L'aritmetizzazione dell'analisi

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2025-26

I problemi da cui trae origine l'analisi

1. Determinare la tangente ad una curva nota.
2. Trovare la velocità e l'accelerazione di un corpo in movimento.
3. Trovare i massimi e i minimi di una funzione data.
4. Calcolare la lunghezza di una particolare curva, l'area racchiusa da una curva o il volume racchiuso da una superficie.
5. Calcolare particolari somme infinite.

Precursori: Galileo (1564-1642), Cavalieri (1598-1647), Roberval (1602-1675), Fermat (1601-1665), Wallis (1616-1703), Barrow (1630-1677).

Un'auto procede accelerando…

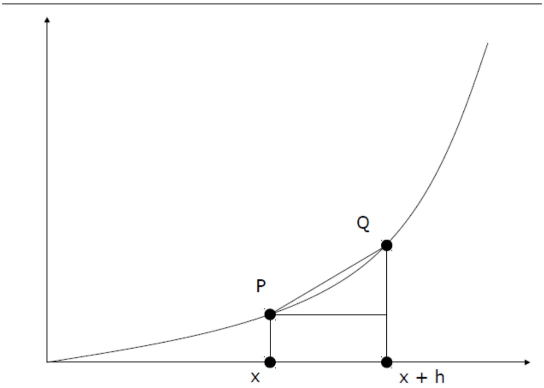
Tempo	Distanza percorsa	Velocità istantanea
1 h	35 km	60 km/h
2 h	120 km	110 km/h
3 h	255 km	160 km/h

Distanza in funzione del tempo: $25t^2 + 10t$

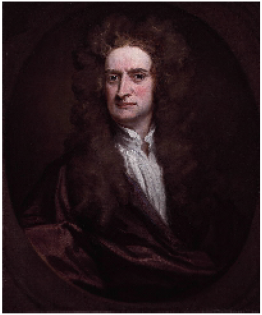
Velocità istantanea: $50t + 10$

Accelerazione istantanea: 50

I problemi da cui trae origine l'analisi



Isaac Newton (1642-1727)



Isaac Newton: il calcolo delle flussioni

- Newton scoprì il calcolo infinitesimale negli anni 1665-1666, ma la sua prima esposizione pubblicata del calcolo infinitesimale apparve dopo i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), ossia nell'*Ottica* (1704).
- Newton studia il problema dell'area racchiusa da una curva; considera incrementi infinitesimi delle variabili e dimostra il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale.
- Le variabili coinvolte nel calcolo sono viste prima come quantità statiche, poi (dal 1671) come quantità dinamiche, variabili nel tempo (dette *fluenti*), corrispondenti al moto nello spazio di oggetti geometrici (punti, linee, piani). I loro tassi di variazione sono detti *flussioni*.
- Newton è consapevole che l'espediente di eliminare i termini contenenti incrementi non è giustificato in maniera soddisfacente (cf. la critica di Berkeley).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Leibniz: il calcolo differenziale

- Leibniz (intorno al 1676) introduce l'operazione di *differenziazione* dx che dà la differenza tra due valori infinitamente vicini delle variabili. Gli infinitesimi entrano nella formulazione delle regole di calcolo.
- Egli applica il nuovo calcolo alla soluzione del "problema inverso delle tangenti". Enuncia il teorema fondamentale del calcolo.
- La sua notazione è superiore a quella di Newton: per la differenziazione e gli integrali, usa le notazioni che adoperiamo ancora oggi.
- 1695: Newton accusa Leibniz di plagio in quanto quest'ultimo avrebbe visto suoi documenti privati circa il calcolo infinitesimale. In realtà, nonostante Newton abbia preceduto Leibniz di circa 10 anni, i risultati furono raggiunti indipendentemente dai due matematici. Inoltre a Leibniz va riconosciuta la priorità di pubblicazione (1684).

