MA 07 OTT 2025

TEOREMA 1

SE $\bar{F}(x,y,z) = X(x,y)\,\hat{\imath} + Y(x,y)\,\hat{\jmath}$ CON $X(x,y)$ E $Y(x,y)$ DERIVABILI PARZIALMENTE RISPETTO A x E y, ALLORA $\bar{F} \cdot \operatorname{rot} \bar{F} = 0$.

ESEMPI: $\bar{F} = \dfrac{-y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath}}{x^2+y^2}$, $\bar{F} = -y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath}$

DIMOSTRAZIONE: PER LA DEFINIZIONE DI $\operatorname{rot} \bar{F}$ SI HA:

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X(x,y) & Y(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right)\hat{k}$$

QUINDI $\bar{F} \cdot \operatorname{rot} \bar{F} = \left(X(x,y)\,\hat{\imath} + Y(x,y)\,\hat{\jmath}\right) \cdot$
$\left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right)\hat{k} = X(x,y)\cdot 0 + Y(x,y)\cdot 0 +$
$+\, 0 \cdot \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right) = 0$ COME AFFERMATO.

SI PUÒ ANCHE DIMOSTRARE CHE I CAMPI CENTRALI SONO IRROTAZIONALI. SI HA, INFATTI:

TEOREMA 2

SE $\bar{F}(x,y,z) = f(x^2+y^2+z^2)\cdot\underbrace{(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k})}_{\bar{r}}$

CON $f(t)$ DERIVABILE,

ALLORA $\operatorname{rot} \bar{F} = \bar{0}$.

DIMOSTRAZIONE: PER LA DEFINIZIONE DI $\operatorname{rot} \bar{F}$ SI HA:

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(x^2+y^2+z^2)\,x & f(x^2+y^2+z^2)\,y & f(x^2+y^2+z^2)\,z \end{vmatrix}$$

CALCOLIAMO LA PRIMA COMPONENTE. SI HA CHE:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x^2+y^2+z^2)\,z\right) = z\, f'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2y \quad \text{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(f(x^2+y^2+z^2)\,y\right) = y\, f'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2z$$

QUINDI LA PRIMA COMPONENTE DI $\operatorname{rot} \bar{F}$ È NULLA, E ANALOGAMENTE SI TROVA CHE SONO NULLE ANCHE LE ALTRE DUE COMPONENTI, E LA TESI SEGUE.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE I CAMPI CENTRALI AMMETTONO POTENZIALE:

ESERCIZIO. DATA UNA FUNZIONE CONTINUA $f(t)$, CONSIDERIAMO IL CAMPO CENTRALE $\bar{E}(x,y,z) =$

$$= f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\frac{x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

INDICATA CON $F(t)$ UNA QUALUNQUE PRIMITIVA DI $f(t)$, VERIFICARE CHE LA FUNZIONE $U(x,y,z) = F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ SODDISFA $\nabla U(x,y,z) =$
$= \bar{E}(x,y,z)$ PER $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.