

# **Esercitazione: elementi di teoria degli insiemi**

# Esercizi

Stabilisci quali dei seguenti insiemi sono uguali tra loro.

$$A = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «casella»}\};$$

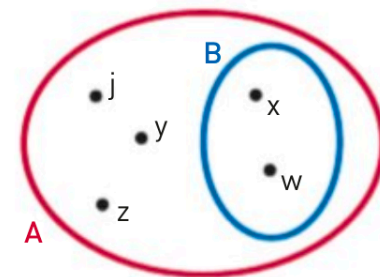
$$B = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «scala»}\};$$

$$C = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «calesse»}\};$$

$$D = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «lasca»}\}.$$

**COMPLETA** osservando il diagramma di Venn.

- a.  $j \in \square$ .
- b.  $y \notin \square$ .
- c.  $y \square A$ .
- d.  $z \square B$ .
- e.  $w, z \in \square$ .



**SPIEGALO TU** La scrittura  $A = \emptyset$  indica l'insieme vuoto. Perché la scrittura  $A = \{\emptyset\}$  non è equivalente?

**VERO O FALSO?** Considera  $A = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «valanga»}\}$ .

a.  $\{x \mid x \text{ è una lettera della parola «lava»}\} \subseteq A$

V  F

c.  $\{v, a, n\} \not\subseteq A$

V  F

d.  $\emptyset \subseteq A$

V  F

b.  $\{\text{alga}\} \subseteq A$

V  F

e.  $\{n, a, l, g, v\} \subseteq A$

V  F

**VERO O FALSO?** Dato l'insieme  $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ , si ha:

a.  $\{2, 3, 5\} \subseteq A$ .

V  F

c.  $\{7\} \in A$ .

V  F

e.  $\{235\} \subset A$ .

V  F

b.  $\{7\} \subset A$ .

V  F

d.  $\emptyset \subseteq A$ .

V  F

f.  $2 \subset A$ .

V  F

# Esercizi

Determina la cardinalità dei seguenti insiemi.

a.  $A = \{0, 1, 2, 3\}$

b.  $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 21\}$

c.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 7n, n \in \mathbb{N}, n < 6\}$

d.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$

**Rappresenta per elencazione i seguenti insiemi.**

L'insieme dei numeri del tipo:

a.  $5n$ , con  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ;

b.  $\frac{5}{n}$ , con  $n \in \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n < 10\}$ ;

c.  $1 - \frac{2n}{n+1}$ , con  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

**COMPLETA** inserendo i simboli  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$ ,  $\not\subset$ ,  $=$ .

Considera gli insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un divisore di } 12\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 5\};$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

a.  $2 \in A$ ;

b.  $\{2\} \in B$ ;

c.  $1 \in B$ ;

d.  $B \in C$ ;

e.  $B \in A$ ;

f.  $C \in A$ ;

g.  $\{0, 1\} \in A$ ;

h.  $3 \in B$ .

# Esercizi

Semplifica le seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze.

