Analisi Matematica 2
Funzioni di due o piú variabili

Monica Marras - Universita' degli Studi di Cagliari

mmarras@unica.it

Funzioni di due o piu' variabili.

Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali (che rappresentiamo su una retta);

con $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali (x_1, x_2) (che rappresentiamo su un piano) (usualmente scriviamo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$);

con $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'insieme delle terne ordinate di numeri reali (x_1, x_2, x_3) (che rappresentiamo nello spazio)(usualmente scriviamo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$).

In generale si indichera' con $\mathbb{R}^N$ le n-uple di numeri reali $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.

Definizione di distanza in $\mathbb{R}^N$.
Chiameremo per semplicita' punti le n-uple di numeri reali.
Useremo il simbolo $P = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$.
Dati due punti $P = (x_1, x_2, \ldots, x_N), Q = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N)$ si definisce loro distanza

$$d(P, Q) = \Big(\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}_i)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

La distanza (o metrica) $d(P,Q)$ é una funzione che associa ad ogni coppia di punti P e Q un numero reale ed ha le seguenti proprietá

1. $d(P,Q) \geq 0, \quad e \quad d(P,Q) = 0 \iff P = Q;$
2. $d(P,Q) = d(Q,P);$
3. $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q), \quad \forall P,Q,R \in \mathbb{R}^N.$

Distanza dall'origine $(P, O \in \mathbb{R}^N)$:

$$d(P,O) = \Big(\sum_{i=1}^{N} (x_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

che nel caso $N = 1$ coincide con $|x|$ il modulo di x,

nel caso $N = 2$ coincide con $\sqrt{x^2 + y^2}$, etc.

Definizione di intorno

Si definisce intorno circolare (o disco aperto, o palla aperta) di raggio δ e centro P_0, l'insieme $B_\delta(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^N \ : |P - P_0| < \delta\}$

Indicheremo con B^* l'intorno privo del centro.

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$

P_1 si definisce punto interno all'insieme A se $\exists\ B_\delta(P_1) \subset A$.

P_2 si definisce punto esterno all'insieme A se $\exists\ B_\delta(P_2) \subset \mathbb{R}^N \setminus A$.

Q si definisce punto di frontiera dell'insieme A se in $\forall\ B_\delta(Q)$ cadono punti di A e del suo complementare.

P si definisce punto di accumulazione per A se in $\forall\ B_\delta(P)$ cade almeno un punto di A diverso da P.

Un insieme A é aperto, se tutti i suoi punti sono interni.

Un insieme B é chiuso se il complementare e' aperto.

Ci sono insiemi che non sono chiusi, ne' aperti.

La chiusura di un insieme A, indicata con $\bar{A}$ é unione dell'insieme A con l'insieme dei punti di frontiera di A. $(\bar{A} = A \cup \partial A)$.

A è chiuso se e solo se $A \equiv \bar{A}$.

Un insieme D é un insieme limitato se puo' essere incluso in un intorno circolare dell'origine.

Un insieme D si definisce connesso (o connesso per archi) se presi ad arbitrio due suoi punti, esiste una poligonale interna all'insieme che li unisce.

Un insieme D si definisce semplicemente connesso se presa una qualunque curva chiusa interna, essa é frontiera di un sottoinsieme di D.

Funzioni di due variabili

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
Indichiamo con $z = f(x, y)$ una funzione reale che ad un punto $(x, y) \in D$ fa corrispondere un numero reale $z = f(x, y)$

$$
\begin{aligned}
f : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x, y) &\longrightarrow z = f(x, y)
\end{aligned}
$$

D é detto dominio o campo di esistenza (o campo di definizione) della f.

Il valore $z = f(x, y)$ é detto immagine del punto $P = (x, y)$ tramite f.
L'insieme di tutte le immagini é detta immagine della funzione.

Al variare di (x, y) nell'insieme di definizione di f, la z varia descrivendo una superficie cartesiana.

