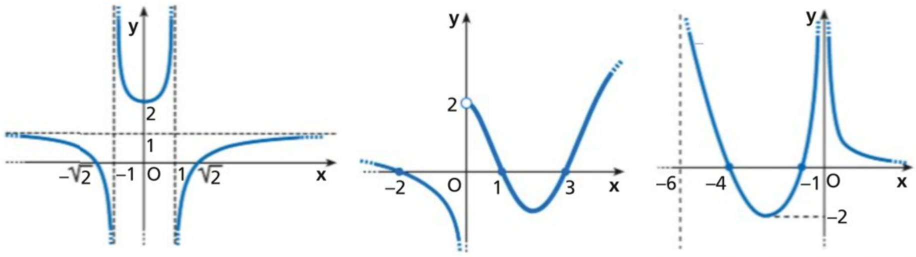
Funzioni continue



Funzioni continue

Def.

Una funzione f(x) è continua in x_0 se:

$$\ell_1 = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2 = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ossia $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta_\varepsilon > 0 :$

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon \qquad \forall x \in I(x_0, \delta_\varepsilon)$$

$(\ell = f(x_0))$

Funzioni continue

Discontinuità

a) ***Discontinuità eliminabile***

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_1 \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_2 \qquad \ell_1 = \ell_2 \neq f(x_0)$$

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

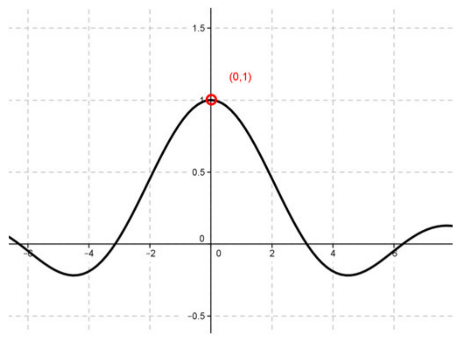
$f(x)$ è stata prolungata per continuità – ridefinita per continuità attraverso $\overline{f}(x)$

Funzioni continue

Esempio di discontinuità eliminabile

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x} \qquad x \neq 0$$

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

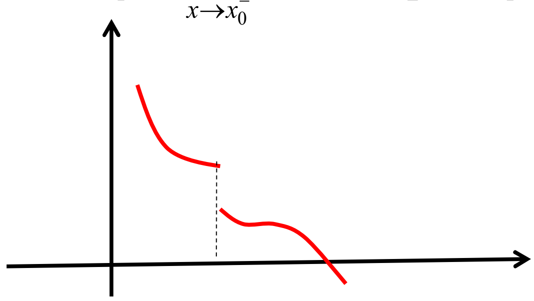


Funzioni continue

Discontinuità

b) ***Discontinuità di prima specie (salto)***

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_1 \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_2 \qquad \ell_1 \neq \ell_2$$

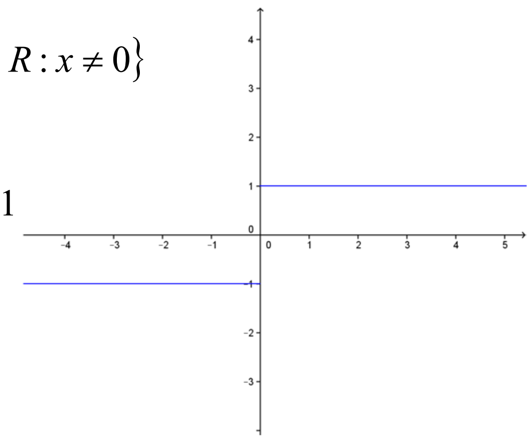


Funzioni continue

Esempio di discontinuità di prima specie

$$y = \frac{|x|}{x} \qquad C.E:\{x \in R : x \neq 0\}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

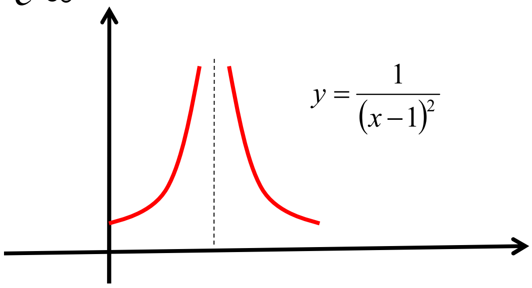


Funzioni continue

Discontinuità

c) ***Discontinuità di seconda specie***

Se uno dei due limiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$
non esiste oppure è ∞



Funzioni continue

Esercizio
Dire se è continua in x=0 la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{2x\ln|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Funzioni continue

Esercizio
Dire per quali valori di k è continua la funzione così definita

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & x>0 \\ x+2k & x\le 0 \end{cases}$$

Funzioni continue

Esercizio
Dire per quali valori di k la funzione f(x) è continua in x=1

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\ln x}{x-1} & x\neq 1 \\ k & x=1 \end{cases}$$

Funzioni continue

Continuità della funzione composta

Siano:

g *definita almeno in un intorno di* $\boldsymbol{x_0}$ *e continua in* $\boldsymbol{x_0}$,

f *definita almeno in un intorno di* $\boldsymbol{y_0 = g(x_0)}$ *e continua in* $\boldsymbol{y_0}$, *allora la funzione* ***f(g(x))*** *è definita almeno in un intorno di* $\boldsymbol{x_0}$ *ed è continua in* $\boldsymbol{x_0}$:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

Funzioni continue

- *Le* ***funzioni elementari*** *sono continue nel loro campo di definizione,*
- ***Somma****,* ***prodotto****,* ***quoziente*** *(con denominatore diverso da zero) di funzioni continue danno funzioni continue,*
- ***La composizione di funzioni continue*** *è una funzione continua*

Il limite si calcola sostituendo x_0 *nell'espressione analitica della funzione.*

Funzioni continue

Esercizio
Calcolare il limite $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x}{x^2 + 3x - 4}$

Funzioni continue

Teorema della permanenza del segno

*Sia **f(x)** definita almeno in un intorno di x_0 e continua in x_0.*
Se $f(x_0) > 0$ *allora* $\exists\delta > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$

Dimostrazione.