$$[(2^6 : 2^5)^3 : 2^2 \cdot 2^4 - 2] : (3 \cdot 5) \quad [2]$$

$$[(2 + 1)^4 \cdot 2^7 \cdot 3^3] : (6^{10} : 6^8)^3 - 6 \quad [0]$$

$$(3^3)^6 : (3^3)^2 \cdot [(3^2)^7 : (3^4)^2] : (3^3)^5 \quad [27]$$

$$5^3 \cdot [(5^2)^4 : 5] : [(5^2)^3 \cdot (5^2)^2] \quad [1]$$

$$[(2^3)^3]^3 : \{[(4^2)^3]^2 : 4\} \quad [32]$$

$$[(2^2)^3]^2 : [(2^5 \cdot 2^5) : (2^4 \cdot 2^0)] - 8^2 \quad [0]$$

$$[(4^3 + 6^2) : (5^6 : 5^3 : 5) + (2 \cdot 3^3 - 7^2)]^2 \quad [81]$$

$$(3^2)^5 : 3^8 \cdot 3 - [(5^2)^5 : 5^8 : 5]^2 + 3[(5^4 : 5)^0]^5 \quad [5]$$

$$\{7^5 \cdot 7^3 : 7^6 + [2^0 + (3^2)^3 - 3^5 \cdot 3]^5\}^3 : 25^3 \quad [8]$$

**TEST** Qual è il quadruplo di  $2^{30}$ ?

- A  $2^{120}$      B  $2^{60}$      C  $2^{34}$      D  $2^{32}$

**TEST** La quarta parte del cubo di 4 è:

- A 16.     B  $4^4$ .     C 4.     D  $4^3$ .

Calcola:

- a. la metà di  $2^{15}$ ;
- b. il triplo di  $3^{18}$ ;
- c. il quadruplo di  $4^{20}$ ;
- d. il quadrato di  $4^{12}$  come potenza di 2;
- e. la quinta potenza di  $9^4$  come potenza di 3.

# Esercizi

**ASSOCIA** ogni espressione al risultato corrispondente.

a.  $(-2)^3 \cdot (-2)^8$       b.  $(-2)^{12} : (-2)^3$       c.  $[(-2)^4]^3$       d.  $[(-2)^4]^2 \cdot (-2)^2$

1.  $(+2)^{10}$       2.  $(+2)^{12}$       3.  $(-2)^{11}$       4.  $(-2)^9$

**CACCIA ALL'ERRORE** Trova l'errore quando c'è.

a.  $(-4)^2 \cdot 5^2 = +20^2$       c.  $-14^3 \cdot 2^3 = (-28)^3$       e.  $-(-2)^{20} : (-2)^{15} = +2^5$

b.  $(-8)^3 : (-8)^2 = +8$       d.  $-7^2(-5)^2 = (-35)^2$       f.  $-(-4^3)^2 = +4^6$

**COMPLETA** le seguenti uguaglianze (a volte c'è più di una risposta possibile).

a.  $(-2)^{\square} \cdot (-2)^4 = (-2)^{11}$       c.  $(-7)^{\square} \cdot (+7)^3 = (\square 7)^5$       e.  $[(+5)^{\square} \cdot (+5)^2]^3 = (+5)^{15}$

b.  $(-3)^2 \cdot (\square)^2 = 36$       d.  $(-2^3)^{\square} = (\square 2)^6$       f.  $(-2)^3 + (-2)^4 = \square$

**Semplifica le seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze.**

$$[(-5)^2]^3 : [(-5)^3 : (-5)^2]^4$$

$$(-6)^4 : (-6)^2 : (+3)^2$$

$$(-3)^4 \cdot (-3)^3 : (-3)^6$$

$$(-5)^2 \cdot (-5)^0 \cdot (-5)^3 : (-5)^4$$

# Esercizi

**Calcola le seguenti potenze.**

$$3^{-3}; (-6)^{-2}; \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}; \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}; 1^{-11}.$$

$$\left(-\frac{4}{9}\right)^{-2}; \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}; 10^{-2}; \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}.$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}; \left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}; -6^{-2}; (-6)^{-2}; \left(-\frac{1}{6}\right)^{-1}.$$

**Applica le proprietà delle potenze.**

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^7 : \left(\frac{2}{5}\right)^4; \quad \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{40}{3}\right)^3; \quad \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2; \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

$$\left(\frac{7}{11}\right)^5 : \left(\frac{7}{11}\right)^3; \quad \left(-\frac{4}{3}\right)^5 : \left(\frac{4}{3}\right)^2; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}; \quad \left(-\frac{3}{4}\right)^{-1} : \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}; \quad \left[\left(-\frac{1}{8}\right)^{-2}\right]^{-1}.$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2; \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^4; \quad \left[\left(-\frac{4}{9}\right)^3\right]^3 \cdot \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right]^3; \quad \left(-\frac{4}{25}\right)^{-4} : \left(\frac{2}{25}\right)^{-4}.$$