L'analisi infinitesimale nel Settecento

- L'analisi infinitesimale del XVII sec. è contraddistinta da un'enorme produzione di risultati, non sempre accompagnata da un altrettanto soddisfacente rigore nelle dimostrazioni né da grande chiarezza nelle definizioni dei concetti fondamentali (gli infinitesimi sono enti matematici legittimi? D'Alembert: "Andate avanti, la fede vi verrà").
- Eulero (1707-1783) e J. D'Alembert (1717-1783) escogitano metodi per la soluzione di numerose equazioni differenziali. Inoltre Eulero inaugura l'analisi complessa, trova le espansioni in serie di molte funzioni e dà importanti contributi alla notazione matematica.
- J.L. Lagrange (1736-1837) e A.M. Legendre ((1752-1833) sviluppano il calcolo differenziale e integrale e ne trovano applicazioni alla fisica e all'astronomia.

L'analisi infinitesimale nel primo Ottocento (1)

- Grazie all'opera di Gauss, di A.L. Cauchy (1789-1857), di B. Bolzano (1781-1848), all'inizio dell'Ottocento l'esigenza di rigore nei fondamenti inizia a farsi strada nell'analisi. Vengono definiti rigorosamente i concetti di *limite* e di *funzione continua*, in modo da evitare il ricorso agli infinitesimi di Leibniz.

Definition

Il numero reale r è il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a p, in simboli

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = r,$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - r| < \epsilon$ ogniqualvolta $|x - p| < \delta$.

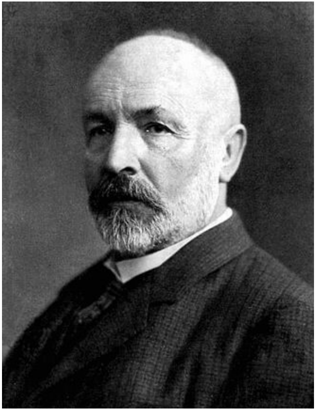
L'analisi infinitesimale nel primo Ottocento (2)

Rimaneva da definire il concetto più fondamentale, quello di *numero reale*.

Fino all'inizio dell'Ottocento, un numero reale r viene concepito geometricamente come rapporto tra due grandezze (commensurabili o incommensurabili, a seconda che r sia razionale o irrazionale). Il fatto che, ad esempio, il numero razionale $\sqrt[3]{2}$ esista (anche se un segmento che abbia tale misura non è costruibile con riga e compasso) viene giustificato in base a considerazioni intuitive sulla continuità geometrica: se lo spigolo di un cubo aumenta con continuità da 1 a 2, il volume del cubo aumenterà con continuità da 1 a 8 e "a un certo punto" dovrà assumere il valore 2.

Nel 1872, i matematici Weierstrass, Cantor e Dedekind propongono contemporaneamente *tre* diverse definizioni rigorose di numero reale.

Georg Cantor (1845-1918)



La definizione di Cantor

Definition

Una *successione di Cauchy* è una successione $A = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ di numeri razionali tale che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero naturale N tale che per tutti gli $m, n > N$ si abbia $|a_m - a_n| < \epsilon$.

Definition

Due successioni di Cauchy $A = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ e $B = (b_1, b_2, b_3, \dots)$ sono *equivalenti* (in simboli, $A \sim B$) sse per ogni $\epsilon > 0$ esiste un N tale che per tutti gli $m > N$ si abbia $|a_m - b_m| < \epsilon$.

La relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathcal{C}$ delle successioni di Cauchy. Inoltre, rispetta le operazioni definite da

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots)$$
$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \cdot (b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots)$$

Un numero reale è la classe di equivalenza modulo $\sim$ di una qualche successione di Cauchy di numeri razionali.

Richard Dedekind (1831-1916)

La definizione di Dedekind

Definition

Una *sezione* dell'insieme totalmente ordinato $(A, <)$ dei numeri razionali è un sottoinsieme non vuoto $X \subset A$ con le seguenti proprietà:

- **S1** Se $a \in X$ e $b < a$, allora $b \in X$ (*chiusura verso il basso*);
- **S2** Non esiste m in X tale che $a \leq m$ per ogni $a \in X$ (*assenza di massimo*).