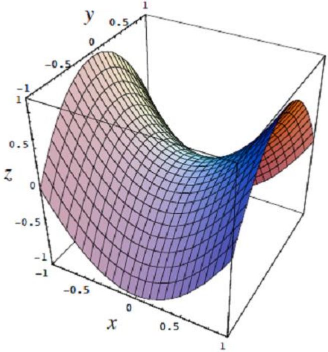
Per rappresentare graficamente una funzione di due variabili reali si puó procedere in due modi:

- rappresentando i punti di coordinate $(x, y, z = f(x, y))$ in un riferimento cartesiano ortogonale di assi x, y, z ottenendo una superficie di $\mathbb{R}^3$ che é il grafico della funzione $f(x, y)$.

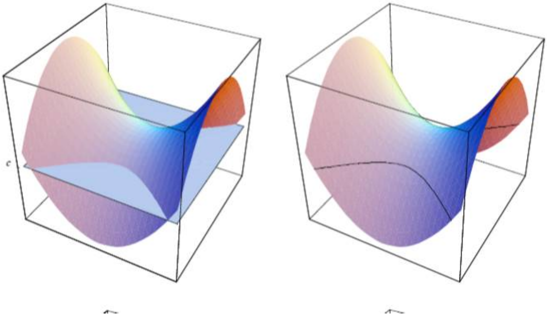
- rappresentando nel piano x, y le curve di livello della funzione $f(x, y)$, cioé il luogo dei punti di coordinate (x, y) tali che

$$f(x, y) = z = costante.$$

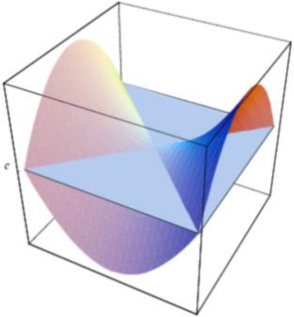
Parabolide iperbolico (paraboloide a sella) $z = x^2 - y^2$

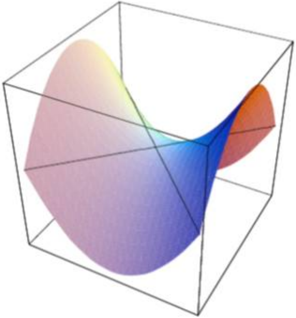


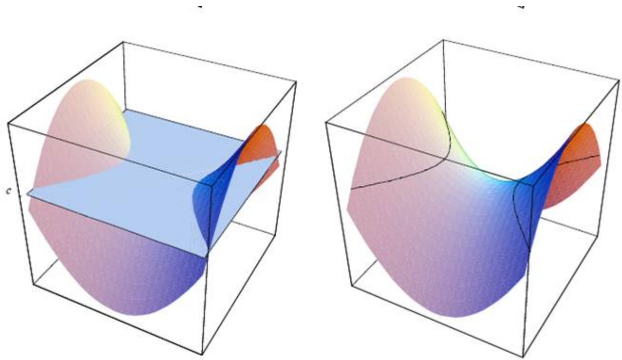
Scegliamo un valore di z, ad esempio $z = -1$ e tracciamo il piano parallelo al piano xy a quota $z = -1$. L'intersezione tra questa due superfici fornisce la curva di livello di equazione $y^2 - x^2 = 1$ (iperbole equilatera)



Ripetiamo lo stesso procedimento per $z = 0$, le curve di livello sono le rette di equazione $y = \pm x$

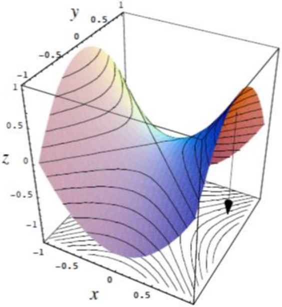


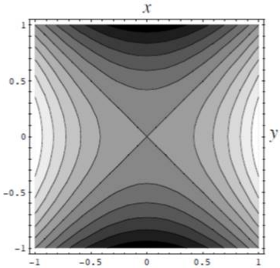




Curve di livello per $z = 1$ (iperbole equilatera).