# Esercizi

**CACCIA ALL'ERRORE** Indica le scritture che contengono errori e spiega perché.

$$\{-1\} \in \{-1, 1, 2\}; \quad 0 \in \{0\}; \quad 14 \notin \{13\};$$

$$\{7\} \in \mathbb{N}; \quad \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}; \quad \left\{-\frac{1}{2}\right\} \in \mathbb{Q}.$$

**COMPLETA** inserendo  $\in$  o  $\notin$ .

a.  $\sqrt{3} \square \mathbb{R}$

c.  $\sqrt{4} \square \mathbb{Z}$

e.  $-3^3 \square \mathbb{Z}$

b.  $-2 \square \mathbb{Z}$

d.  $-1 \square \mathbb{Q}$

f.  $-(-2)^8 \square \mathbb{N}$

**Rappresenta per elencazione i seguenti insiemi.**

L'insieme dei numeri del tipo:

a.  $2n^3$ , con  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ;

b.  $2x^3 - x$ , con  $x \in \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 3\}$ .

**TEST** Quale dei seguenti è un sottoinsieme di  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un numero pari e } 21 \leq x < 32\}$ ?

**A**  $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n, n \in \mathbb{N} \text{ e } 10 \leq n \leq 14\}$

**C**  $\{22, 24, 26, 28, 30, 32\}$

**B**  $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un multiplo di } 4\}$

**D**  $\{22, 24, 26, 28\}$

# Esercizi

**TEST** Sia  $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{5n+2}{2n-1}, n = 1, 2, 3, 4, 5 \right\}$ . Quale tra le seguenti relazioni è *corretta*?

**A**  $A \subset \mathbb{N}$

**B**  $5 \in A$

**C**  $\left\{ \frac{17}{5}, \frac{23}{7} \right\} \subset A$

**D**  $\{3, 4, 7\} \subset A$

Dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \right\}, \quad C = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 4 = 3\}, \quad D = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10^{-1}\},$$

riconosci quali di essi sono insiemi finiti, infiniti o vuoti.

**COMPLETA** inserendo i simboli  $\in, \notin, \subset, \not\subset, =$ .

Considera gli insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un divisore di } 12\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 5\};$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

**a.**  $2 \in A$ ;

**e.**  $B \in A$ ;

**b.**  $\{2\} \in B$ ;

**f.**  $C \in A$ ;

**c.**  $1 \in B$ ;

**g.**  $\{0, 1\} \in A$ ;

**d.**  $B \in C$ ;

**h.**  $3 \in B$ .

# Esercizi

Rappresenta per elencazione e con un diagramma di Venn l'unione e l'intersezione di ogni coppia di insiemi.

**a.**  $A = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «Marte»}\}; B = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «cartellina»}\}.$

**b.**  $A = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «varia»}\}; B = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «arriva»}\}.$

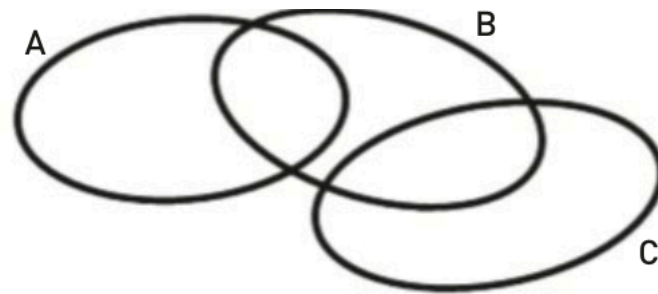
**a.**  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 8\}; B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leq 6\}.$

**b.**  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di 6 e minore di 20}\}; B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è divisore di 18}\}.$

Inserisci negli insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$  della figura i numeri 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 in modo che sia:

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}; B \cup C = \{1, 2, 4, 8, 12\};$$

$$A \cap B = \{1\}; B \cap C = \{4, 8\}.$$



Dati  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è dispari e } 5 \leq x \leq 9\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un divisore di 18}\}$  e  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 6\}$ , determina  $(B \cap C) \cup A$ .

