$ $[x \leq 0]$

$7^{x} - 6 > 7^{1-x}$ $[x > 1]$

$-4^{x} - 3 \cdot 2^{x} > 2^{2x} - 2^{x}$ [impossibile]

$34\left(\frac{3}{5}\right)^{x} < 25\left(\frac{9}{25}\right)^{x} + 9$ $[x < 0 \vee x > 2]$

$9\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} \leq 0$ [impossibile]

$5^{\frac{2}{x}} - \frac{26}{25} 5^{\frac{1}{x}} > -\frac{1}{25}$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 0 \vee x > 0\right]$

$5 \cdot 5^{x} - 25 + 5 \cdot 5^{-x} > 1$ $[x < -1 \vee x > 1]$

$\frac{1}{3^{x} - 9} - \frac{1}{3^{x} + 1} > 0$ $[x > 2]$

$\frac{-6}{2^{x} - 2} + \frac{9}{2^{x} - 1} < 0$ $[x < 0 \vee 1 < x < 2]$

$\frac{5}{7}(0{,}2)^{x} + \frac{7}{5} - \frac{2}{35}(0{,}2)^{-x} \leq 0$ $[x \geq 2]$

Risolvi le seguenti disequazioni applicando il metodo opportuno.

$\frac{2^{x} - 4}{1 - 3^{x}} > 0$ $[0 < x < 2]$

$\frac{4 - 8^{x}}{3^{x} + 9} \leq 0$ $\left[x \geq \frac{2}{3}\right]$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} < 625$ $\left[x > -\frac{5}{2}\right]$

$45 \cdot 2^{2x-2} < -35 \cdot 4^{x-1}$ [impossibile]

$9^{x} - 12 \cdot 3^{x} + 27 < 0$ $[1 < x < 2]$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x} - 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 8 \geq 0$ $[x \leq -3]$

$4 \cdot 2^{3x} - 4^{x+2} < 0$ $[x < 2]$

$4^{2x-1} - 10 \cdot 4^{x-1} + 4 > 0$ $\left[x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{3}{2}\right]$

$\frac{5^{x} - 125}{(1 - 2^{x})(3^{x} - 3)} \geq 0$ $[x < 0 \vee 1 < x \leq 3]$

$72 \cdot 2^{2x} > 4 \cdot 9^{x} \cdot 27$ $\left[x < -\frac{1}{2}\right]$

Esercizi

Calcola i seguenti logaritmi applicando la definizione.

$\log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2})$

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

$x = \log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2})$ è equivalente a $\square^x = 4 \cdot \sqrt[3]{2} \quad \rightarrow \quad 2^x = 2^2 \cdot 2^{\frac{\square}{\square}} \quad \rightarrow \quad 2^x = 2^{\frac{7}{3}} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\square}{\square}$.

prima proprietà delle potenze

Quindi $\log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2}) = \frac{7}{3}$.

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$; $\qquad \log_{10} 10$.

$\log_2 1$; $\qquad \log_2 2$.

$\log_3 243$; $\qquad \log_2 64$.

$\log 100$; $\qquad \log 1000$.

$\log_2(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2})$; $\qquad \log \frac{1}{\sqrt[13]{10}}$.

$\log_5 \sqrt[5]{5}$; $\qquad \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\log_3 \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}}$; $\qquad \log_5\left(0{,}2 \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Esercizi

VERO O FALSO?

a. $\log 5 - \log 4 = \log 1$ V F

b. $\log \frac{4}{3} = \frac{\log 4}{\log 3}$ V F

c. $\log_2 \sqrt{6} = \frac{1}{2}\log_2 6$ V F

d. $\log_2(2 \cdot 7) = 1 + \log_2 7$ V F

e. $(\log_3 8)^2 = 2\log_3 8$ V F

VERO O FALSO?

a. $2\log_3 5 = \log_3 10$ V F

b. $\log_4 9 = \log_2 3$ V F

c. $\frac{1}{2}\log_2 36 = \log_2 \frac{1}{2} \cdot 36$ V F

d. $(\log_2 7)^2 = \log_2 49$ V F

e. $\frac{\log 11}{2} = \log \sqrt{11}$ V F

Applica le proprietà dei logaritmi per scrivere le seguenti espressioni sotto forma di un unico logaritmo, supponendo che tutti gli argomenti dei logaritmi considerati siano positivi.