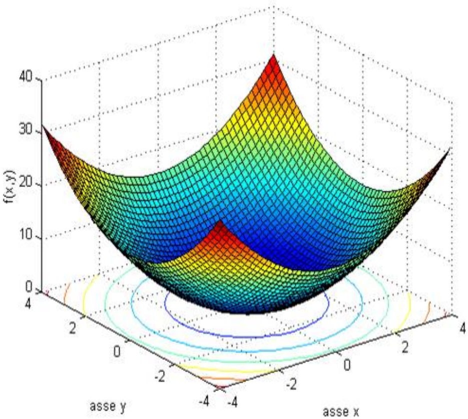
Aggiungendo ulteriori curve di livello e riportando tutto sul piano x y otteniamo





Le zone chiare sono quelle a quota maggiore, quelle scure a quota minore

Paraboloide di rotazione $z = \frac{x^2+y^2}{a^2}$



Le intersezioni con i piani $z = costante (> 0)$ sono circonferenze centrate nell'origine.

Sia $f(x, y)$ una funzione definita in un aperto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ cioé $f : D \to \mathbb{R}$ e sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di accumulazione di D.

Def: Limite finito

Il numero l si definisce limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ e scriveremo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l,$$

se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \quad |f(x, y) - l| < \epsilon, \quad \forall (x, y) \in B^*_\delta(x_0, y_0) \cap D.$

Def: Limite infinito

Si definisce limite infinito di $f(x, y)$ per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ e scriveremo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \infty,$$

se $\forall M > 0, \exists \delta > 0 \ : \quad |f(x, y)| > M, \quad \forall (x, y) \in B^*_\delta(x_0, y_0) \cap D.$

Def: Continuitá

Sia$f : D \to \mathbb{R}$ e $P_0 = (x_0, y_0) \in D$, P_0 di accumulazione per D, se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad o \quad \lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$$

allora definiamo f continua in (x_0, y_0).

Cioè se $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon : \quad |f(x, y) - l| < \epsilon \ \ \forall (x, y) \in B_{\delta_\epsilon}(P_0)$.

Somme, prodotti di funzioni continue sono continue. Quozienti di funzioni continue sono continue eccetto che negli zeri del denominatore.
Componendo funzioni continue otteniamo funzioni continue.
Si estendono a funzioni di due variabili i teoremi noti per funzioni di una variabile.

Teorema di Weierstrass

Sia $f(x, y)$ continua in D e D sia un insieme chiuso e limitato (compatto). Allora f assume massimo e minimo su D.

Esercizio.

Data la funzione $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, si determinino il massimo e il minimo assoluti nel dominio $D = \{x^2 + y^2 \leq 4.\}$.

Nel calcolo del limite, anziché considerare tutti i punti di B_δ^*, possiamo considerare i punti di tale insieme che appartengono ad una generica retta passante per (x_0, y_0): $y = y_0 + m(x - x_0)$, $m \in \mathbb{R}$.
Si dimostra che:

Condizione necessaria affinché esista il limite della funzione di due variabili

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

é che, qualunque sia il coefficiente angolare $m \in \mathbb{R}$ si abbia

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y_0 + m(x - x_0)) = l, \quad \textit{con } l \textit{ indipendente da } m.$$

Nel calcolo del limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y),$$

la condizione necessaria si usa per dimostrare che il limite non esiste facendo vedere che per due curve diverse il valore del limite cambia.
Per esempio si possono considerare i limiti lungo le due rette passanti per $P_0 = (x_0, y_0)$ e parallele agli assi coordinati: $y = y_0$ e $x = x_0$: e se i due limiti sono diversi

$$l_1 = \lim_{x\to x_0} f(x, y_0) \neq \lim_{y\to y_0} f(x_0, y) = l_2,$$

allora non esiste il $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Esercizio

Verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \textit{non esiste}.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \textit{non esiste}.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \textit{non esiste}.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^6} = 0.$$

Condizione sufficiente di esistenza del limite finito

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita in $B^*_\delta(P_0)$, $P_0 = (x_0, y_0)$. Se $\forall \rho \in (0, \delta)$ risulta

$$\lim_{\rho \to 0} f(x_0 + \rho \cos\theta, y_0 + \rho \sin\theta) = l,$$

uniformemente rispetto a $\theta \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$$

Esercizi

1) Rappresentare sul piano il campo di esistenza della funzione:
$f(x,y) = arcsin(xy - y - 2x)$

2) Dimostrare che $f(x,y) = xe^{-\frac{y}{x}}$ non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$

3) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

dire se è continua in (0,0).