Fissato $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \quad \exists\delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}, \ \forall x \in I(x_0, \delta)$

$$-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

Funzioni continue

In particolare

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

Se $\ell = f(x_0) = 0$, *non si hanno informazioni sul segno di* $f(x)$.

NOTA:
Il teorema della permanenza del segno vale anche per funzioni che non sono continue in x_0, *in questo caso anziché* $f(x_0)$ si considera ℓ.

Funzioni continue

Teorema degli zeri

Sia $f(x)$ *continua in* $[a,b]$ $f(a) \cdot f(b) < 0$

allora $\exists x_0 \in (a,b)\colon\ f(x_0) = 0.$

Se f è anche strettamente monotona, lo zero è unico.

Funzioni continue: Teoremi

Teorema dell'esistenza dei valori intermedi
(*conseguenza del teorema degli zeri*)

Una funzione $f(x)$ continua in $[a,b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.

Funzioni continue: Teoremi

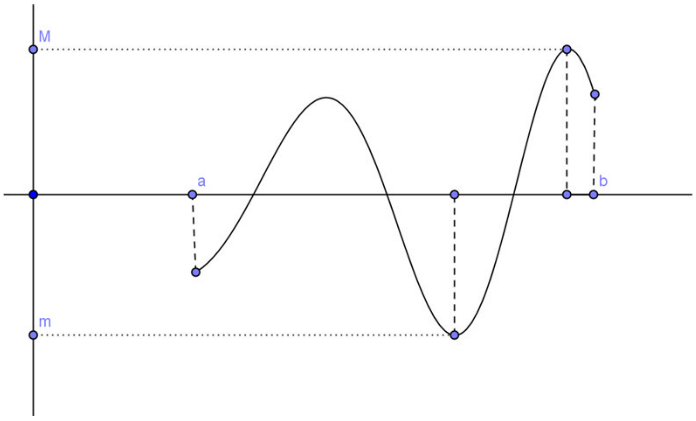
Teorema di Wierstrass (*sul max e min*)

Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e minimo assoluto in [a,b], cioè

$$\exists x_1, x_2 \in [a,b]: \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

$$m = f(x_1) = \text{minimo di } f(x) \text{ in } [a,b]$$
$$M = f(x_2) = \text{massimo di } f(x) \text{ in } [a,b]$$

Funzioni continue: Teoremi



Una funzione f(x) continua in [a,b] assume tutti i valori compresi tra il minimo(m) e il massimo (M)

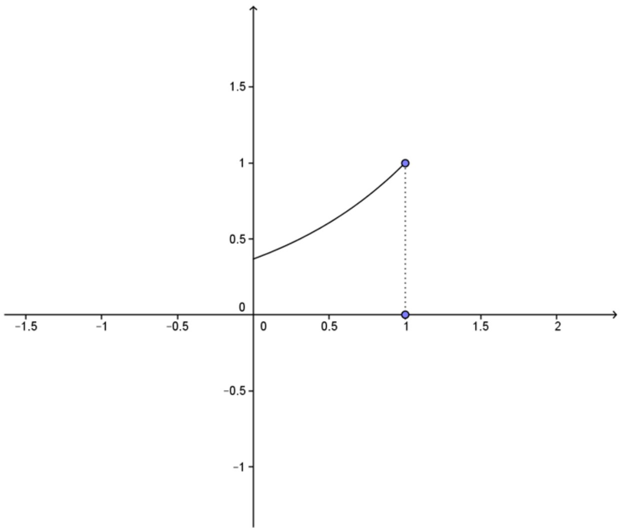
Funzioni continue: Teoremi

Es.

$y = e^{x-1} x \epsilon [0,1]$

$$\max_{[0,1]} e^{x-1} = 1$$

$$\min_{[0,1]} e^{x-1} = \frac{1}{e}$$



Funzioni continue: Teoremi

Es. $y = \dfrac{1}{x}, \; x \in (0,1]$ *Il teorema di Weierstrass non è applicabile: l'intervallo non è chiuso.*

$f(x)$ non è limitata superiormente

Funzioni continue: Teoremi

Es. $y = \dfrac{1}{x}, \; x \in [1,+\infty)$ *Il teorema di Weierstrass non è applicabile: l'intervallo non è limitato.*

$f(x)$ è limitata ma non ammette minimo, $\inf\limits_{[1,+\infty)} \dfrac{1}{x} = 0$

Funzioni continue: Teoremi

Criterio di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in $[a,b]$ *è invertibile in tale intervallo.*

Dimostrazione.

Supponiamo che f(x) sia strettamente crescente in $[a,b]$,

si ha $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$,

$f(a)$=*minimo,* $f(b)$=*max.*

Per il teorema dei valori intermedi:

$$\forall y \in [f(a), f(b)],\ \exists x \in [a,b]:\ f(x) = y$$

e tale x è unico.

Funzioni continue: Teoremi

Infatti se

$$\exists x_1, x_2 :\ x_1 < x_2 :\ \mathrm{y} = f(x_1) = f(x_2)$$

si ottiene un assurdo perché per ipotesi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Quindi $f(x)$ *è iniettiva e perciò invertibile.*

Inoltre la funzione inversa di una funzione continua è continua