# Esercizi

Dati  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 5 < x \leq 8\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 4 < x \leq 6\}$  e  $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 4 \leq x < 6\}$ , determina:

- a.**  $A \cup B \cup C$ ;      **b.**  $A \cap B \cap C$ .

Dati gli insiemi  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è divisore di } 144\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è divisore di } 175\}$  e  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è divisore di } 221\}$ , determina  $A \cap B \cap C$ .

Dati gli insiemi  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $C = \{2, 3, 6, 9, 12\}$ , determina:

- a.**  $A \cap B \cap C$ ;      **b.**  $A \cap (B \cap C)$ ;      **c.**  $(A \cap B) \cap (A \cup C)$ ;      **d.**  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

Considera gli insiemi  $A = \{1, 2, 6\}$ ,  $B = \{2, 3, 5, 7\}$  e  $C = \{2, 3, 6, 9\}$ . Verifica la proprietà associativa dell'unione di insiemi:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ . Scrivi per elencazione gli insiemi del primo e del secondo membro dell'uguaglianza e poi rappresentali con i diagrammi di Venn.

Dati gli insiemi  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $C = \{2, 3, 6, 9, 12\}$ , determina:

- a.**  $B - (C - A)$ ;      **b.**  $(B - C) - A$ .

# Esercizi

Dati  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 9\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un divisore di } 18\}$  e  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n + 1, n < 6\}$ , scrivi per elencazione e rappresenta con i diagrammi di Venn i seguenti insiemi.

$$(A \cap B) \cup C; (A - B) \cup C; A - C.$$

Per ogni coppia di insiemi  $A$  e  $B$ , rappresenta  $A \times B$  e  $B \times A$  per elencazione e con un diagramma cartesiano.

$$A = \{0, 1\}; \quad B = \{x, y\}.$$

$$A = \{a, b, c\}; \quad B = \{1, 2\}.$$

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}; \quad B = \{1\}.$$

$$A = \{x\}; \quad B = \{1, 5\}.$$

$$A = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «casa»}\};$$

$$B = \{x \mid x \text{ è una vocale della parola «villa»}\}.$$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}, 0 < n < 4\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 7\}.$$

$$A = \{1, 2, 3\}; \quad B = \{x \in A \mid x^3 < 10\}.$$

Da un sondaggio è emerso che, su 30 intervistati, 23 consumano caffè, 21 consumano tè e 3 non consumano né caffè né tè. Quanti intervistati consumano sia caffè sia tè? [17]

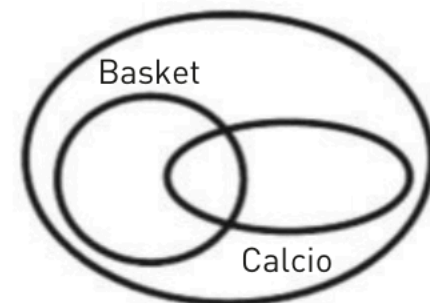
## RISOLVI IN 3 PASSI

- 1 Indica con  $U$  l'insieme degli intervistati e con  $C$  e  $T$  gli insiemi di quelli che consumano rispettivamente caffè e tè. Rappresenta  $U$ ,  $C$  e  $T$  con un diagramma di Venn.
- 2 Trova quanti intervistati consumano caffè o tè e quanti consumano solo caffè e solo tè.
- 3 Determina il numero di coloro che consumano sia caffè sia tè.

# Esercizi

Su 100 alunni di una scuola 82 alunni si interessano di calcio, 26 si interessano di basket, 10 non si interessano né di calcio, né di basket.

Scrivi nella opportuna zona del diagramma a fianco il numero di studenti che si interessano sia di calcio sia di basket.



