

La nascita dell'algebra astratta

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2025-26

- I matematici italiani del Rinascimento (Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari) scoprono metodi risolutivi generali, attraverso *equazioni risolventi*, per le equazioni polinomiali di terzo e quarto grado. Ci si chiede se sia possibile fare lo stesso per le equazioni di grado superiore al quarto.
- Nel 1771, Giuseppe Luigi Lagrange dichiara i propri dubbi sulla possibilità di ottenere questo risultato: dal quinto grado in su, l'equazione risolvente ha un grado maggiore rispetto all'equazione di partenza.
- Nel 1798, il medico italiano Paolo Ruffini pubblica la memoria *Teoria generale delle equazioni*, nella quale dimostra l'impossibilità di risolvere per radicali una generica equazione di grado superiore al quarto. La dimostrazione, tuttavia, è in parte lacunosa.

Niels Henrik Abel (1802-1829)



Abel: il teorema di non risolubilità

- Nel 1821, Abel ritiene di aver scoperto un metodo per la risoluzione delle equazioni di grado superiore al quarto. Dopo aver inviato la dimostrazione, tuttavia, si accorge di un errore.
- Nel 1824 capovolge la prospettiva e dimostra l'*impossibilità* di tale soluzione: le radici di una generica equazione di quinto grado non possono essere espresse in funzione dei coefficienti dell'equazione per mezzo di radicali.
- Abel viaggia in Germania e in Francia, ma i suoi contributi vengono ignorati dalla comunità matematica (con l'eccezione di Crelle, che pubblica i suoi lavori sulla sua rivista). Abel morirà giovanissimo di tisi; due giorni dopo la sua morte, arriva a casa sua l'annuncio di una chiamata per una cattedra all'Università di Berlino.

Evariste Galois (1811-1832)



Galois: la nascita della teoria dei gruppi

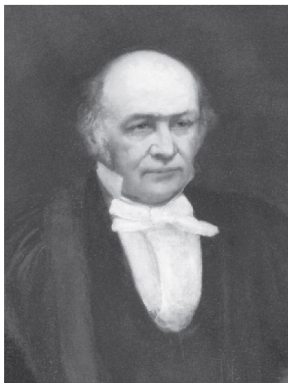
- La ragione profonda alla base del risultato di Abel viene spiegata da Galois, che col suo contributo getta le fondamenta della *teoria dei gruppi*.
- Galois associa a ciascuna equazione algebrica un gruppo di permutazioni delle radici nelle quali sono riflesse le sue caratteristiche essenziali rispetto alla risolubilità. Galois identifica proprietà puramente astratte dei gruppi di permutazioni che rappresentano condizioni necessarie e sufficienti per la risolubilità dell'equazione associata.
- Le equazioni di grado ≤ 4 hanno un gruppo di permutazioni che presenta sempre tali caratteristiche; dal quinto grado in su, esse sono presenti solo in casi particolari.
- Grazie al contributo di Galois, l'algebra si trasforma dallo studio di particolari sistemi numerici e delle equazioni a uno studio astratto e generale di *strutture algebriche* (gruppi, anelli, campi).

- La matematica inglese, per tutto il Settecento, aveva sofferto un ritardo rispetto alla matematica continentale, conseguente all'essersi trincerata nell'uso esclusivo dei metodi geometrici e delle notazioni flussionali newtoniane in analisi.
- Nel 1803, Robert Woodhouse pubblica il volume *Principles of Analytical Calculations*, nel quale critica con sarcasmo l'esclusivo impiego di metodi e notazioni flussionali, deplorando però al contempo la mancanza di rigore degli analisti continentali.
- Nel 1812 viene costituita, a Cambridge, la *Analytical Society*, di cui sono esponenti di spicco C. Babbage, G. Peacock e J.W. Herschel. La società si propone di porre "i matematici inglesi sullo stesso piano di quelli continentali". Viene perorato l'uso della notazione leibniziana in analisi (*The Principles of Pure D-ism in Opposition to the Dot-age of the University*).

La permanenza delle forme equivalenti

- George Peacock (1791-1858) ribadisce la separazione tra la teoria generale dell'algebra da un punto di vista simbolico e astratto e le sue interpretazioni ad es. geometriche. Nel *Treatise on Algebra* (1830) sostiene che il significato delle operazioni e dei risultati dipende solo dai postulati assunti e non dalle interpretazioni dei simboli.
- Peacock non fa, tuttavia, il passo successivo: quello secondo cui una teoria matematica è suscettibile di *diverse* interpretazioni. L'algebra astratta si fonda comunque sull'algebra aritmetica, non più considerata come interpretazione, ma come “suggeritrice” di forme generali. Il *principio di permanenza delle forme equivalenti*, infatti, le proprietà dell'algebra dei numeri reali permangono quando ci si estende a domini più vasti, lasciando eventualmente cadere limitazioni relative all'eseguibilità di certe operazioni.
- Duncan F. Gregory (1813-1844) aderisce in sostanza alle posizioni di Peacock, seppure con una cauta apertura verso la possibilità di interpretazioni qualsiasi.

