10 - 10 - 2025

§ 1. Preliminari.

Funzioni elementari del piano: scriveremo $\mathbb{R}^2$ perché è l'insieme delle COPPIE di numeri REALI.

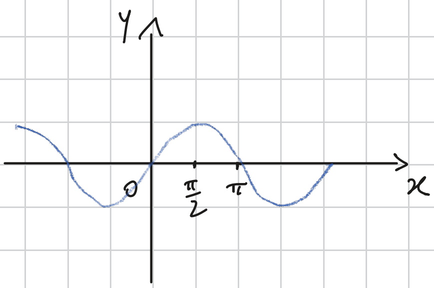
- RETTE (equazioni lineari, ovvero x e y se compaiono hanno solo esponente 1)

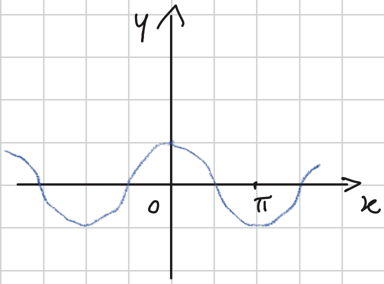
$$y = 3x \quad , \qquad x + 2 = 0 \quad , \qquad ax + by + c = 0$$

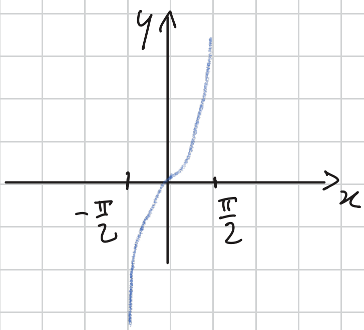
sono tutte rette.

- TRIGONOMETRICHE:

$$y = \operatorname{sen} x \quad , \qquad y = \cos x \quad , \qquad y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \ ;$$

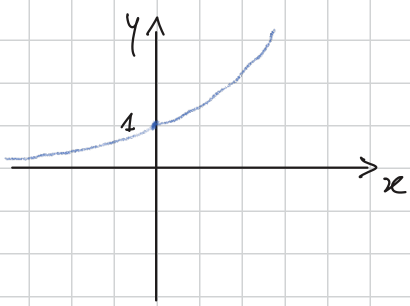


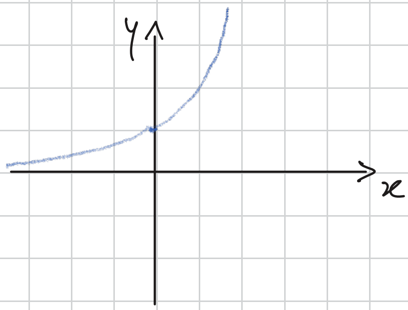


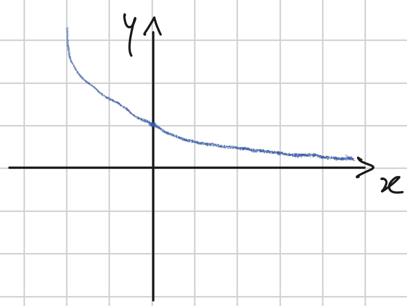


- ESPONENZIALE: $y = a^x$; in base al valore di a...

$$y = e^x \quad , \qquad y = 3^x \quad , \qquad y = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow y = 2^{-x}$$