In una classe di 24 studenti, 10 praticano il nuoto e 8 la pallacanestro. Sapendo che 4 studenti praticano sia il nuoto sia la pallacanestro, quanti studenti nella classe non praticano nessuno dei due sport? Quanti praticano solamente la pallacanestro? [10; 4]

Un pizzaiolo chiede a 350 clienti quali pizze preferiscono tra margherita, verdure e boscaiola. Ogni cliente può esprimere una, due o tre preferenze e i risultati sono indicati in tabella.

**a.** Sapendo che tutti i clienti hanno espresso almeno una preferenza, calcola quante persone hanno dato la loro preferenza per solo margherita e boscaiola.

**b.** Quale pizza ha raggiunto il maggior numero di preferenze?

Preferenze	Pizze
63	margherita, verdure e boscaiola
37	solo margherita
25	solo boscaiola
50	solo verdure
12	solo margherita e verdure
37	solo verdure e boscaiola

[a] 126; b) boscaiola]

# Esercizi

I 100 iscritti al primo anno di una facoltà universitaria frequentano almeno uno dei corsi di Analisi matematica, Fisica e Geometria. Tutti quelli che frequentano il corso di Fisica frequentano anche il corso di Analisi matematica. Inoltre: 20 studenti frequentano tutti e tre i corsi; 30 studenti frequentano solo Analisi matematica; 10 studenti frequentano solo Analisi matematica e Geometria; gli studenti che frequentano Geometria sono 45.

- a. Quanti sono gli studenti che frequentano solo Geometria?
- b. Quanti sono gli studenti che frequentano Fisica?

Un'indagine tra 60 matricole di una grande università di studi economici ha prodotto i seguenti risultati:

19 leggono «Business Week»; 18 leggono «The Wall Street Journal»; 50 leggono «Fortune»; 13 leggono «Business Week» e «The Wall Street Journal»; 11 leggono «The Wall Street Journal» e «Fortune»; 13 leggono «Business Week» e «Fortune»; 9 leggono tutte e tre le pubblicazioni.

- a. Quanti non leggono nessuna delle tre pubblicazioni?
- b. Quanti leggono solo «Fortune»?
- c. Quanti leggono solo «Business Week» e «The Wall Street Journal», ma non «Fortune»?

# Esercizi da “esame”

Rappresentare per elencazione i seguenti insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 9\}, \quad C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq |x| < 8\}.$$

- (a) Determinare  $A \cup B, A \cap B, B \setminus C$ .
- (b) Verificare la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione.
- (c) Rappresentare per elencazione  $\mathcal{P}(A \cap B)$ , insieme delle parti di  $A \cap B$ .
- (d) Verificare che  $A \times (A \cap B) \neq (A \cap B) \times A$ .

Rappresentare per elencazione i seguenti insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un divisore di } 14\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}, \quad C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{5n+2}{2n-1}, n = 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

- (a) Determinare  $A \cup B, A \cap B, C \setminus A$ .
- (b) Verificare la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione.
- (c) Rappresentare mediante elencazione  $\mathcal{P}(A \cap B)$ , insieme delle parti di  $A \cap B$ .
- (d) Verificare che  $A \times (A \cap B) \neq (A \cap B) \times A$ .

# Riferimenti bibliografici

- [1] Abate, M. **Geometria**. McGraw-Hill
- [2] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.blu 2.0 3**. Zanichelli
- [3] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.blu 2.0 4**. Zanichelli
- [4] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.verde 4A**. Zanichelli
- [5] Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. **Matematica.verde 4B**. Zanichelli
- [6] Bertsch M., Dal Passo R., Giacomelli L. **Analisi matematica**. McGraw-Hill Education
- [7] Conti M., Ferrario D. L., Terracini S., Verzini G. **Analisi matematica. Dal calcolo all'analisi, Vol 1**. Apogeo
- [8] Marcellini P., Sbordone C. **Esercitazioni di Matematica. Primo volume, parte prima**. Liguori Editore