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)



Il contributo di Hamilton

Hamilton distingue tre concezioni dell'algebra:

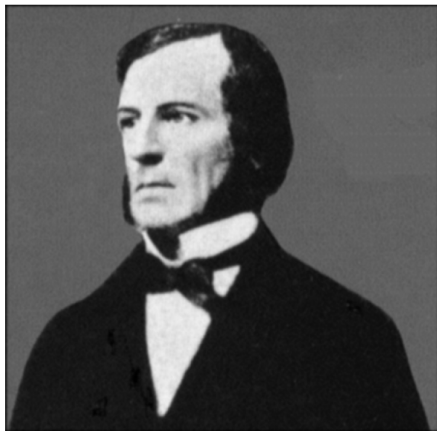
- 1 *Concezione pratica*: l'algebra è uno strumento. Si tratta della concezione tradizionale, superata dai fatti.
- 2 *Concezione filologica*: l'algebra è un linguaggio. Si tratta della posizione di Peacock e Gregory, importante ma incompleta perché non si può attribuire "l'alto nome di scienza" a un "sistema di simboli e niente più, a una questione di ganci e di uncini [...] da farsi secondo regole stabilite ma arbitrarie".
- 3 *Concezione teoretica*: l'algebra è una contemplazione. L'algebrista deve cercare il puro contenuto denotato dai simboli algebrici, una fondazione intuitiva della validità delle regole algebriche.

Hamilton estende il campo complesso al campo dei *quaternioni*, sistema numerico in cui non vale la proprietà commutativa della moltiplicazione. I quaternioni falsificano dunque il principio peacockiano di permanenza delle forme equivalenti.

De Morgan e l'algebra della logica

- Augustus De Morgan (1806-1871) fu scrittore molto prolifico. Segnaliamo in particolare gli *Elements of Algebra* (1837), la *Formal Logic* (1847) e le sei memorie *On Syllogism* (1846-1868). Come algebrista si pone nel solco della scuola di Cambridge, anche se viene notevolmente influenzato da Hamilton.
- Come logico, De Morgan procede innanzitutto a una riorganizzazione della teoria del sillogismo. Le più importanti novità sono l'introduzione della quantificazione del predicato e dei termini negativi, che preludono a una nuova tassonomia delle proposizioni categoriche. L'uso di una notazione "algebraica" e di regole di inferenza formalmente esplicitate consentono una semplificazione della teoria tradizionale.
- De Morgan è anche autore di una teoria del sillogismo generalizzato in cui la copula è sostituita da un'arbitraria relazione binaria. De Morgan precorre quindi il calcolo peirceano delle relazioni e fa un passo decisivo verso la concezione astratta e algebrica della logica.

George Boole (1815-1864)



- George Boole è considerato da molti il padre della moderna logica matematica. Oltre a trattati di analisi infinitesimale e probabilità, scrisse la *Mathematical Analysis of Logic* (1847) e *An Investigation of the Laws of Thought* (1854), i primi volumi compiutamente moderni di logica simbolica.
- L'approccio di Boole alla logica è *psicologista*. Nelle *Laws*, egli afferma che lo scopo dell'opera è

investigare le leggi fondamentali di quelle operazioni della mente mediante le quali si effettua il ragionamento; di dare ad esse espressione nel linguaggio simbolico di un calcolo e di stabilire, su questi fondamenti, la scienza della Logica e costruire i suoi metodi; di rendere questo stesso metodo la base di un metodo generale per l'applicazione della teoria matematica delle probabilità; e infine di raccogliere [...] alcune probabili indicazioni concernenti la natura e la costituzione della mente umana.

Boole: il calcolo logico

- Boole considera un “universo del discorso” che consiste in un insieme di “cose”. Nell’ambito di questo universo possiamo compiere degli “atti di elezione” i cui risultati sono indicati con le lettere x, y, z, \dots . Su questi simboli possiamo compiere varie operazioni: il prodotto xy , la somma $x + y$, la differenza $x - y$, etc.
- Se interpretiamo i simboli come simboli di classe, xy indicherà la classe di tutte le cose che appartengono sia a x che a y , $x + y$ la classe di tutte le cose che appartengono o a x o a y (ma non a entrambi), $x - y$ la classe di tutte le cose che appartengono a x ma non a y .
- Boole assume (implicitamente o esplicitamente) alcune proprietà di tali operazioni: ad esempio, commutatività di somma e prodotto, distributività del prodotto rispetto alla somma, legge degli indici (idempotenza del prodotto). Fornisce regole per la trasformazione e la soluzione di equazioni tra termini così formati.

Boole: la pluralità di interpretazioni

- Boole afferma esplicitamente la natura formale e astratta del suo calcolo, che è passibile di diverse interpretazioni. La validità dei procedimenti non dipende dall'interpretazione dei simboli che vi sono impiegati, ma soltanto dalle leggi che regolano la loro combinazione. E' un passo verso la concezione *ipotetico-deduttiva* della matematica.
- Boole non si cura del fatto che alcuni passaggi intermedi nella soluzione delle sue equazioni non siano suscettibili di essere interpretati in alcun modo. Quello che conta è che il *risultato finale* sia interpretabile.
- Suggerisce esplicitamente quattro possibili interpretazioni dei simboli x, y, z, \dots : 1) simboli per *insiemi*; 2) simboli per *numeri* (restringendo i possibili valori a 0 e 1); 3) simboli per *enunciati*; 4) simboli per *valori di probabilità*.