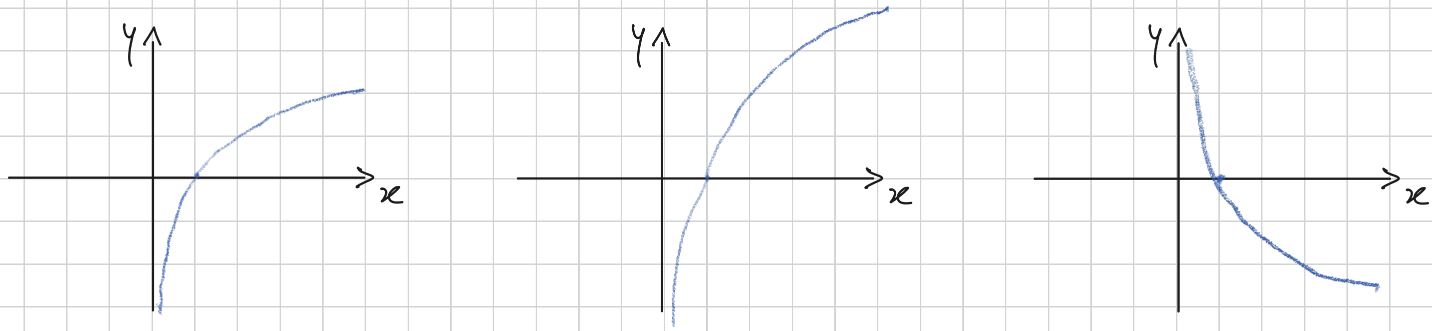


(crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$)

Prenderemo sempre e solo basi positive $(a > 0)$.

- LOGARITMO: $y = \log_a x$, in base al valore di a...

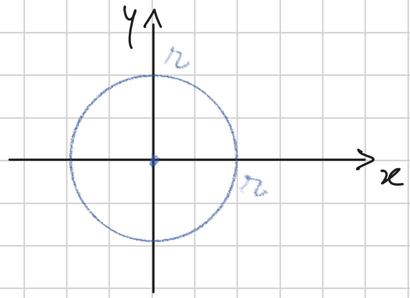
$$y = \ln x = \log_e x \quad , \qquad y = \log x = \log_{10} x \quad , \qquad y = \log_{\frac{1}{2}} x$$



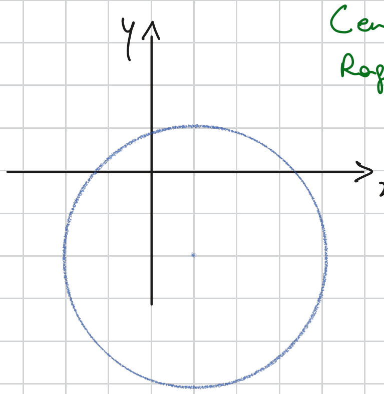
- CIRCONFERENZE (non sono funzioni):

$$x^2+y^2=r^2 \quad , \quad (x-1)^2+(y+2)^2=9$$

(il coefficiente di x^2 e y^2 è lo stesso!)



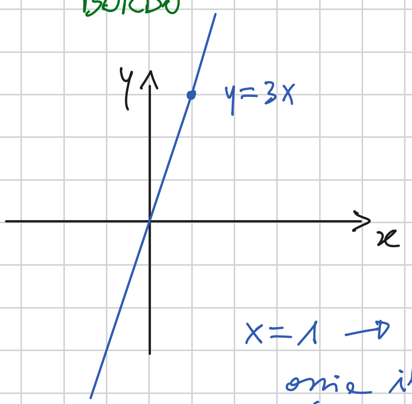
Centro $(1,-2)$
Raggio 3



Domanda: [Equazioni VS Disequazioni]

Che differenza c'è (graficamente) tra

$$\underbrace{y=3x}_{\text{BORDO}} \quad e \quad \underbrace{y<3x}_{\text{REGIONE}} \;?$$



$x=1 \to y=3$
ossia il punto $(1,3)$

$x=1 \to y<3$
ossia i punti $(1,y)$ con $y<3$

In generale, un'equazione individua una curva.
Una disequazione individua una delle due regioni separate dalla equazione "associata".

Nell'esempio sopra, l'altro semipiano è $y>3X$.

Esercizi: Individuare le regioni date da:

1) $2x - y + 3 > 0$; 2) $x^2 + y^2 < 4$;

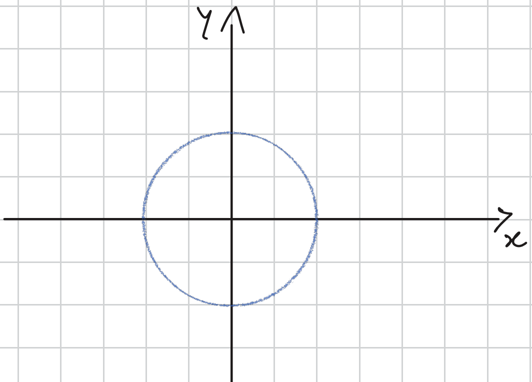
3) $y \geq \ln x$; 4) $e^x - y \leq 0$;

5) $y \leq \sqrt{x}$; 6) $y \leq \sqrt{1 - x^2}$.