$\log 3 + \log 7 - \log 6$ $\left[\log \frac{7}{2}\right]$

$\log_2 50 - \log_2 400 + \log_2 4$ $[-1]$

$\frac{1}{2}\log 81 - \log \frac{9}{7} + \log \frac{10}{7}$ $[1]$

$\frac{1}{3}\log 27 + \log \frac{9}{3} - \log 9$ $[0]$

$\frac{1}{4}\log 81 + 2\log \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\log \frac{1}{9} + \log 2$ $[\log 2]$

$\frac{1}{3}[\log_3 35 - (\log_3 7 - 2\log_3 5)]$ $[\log_3 5]$

$\log_5 100\left(\log_3 \frac{9}{7} - \log_3 \frac{27}{7} + \log_3 \sqrt{3}\right)$ $\left[\log_5 \frac{1}{2} - 1\right]$

$\log_3 a + \log_3 b - \log_3 5 + \log_3 \frac{1}{b}$ $\left[\log_3 \frac{a}{5}\right]$

$\log_5 h - 2\log_5 b + \frac{1}{2}\log_5 6$ $\left[\log_5 \frac{h\sqrt{6}}{b^2}\right]$

Esercizi

Risolvi le seguenti equazioni.

$\log_3(x+8)=2$

Un'equazione logaritmica del tipo $\log_a f(x)=k$, con $k\in\mathbb{R}$, si risolve applicando la definizione di logaritmo, dopo aver posto le C.E. per l'esistenza del logaritmo.

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

- Condizioni di esistenza: $x+8>0 \to x>$ ____.
- Risolviamo l'equazione applicando la definizione di logaritmo.

$x+8=$ ____ $\to$ $x+8=$ ____ $\to$ $x=1$ accettabile perché maggiore di -8

$\log_{x^2}(-2x+8)=1$ $[-4;\,2]$

$\log_2\left(\sqrt{5-x^2}-x\right)=0$ $[1]$

$\log_2\left|\,|x^2-3|-1\,\right|=1$ $[0;\,\pm\sqrt{6}]$

$\log_4(3x-20)=3$ $[28]$

$\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)=-2$ $[6]$

$3\log_8(4x-7)=-2$ $\left[\frac{29}{16}\right]$

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-8)=-3$ $[\pm 4]$

$\log\frac{x-9}{4x}=0$ $[-3]$

$\log_2\frac{2x}{x+3}=-1$ $[1]$

$4\log_{16}x=\log_5\frac{1}{125}$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

$\log_7\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=0$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

$\frac{2}{3}\log_4(2x-3)=\log_8 2$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

Esercizi

Risolvi le seguenti equazioni.

$\log_2(x+1) = 2\log_2 3$ [8]

$\log_2 x - \log_2 7 = \log_2(x-1)$ $\left[\frac{7}{6}\right]$

$\log(x-1) + \log(x-3) = \log 8$ [5]

$\log_2 x + \log_2(x-1) = 2\log_2 x$ [impossibile]

$\log(3x-1) + \log(x-2) = \log 22$ [4]

$\log_2(x-2) - \log_2 x = \log_2 x$ [impossibile]

$\log_5(x^2+1) = \log_5 2 + \log_5(x^2-4)$ [3; −3]

$\log_3(x-2) + \log_3 x = 2\log_3 x$ [impossibile]

$\log_5(x+1) + \log_5 4 = \log_5 6x$ [2]

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x) + \log_2 2x - 1 = 0$ [5]

$\frac{1}{3}\log(9x+8-x^3) = \log(2-x)$ [0]

$\frac{1}{2}\log_2(2x-7) = 2 + \frac{1}{2}\log_2 x$ [impossibile]

