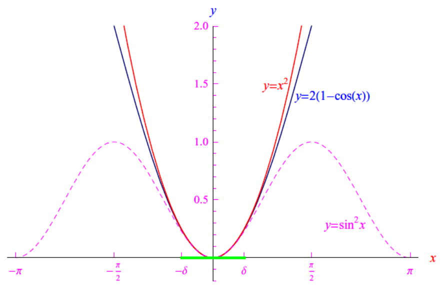
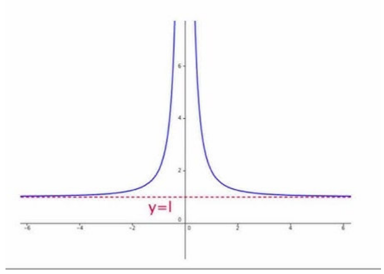
Infinitesimi e Infiniti





Infinitesimi

Def. Una funzione f(x) si dice infinitesima per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$) , x_0 punto di accumulazione per il dominio di f(x), se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \left(oppure \ \lim_{x \to \infty} f(x) = 0\right)$$

Infinitesimi

Esempi.

$y=e^x$ *è un infinitesimo per* $x \to -\infty$

$y=\ln x$ *è un infinitesimo per* $x \to 1$

$y=\sin x$ *è un infinitesimo per* $x \to 0$
$(ma\ anche\ per\ x \to \pi, 2\pi\ \ etc.)$

$y=\ln(1+x)$ *è un infinitesimo per* $x \to 0$

3

Infinitesimi

Def.: ***Ordine di infinitesimo***

Siano $f(x)$ *e* $g(x)$ *infinitesimi per* $x \to x_0$ *(o per* $x \to \infty$*), con* $g(x) \neq 0$*. Se* $\exists\ \alpha \in R+$ *e* $\ell \in R$*,* $\ell \neq 0$ *tale che*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \qquad \left(o \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \right)$$

Allora, si dice che per $x \to x_0$*, (o per* $x \to \infty$*),* $f(x)$ *è un infinitesimo di ordine* α *rispetto all'infinitesimo campione* $g(x)$*.*

4

Infinitesimi

Esempi.

$y = sen(x)$ *è un infinitesimo per* $x \to 0$ *di ordine* 1 *rispetto all'infinitesimo campione* $g(x) = x$

Infatti $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x^{\alpha}} = 1$ *solo se* $\alpha = 1$

$y = tg^2 x$ *è un infinitesimo di ordine 2 rispetto ad x, per* $x \to 0$

$ord(1-cosx)=2$ *rispetto ad x per* $x \to 0$

Infinitesimi

CONFRONTO TRA INFINITESIMI

Siano f(x) e g(x) infinitesime per $x \to x_0$,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \ell \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) < ord(g) \\ 0 & ord(f) > ord(g) \\ non\ esiste, & f\ e\ g\ non\ confrontabili \end{cases}$$

Stesso risultato se f(x) e g(x) sono infinitesime per $x \to \infty$

Infinitesimi

Utilizzando il confronto tra infinitesimi nel calcolo di limiti del tipo

$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$,

dove f_1, f_2, g_1, g_2 *sono funzioni infinitesime per* $x \to x_0$,

si possono trascurare gli infinitesimi di ordine maggiore

(analogo discorso per funzioni infinitesime $x \to \infty$*)*

Es.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x^3 + 2tgx}{(e^x - 1)^2 + sinx} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2tgx}{sinx} = 2$$

Infinitesimi

Def.

Si dice che due funzioni f, g sono asintotiche per $x \to x_0$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$ *per* $x \to x_0$

Es.

$sinx \sim x$ *per* $x \to 0$

$ln(1+x) \sim x$ *per* $x \to 0$

$e^x - 1 \sim x$ *per* $x \to 0$

Infiniti

Def. *Una funzione f(x) si dice* *infinita* *per* $x \to x_0$ *(o per* $x \to \infty$*),* x_0 *punto di accumulazione per il dominio di f(x), (o per* $x \to \infty$*) se:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \qquad \left(oppure \ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \right)$$

Infiniti

Esempi

$y=e^x$ *è un infinito per* $x \to +\infty$

$y=lnx$ *è un infinito per* $x \to 0^+$

$y=x^2 + x$ è $un\ infinito\ x \to \infty$

Infiniti

Regole aritmetiche
Siano $f(x)=o(x^{\alpha})$ *(si legge «o piccolo di»)* *e* $g(x)=o(x^{\beta})$ *due funzioni* *infinitesime* *rispettivamente di ordine* α *e* β *per* $x \to 0$
Allora si ha

$cf(x)= o(x^{\alpha})$, $\quad \forall c \in R$

$$x^{\lambda} f(x) = o(x^{\lambda+\alpha})$$

$$f(x)g(x) = o(x^{\alpha+\beta})$$

$$f(x)+g(x) = o(x^{\gamma}), \qquad \gamma = \min(\alpha,\beta)$$

Infiniti

Def.: ***Ordine di infinito***

Siano $f(x)$ *e* $g(x)$ *infiniti per* $x \to x_0$ *(o per* $x \to \infty$*), con* $g(x) \neq 0$.
Se $\exists\ \alpha \in R+$ *e* $\ell \in R$, $\ell \neq 0$ *tale che*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^{\alpha}} = \ell \qquad \left(o \quad \lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^{\alpha}} = \ell \right)$$

Allora, si dice che per $x \to x_0$, *(o per* $x \to \infty$*),* $f(x)$ *è un infinito di ordine* α *rispetto all'infinito campione* $g(x)$.

Infiniti

Esempi

$ord(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$ *rispetto ad* x *per* $x \to +\infty$

$ord\left(\frac{1}{sinx}\right)=1$ *rispetto a* $\frac{1}{x}$ *per* $x \to 0$

$$ord\left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = 1 \text{ rispetto a } \frac{1}{x} \quad per \quad x \to 0$$

Infiniti

CONFRONTO TRA INFINITI

Siano $f(x)$ *e* $g(x)$ *infiniti per* $x \to x_0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \ell \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) > ord(g) \\ 0 & ord(f) < ord(g) \\ non\ esiste, & f\ e\ g\ non\ confrontabili \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono infinite per* $x \to \infty$

Infiniti

Utilizzando il confronto tra infiniti nel calcolo di limiti del tipo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2},$$

dove f_1, f_2, g_1, g_2 *sono funzioni infinite per* $x \to x_0$,
si possono trascurare gli ***infiniti*** *di ordine minore*
(analogo discorso per funzioni infinite $x \to \infty$*)*

Infiniti

Esercizio.
Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x^3+3\sqrt{x}}{x^2(2x-1)+\sqrt{3x}}$

Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x^3+3\sqrt{x}}{x^2(2x-1)+\sqrt{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}.$$

Infiniti

Gerarchia degli infiniti
Per $x \to +\infty$ si ha

$$(\log_a x)^\alpha << x^\beta << b^x, \quad con\ \ \alpha, \beta > 0, a, b > 1$$

Non sempre è possibile calcolare l'ordine di infinito (o di infinitesimo) rispetto alla funzione campione usuale.

Es $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, \ \ \forall \alpha > 0, \ a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \ \forall \alpha, \beta > 0, \ a > 1$$

Infiniti

Regole aritmetiche
Siano f(x) e g(x) due funzioni infinite di ordine rispettivamente α e β
Allora si ha

$$ord\big(f(x) + g(x)\big) = \max(\alpha, \beta),$$

$$ord\big(f(x)g(x)\big) = \alpha + \beta,$$

$$ord\big((f(x))^\gamma\big) = \alpha\gamma.$$