Consiglio: iniziare sempre dall'equazione associata per poter disegnare il bordo, solo successivamente ragionare su quale regione é quella corretta.

2) $x^2 + y^2 < 4$ $\longrightarrow$ eq. associata $x^2 + y^2 = 4$

(Crf di centro l'origine e raggio 2)



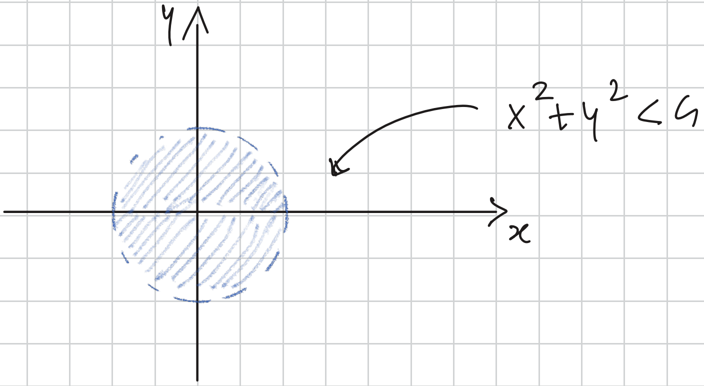
Come faccio a capire quale delle regioni é quella giusta?

Scelgo un punto a caso in una delle due, ad esempio l'origine (punto (0,0)). Sostituisco le sue coordinate nella disequazione:

- se la soddisfano $\longrightarrow$ regione giusta
- se non la soddisfano $\longrightarrow$ regione sbagliata.

Nel nostro caso: $x^2 + y^2 < 4 \longrightarrow 0^2 + 0^2 < 4$ ✓

$\Rightarrow$ l'origine sta nella regione giusta!

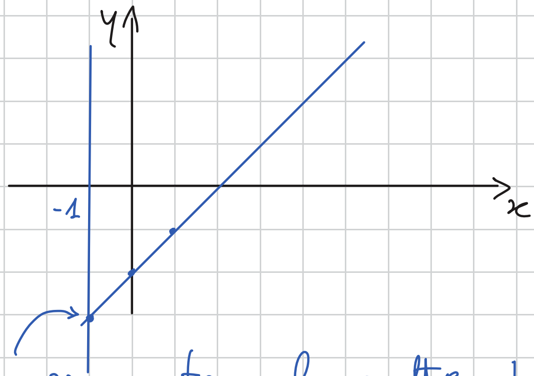


Esempio:

Rappresentare $-1 < x \leq y+2$ $\longrightarrow$ é come risolvere il sistema di due disequazioni: $\begin{cases} -1 < x \\ x \leq y+2 \end{cases}$ ovvero $\begin{cases} x > -1 \\ x \leq y+2 \end{cases}$;

Consideriamo le eq. associate per disegnare i bordi:

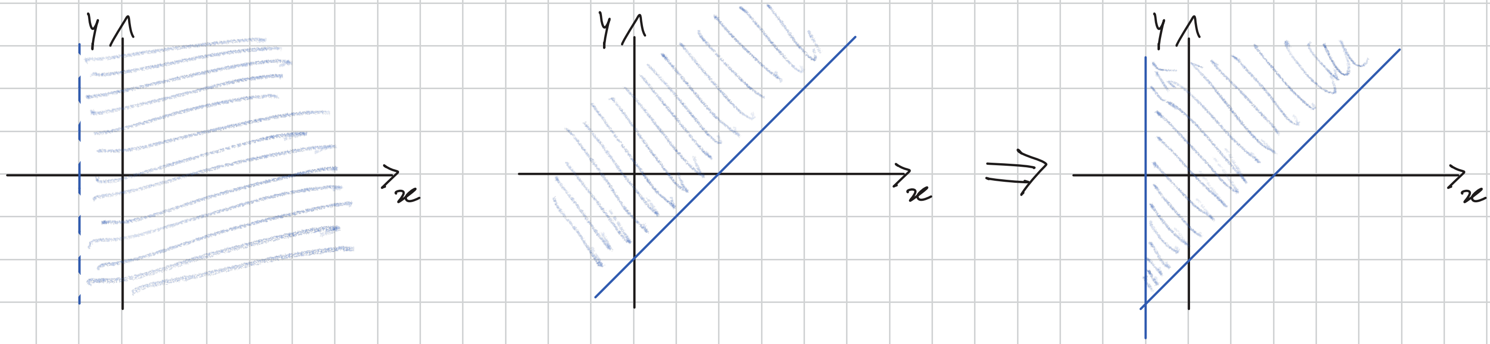
$$\left.\begin{array}{l} x = -1 \\ x = y+2 \end{array}\right. \longrightarrow \text{2 rette}$$