$\frac{1}{2}\log(1-8x) = \log(1-\sqrt{2x})$ $\left[0; \frac{2}{25}\right]$

$\log_3|2x-1| - \log_3 x = 0$ $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$

$-2\log_4\sqrt{6x} + \log_4(x^2-16) = 0$ [8]

$\frac{2}{5}\log_4(3x-2) = \log_{32} x$ [1]

$\log_3(2x+7) = 2 + \log_3 x$ [1]

$2\log_2\sqrt{x-2} + \log_2 x = 3$ [4]

$\log_2(x^2+1) = 1 - \log_{\frac{1}{2}} x$ [1]

$\log_2(x^2+2x+8) = 2 + \log_2(x+2)$ [0; 2]

$\log_2 x + \log_2(x-1) = \log_2 3x$ [4]

$\log_2(x^2+1) = 1 + \frac{2}{3}\log_2 x + \log_8 x$ [1]

$\log(x-1) - \log(x+1) = \log(x-3) - \log(x-2)$ [5]

$\log(2x+1) - \log(x-1) = \log(x+4) - \log 2$ [3]

Esercizi

Risolvi le seguenti equazioni.

$$\log x - \frac{1}{2} = \log\sqrt{x}$$ $[10]$

$$\log_2 x^2 + (\log_2 x)^2 = 0$$ $\left[1; \frac{1}{4}\right]$

$$(\log_2 x^2)^2 + 4\log_2\sqrt{x} - 2 = 0$$ $\left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right]$

$$2 = \log_3 x - 8\log_x 3$$ $\left[\frac{1}{9}; 81\right]$

$$(\log_2 x)^3 + 6(\log_2 x)^2 - 16\log_2 x = 0$$ $\left[\frac{1}{256}; 1; 4\right]$

$$[\log_3 (x-1)]^2 = 2 + 2\log_9 (x-1)$$ $\left[\frac{4}{3}; 10\right]$

$$\log_3\sqrt{x}\,(\log_3 x + 1) - 2\log_3 x = 2$$ $\left[\frac{1}{3}; 81\right]$

$$(\log_2 x^2)^2 + 9\log_2 x + 2 = 0$$ $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$

$$3 = \frac{14}{\log_5 x + 2} + \frac{4}{\log_5 x - 1}$$ $[1; 5^5]$

Esercizi

Risolvi le seguenti disequazioni.

$\log_3 x^2 - \log_3 x < 3$ $[0 < x < 27]$

$\log_2(x-1) + \log_2 x > 1$ $[x > 2]$

RISOLVI IN 4 PASSI

1. Determina le condizioni di esistenza dei logaritmi.
2. Applica la prima proprietà dei logaritmi al primo membro.
3. Scrivi il secondo membro come logaritmo in base 2 e passa alla disuguaglianza tra gli argomenti.
4. Poni la disequazione a sistema con le condizioni di esistenza e risolvi.

$\log_3(2x-3) - \log_3(x+1) < 2$ $\left[x > \frac{3}{2}\right]$

$\log_{\frac{3}{5}}(2-x) + \log_{\frac{3}{5}}(x+2) > \log_{\frac{3}{5}} 3x$ $[1 < x < 2]$

$\log_{\frac{1}{4}}(x^2-6) - \log_{\frac{1}{4}}(x-3) > -1$ [impossibile]

$\frac{1}{2}\log(-x^2+2x) < \log x$ $[1 < x < 2]$

$\log_{\frac{1}{4}}(x+1) - 2\log_{\frac{1}{4}}(x-2) + \log_{\frac{1}{4}}(x-1) < 0$ $[x > 2]$

$\log_2(x-1) + \log_2(x+4) \geq \log_2(2x-1) + 1$ $[x \geq 2]$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(25-x) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5) < 0$ $[5 < x < 9]$

Esercizi

Risolvi le seguenti disequazioni.