$x = y+2 \longrightarrow$ $x=0,\ y=-2$

$x=1,\ y=-1$

[Esercizio: trovare il punto di intersezione fra le rette]



$x > -1$ $\qquad$ $x \leq y+2$

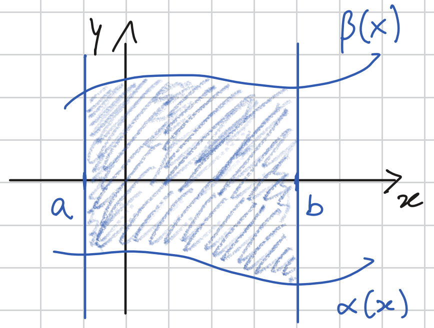
---

§ 2. Domini (normali) e loro rappresentazione.

Domini normali rispetto all'asse x. Sono delle regioni (nel senso di prima) di $\mathbb{R}^2$ limitate da curve lungo tutto il perimetro.

DEF: Consideriamo 2 funzioni di una sola variabile $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$, continue su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e sia $\alpha(x) \leq \beta(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Il DOMINIO NORMALE RISP. ALL'ASSE x é l'insieme

$$A := \{ a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \}$$



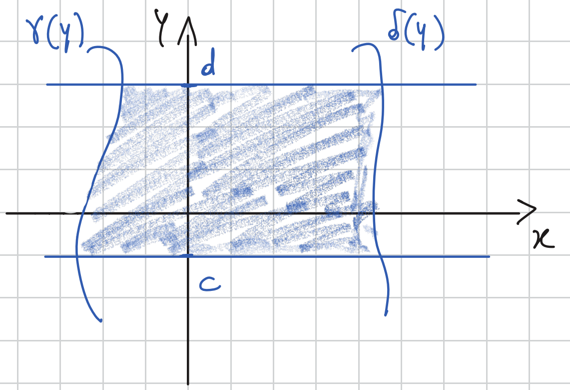
$$a \le x \le b \iff \begin{cases} x \ge a \\ x \le b \end{cases}$$

$$\alpha(x) \le y \le \beta(x) \iff \begin{cases} y \ge \alpha(x) \\ y \le \beta(x) \end{cases}$$

Analogamente si definiscono i domini normali risp. all'asse y.

DEF: Consideriamo 2 funzioni di una variabile $x = \gamma(y)$ e $x = \delta(y)$ continue su un intervallo chiuso e limitato $[c, d]$ e sia $\gamma(y) \le \delta(y)$ per ogni $y \in [c, d]$. Definiamo il DOMINIO NORMALE RISP. ALL'ASSE y come l'insieme

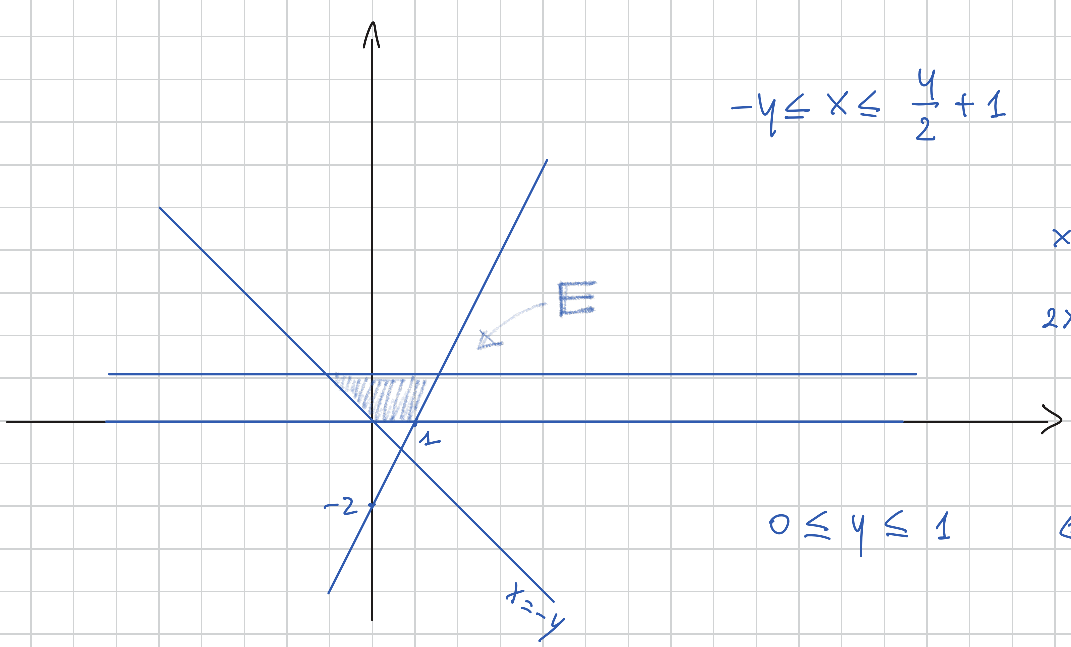
$$B := \{ c \le y \le d \ , \ \gamma(y) \le x \le \delta(y) \}$$



$$c \le y \le d \iff \begin{cases} y \ge c \\ y \le d \end{cases}$$

$$\gamma(y) \le x \le \delta(y) \iff \begin{cases} x \ge \gamma(y) \\ x \le \delta(y) \end{cases}$$

Esempio: $E = \{ -y \le x \le \frac{y}{2} + 1 \ , \ 0 \le y \le 1 \}$ (Norm. risp. asse y)



$$-y \le x \le \frac{y}{2} + 1 \iff \begin{cases} x \ge -y \\ x \le \frac{y}{2} + 1 \end{cases}$$

$x = \frac{y}{2} + 1$ $\qquad$ $x = 0 \rightarrow y = -2$

$2x = y + 2$ $\qquad$ $x = 1 \rightarrow y = 0$

$$0 \le y \le 1 \iff \begin{cases} y \ge 0 \\ y \le 1 \end{cases}$$

Esercizi: disegnare i seguenti domini:

1) $D = \{ 1 \le x \le 2 , \quad 1 \le y \le x^2 \}$

2) $F = \{ -1 \le x \le 1, \quad 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2} \}$

3) $G = \{ x \in [0,1], \quad x^2 \le y \le \sqrt{x} \}$.

---

§ 3. Superfici in $\mathbb{R}^3$.

A livello intuitivo, una superficie é un sottoinsieme dello spazio euclideo esteso in 2 dimensioni, ossia "senza volume". Alcuni esempi sono i piani, i cilindri (vuoti), le sfere (vuote) e le superfici di rotazione. Formalmente:

DEF: Sia D un dominio in $\mathbb{R}^2$. Una SUPERFICIE REGOLARE é una funzione $\Sigma : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

1) Σ é differenziabile (Σ é chiamata PARAMETRIZZAZIONE);

2) denotati con $\Sigma_u = \frac{\partial \Sigma}{\partial u}$ e $\Sigma_v = \frac{\partial \Sigma}{\partial v}$ i vettori tangenti, si ha $\Sigma_u \wedge \Sigma_v \neq 0$ (vettore nullo).

Chiameremo "superficie" sia Σ sia la sua immagine in $\mathbb{R}^3$. Significato della def:

1) $\Rightarrow$ la superficie é "liscia" (no spigoli)

2) $\Rightarrow$ in ogni punto é definito il versore normale

$$N = \frac{\Sigma_u \wedge \Sigma_v}{\| \Sigma_u \wedge \Sigma_v \|}$$

Esistono 2 tipi di superfici che useremo la maggior parte del tempo:

1) superfici CARTESIANE ;

2) superfici DI ROTAZIONE .

1) Superfici cartesiane.

Una sup. cartesiana é il grafico di un'equazione della forma $z = f(x,y)$ dove $f \in C^1$.