$(\log_2 x)^2 - \log_2 x < 0$ $\quad [1 < x < 2]$

$(\log_3 x)^2 - 6\log_3 x + 9 \leq 0$ $\quad [27]$

$\log^2 x - 7\log x + 12 < 0$ $\quad [1000 < x < 10000]$

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 < 0$ $\quad \left[\frac{1}{4} < x < 2\right]$

$2(\log_3 x)^2 + 3\log_3 x - 2 < 0$ $\quad \left[\frac{1}{9} < x < \sqrt{3}\right]$

$[\log_2(x+5)]^2 - \log_2(x+5) - 6 > 0$

$\left[-5 < x < -\frac{19}{4} \vee x > 3\right]$

$3\log_5(x-4) > \dfrac{6}{\log_5(x-4)+1}$

$\left[\frac{101}{25} < x < \frac{21}{5} \vee x > 9\right]$

Esercizi

Risolvi le seguenti equazioni usando le proprietà dei logaritmi.

$7^{x+1} + 2 \cdot 7^x = 11$

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

$7^{x+1} + 2 \cdot 7^x = 11$ — raccogliamo 7^x

$7^x(7 + \_\_\_) = 11$

$9 \cdot 7^x = 11$ — dividiamo entrambi i membri per 9

$7^x = \frac{11}{9}$ — calcoliamo i logaritmi in base 7 del primo e del secondo membro

$\log_7 \_\_\_ = \log_7 \frac{11}{9}$ — logaritmo di una potenza

$\_\_\_ \cancel{\log_7 7} = \log_7 \frac{11}{9}$ — $\log_7 7 = 1$

$x = \log_7 \frac{\_\_\_}{\_\_\_}$ — cambiamo la base del logaritmo da 7 a 10

$$x = \frac{\log \frac{11}{9}}{\log 7} = \frac{\log 11 \_\_\_ \log 9}{\log 7}$$

$5^x = 9$	$\left[\frac{\log 9}{\log 5}\right]$	$\frac{7}{2^x} = 1$	$\left[\frac{\log 7}{\log 2}\right]$
$3^x - 2 = 0$	$\left[\frac{\log 2}{\log 3}\right]$	$\sqrt[3]{7^x} = 5$	$\left[\frac{3\log 5}{\log 7}\right]$
$4 \cdot 5^x = 3 \cdot 7^x$	$\left[\frac{\log 3 - \log 4}{\log 5 - \log 7}\right]$	$3 \cdot 2^x + 2^{x+1} = 19$	$\left[\frac{\log 19 - \log 5}{\log 2}\right]$

Esercizi

Risolvi le seguenti equazioni con il metodo che ritieni opportuno.

$3^{\frac{x+2}{2}} = 9$ $\left[2\right]$

$4^{5-x} = 3^{x+1}$ $\left[\frac{5\log 4 - \log 3}{\log 3 + \log 4}\right]$

$3^{\sqrt{x+2}} = 9^{\sqrt{x}}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

$\sqrt{3^{x+3}} = \frac{3^{2x+4}}{27^{5x}}$ $\left[\frac{5}{27}\right]$

$49^x - 13 \cdot 7^x + 36 = 0$ $\left[\log_7 9; \log_7 4\right]$

$25^x - 2 \cdot 5^x = 8$ $\left[\frac{\log 4}{\log 5}\right]$

$4 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 2$ $\left[\frac{\log 2 - \log 7}{\log 3}\right]$

$\frac{8^x \cdot 2}{2^{x+3}} = \frac{2^{x+1}}{2^{2x+2}}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

$64 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^{x+2} - 2 = 0$ $\left[-4\right]$

$3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$ $\left[-1; 2\right]$

$6 - \frac{3+5^x}{5^x} = 6 \cdot 5^x$ [impossibile]

$\frac{2 \cdot 25^x - 13 \cdot 5^x + 15}{5^x - 5} = 0$ $\left[\frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 5}\right]$

$6 \cdot 2^x + \frac{1}{2^x} = 5$ $\left[-1; -\frac{\log 3}{\log 2}\right]$

$5^x + 5^{x+1} + 5^{x-1} - 93 = 0$ $\left[1 + \frac{\log 3}{\log 5}\right]$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{4}{9}\right)^x$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

$\frac{20 - 4^x}{5 + 4^x} = \frac{4}{5}$ $\left[\frac{\ln 80 - \ln 9}{\ln 4}\right]$