Esempi:

- $z = x + 2y - 1$ (PIANO $\rightarrow$ eq. lineare)
- $z = x^2 + y^2 + 2$ (PARABOLOIDE)
- $z = 3x^2 + y - 5$

Rappresentazione di alcune superfici:

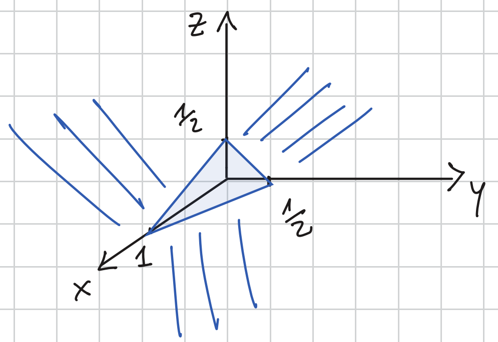
1) $x + 2y + 2z = 1$ (PIANO)

Cerchiamo le intersezioni con gli assi:

con l'asse $x \rightarrow (y=0, z=0)$ $x = 1$ ossia $(1, 0, 0)$

con l'asse $y \rightarrow (x=0, z=0)$ $2y = 1$ ossia $(0, \frac{1}{2}, 0)$

con l'asse $z \rightarrow (x=0, y=0)$ $2z = 1$ ossia $(0, 0, \frac{1}{2})$



(mostriamo il piano con la sua inclinazione. Esso é infinito)

Domanda: [Equazioni VS Disequazioni]

Che differenza c'é tra

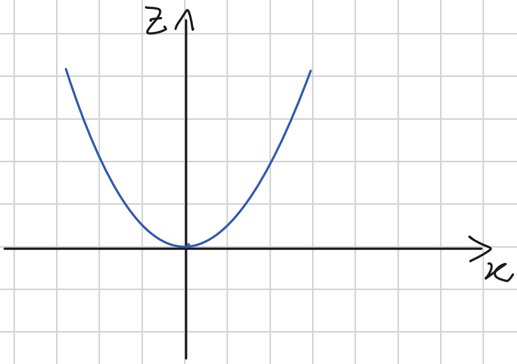
$$\underbrace{x + 2y + 2z = 1}_{\text{BORDO}} \quad e \quad \underbrace{x + 2y + 2z > 1}_{\text{REGIONE}} \quad ?$$

Esercizio:

Disegnare il piano $2x - y + z - 1 = 0$. Successivamente individuare la regione $2x - y + z - 1 \geq 0$.

2) Superfici di Rotazione.

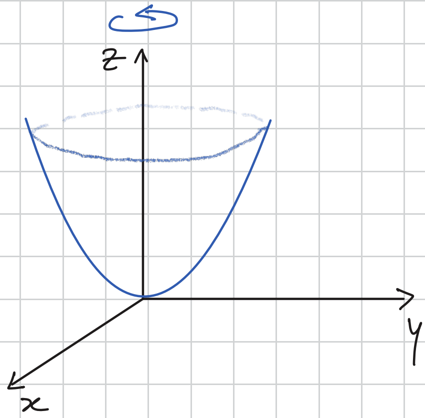
Sono ottenute a partire da una curva nel piano, successivamente ruotata rispetto a un asse.



$z = x^2$

(PARABOLA)

$\Longrightarrow$



$z = x^2 + y^2$

(PARABOLOIDE)

Le principali superfici di rotazione sono:

- PARABOLOIDI
- IPERBOLOIDI
- ELLISSOIDI
- CONI
- SFERE
- CILINDRI

Come si ottiene l'equazione che descrive una superficie di rotazione a partire dalla curva che la genera?

$$z = f(x) \xrightarrow[x \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}]{\text{SOSTITUISCO}} z = f(x,y)$$

Esempio:

$$x^2 + z^2 = r^2 \xrightarrow[x \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}]{} x^2+y^2+z^2 = r^2$$

(crf di raggio r) (sfera di raggio r)

Esercizio: descrivere le seguenti sup. di rotazione:

1) $z = 4 - x^2 - y^2$;
2) $x^2 + y^2 = 2$;
3) $z = \sqrt{x^2+y^2}$;
4) $x^2 + y^2 + z = 2$;