$3^x = 16 \cdot 3^{-x+1} + 2$ $\left[\frac{\ln 8}{\ln 3}\right]$

$2^{x+3} - 2^{x+2} = 4 + 2 \cdot 4^{\frac{x}{2}}$ $\left[1\right]$

$\left(2^x - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right) \cdot (3^x - 5) = 0$ $\left[-\frac{4}{3}; \frac{\log 5}{\log 3}\right]$

$3^{x+1} - 2 \cdot 3^x + 3^{x+2} = 5^{x-1}$ $\left[\frac{2\log 5 + \log 2}{\log 5 - \log 3}\right]$

$\frac{3^{x-2} \cdot 2^{1-x}}{6} = 7^x$ $\left[\frac{\log_7 \frac{1}{27}}{\log_7 \frac{14}{3}}\right]$

Esercizi

Risolvi le seguenti disequazioni usando le proprietà dei logaritmi.

$7^x > 4 \cdot 3^{5x}$

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

Applichiamo a entrambi i membri il logaritmo in base 10. Poiché la base è maggiore di 1, manteniamo il verso $>$ nella disequazione fra logaritmi.

$\log 7^x > \log(4 \cdot 3^{5x})$ logaritmo di un prodotto

$\log 7^x > \log 4 + \log 3^{5x}$ logaritmo di una potenza

$x \log 7 > 2\log \underline{\quad} + 5x \underline{\quad\quad}$ trasportiamo i termini con x al primo membro

$x\log 7 - 5x\log 3 > 2\log 2 \quad \rightarrow \quad x(\log 7 - \underline{\quad\quad}) > 2\log 2$

Dato che $\log 7 - 5\log 3 \simeq -1{,}54 < 0$, dividendo entrambi i membri della disequazione per questo fattore, invertiamo il verso della disequazione.

Le soluzioni sono pertanto: $x < \dfrac{2\log 2}{\log 7 - 5\log 3}$.

$2^x < 5$ $\left[x < \dfrac{\log 5}{\log 2}\right]$

$10 \cdot 5^{2x} < 1$ $\left[x < -\dfrac{1}{2\log 5}\right]$

$3^{2x} - 4 \geq 0$ $\left[x \geq \dfrac{\log 4}{2\log 3}\right]$

$3^{x+1} \geq 2^{1-x}$ $\left[x \geq \dfrac{\log 2 - \log 3}{\log 2 + \log 3}\right]$

$4 - 7^{2x} > 0$ $\left[x < \dfrac{\log 4}{2\log 7}\right]$

$100^x - 2^{3-x} < 0$ $\left[x < \dfrac{3\log 2}{2 + \log 2}\right]$

$6^x + 6 \geq 6^{-1}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

$5^{2x} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1} < 0$ $\left[x < \dfrac{\log 3}{2\log 5 + \log 3}\right]$

Esercizi

Traccia per punti il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = |1 - 4^x| - 1$$

$$y = 3^x + 2$$

$$y = 4^{-x} + 1$$

$$y = |3^x - 3|$$

$$y = \log_4 x$$

$$y = 1 + \lg_2 x$$

$$y = \ln x - 1$$

$$y = |\ln x| + 1$$

$$y = \begin{cases} 2^x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 3^x & x \geq 1 \\ -x^2 + 4 & x < 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \ln x & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & x < 1 \end{cases}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Abate, M. **Geometria**. McGraw-Hill

[2] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.blu 2.0 3**. Zanichelli

[3] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.blu 2.0 4**. Zanichelli

[4] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.verde 4A**. Zanichelli

[5] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.verde 4B**. Zanichelli

[6] Bertsch M., Dal Passo R., Giacomelli L. **Analisi matematica**. McGraw-Hill Education

[7] Conti M., Ferrario D. L., Terracini S., Verzini G. **Analisi matematica. Dal calcolo all'analisi, Vol 1**. Apogeo

[8] Marcellini P., Sbordone C. **Esercitazioni di Matematica. Primo volume, parte prima.** Liguori Editore