I numeri reali vengono identificati con le sezioni di $\mathbb{Q}$. Ad esempio:

$$2 = \{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}\,;$$
$$\sqrt{2} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ oppure } x^2 < 2\}\,.$$

Dedekind: l'essenza della continuità

Definition

Un insieme totalmente ordinato $(A, <)$ si dice *continuo* se vengono soddisfatte le seguenti due condizioni.

1. Per ogni $a, b \in A$ tali che $a < b$, esiste un $c \in A$ tale che $a < c < b$ (*densità*);
2. Ogni sezione X di A ha un estremo superiore, ossia un elemento $e \in A$ tale che $e > x$ per ogni $x \in X$ e tale che e è il più piccolo elemento di A con questa proprietà.

Il fatto che l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali sia continuo, e che $\mathbb{Q}$ non lo sia, è un *assioma* che va esplicitamente postulato.

Dedekind e Cantor: continuo geometrico e aritmetico

Il modello di continuità che si afferma con le ricerche di Dedekind e Cantor è aritmetico: i modelli geometrici, intuitivi, della retta e dello spazio non sono più in primo piano. Dedekind afferma:

> *"Ammesso che lo spazio abbia un'esistenza reale, non è per esso necessario essere continuo; molte delle sue proprietà rimarrebbero uguali anche se esso fosse discontinuo. E se noi sapessimo per certo che lo spazio non è continuo, nulla ci impedirebbe di colmare le sue lacune".*

Cantor aggiunge:

> *"L'ipotesi della continuità dello spazio non è null'altro che l'assunzione, in sé arbitraria, della corrispondenza biunivoca e completa fra il continuo tridimensionale puramente aritmetico e lo spazio posto a fondamento del mondo dei fenomeni".*

Dedekind: i numeri naturali (1)

In *Essenza e significato dei numeri* (1888), Dedekind concentra la sua attenzione sui numeri naturali, con l'intento di scoprire i processi che possono generarli e le relazioni che tra essi possono stabilirsi. Ha un atteggiamento "strutturalista".

Definition

Un insieme A è detto una *catena* se esiste una funzione f da A ad A, detta funzione generatrice di A.

Theorem

Dati gli insiemi S e $A \subseteq S$, l'intersezione A_0 di tutte le catene che contengono A è ancora una catena.

Dedekind: i numeri naturali (2)

Theorem

(Teorema di induzione completa). Per dimostrare che tutti gli elementi di una catena A_0 godono della proprietà P, è sufficiente dimostrare che tutti gli elementi di A godono di P e che se $a \in A_0$ gode di P, allora $f(a)$ gode di P.

I numeri naturali sono la catena $\{0\}_0$, dove 0 e f sono tali che f è una funzione iniettiva e $0 \notin f(S)$. Non conta quindi tanto l'"essenza" dei numeri naturali, o il nome che si dà loro, quanto i rapporti strutturali che essi soddisfano. Ogni catena che abbia le proprietà di $\{0\}_0$ è isomorfa ad essa (categoricità dell'aritmetica).

Giuseppe Peano (1858-1932)

Peano: gli assiomi dell'aritmetica

In *Arithmetices principia nova methodo exposita* (1889) Peano fornisce i seguenti assiomi per l'aritmetica, intesa come teoria dei numeri (naturali):

1. 0 è un numero;
2. il successore di un numero è un numero;
3. numeri uguali hanno successori uguali;
4. 0 non è il successore di alcun numero;
5. Se A è una classe tale che 0 appartiene a A e per ogni numero x, se x appartiene ad A allora anche il successore di x appartiene ad A, allora A contiene la classe dei numeri.

Dedekind e Peano: le differenze

- Le condizioni di Dedekind determinano un'intera classe di strutture possibili, gli assiomi di Peano sono vincolati a caratterizzare in modo univoco il sistema dei numeri naturali.
- Dedekind, quindi, si pone il problema di dimostrare la categoricità dell'aritmetica, che per Peano è intuitivamente data e affermata con i suoi assiomi.
- Russell: la classe dei numeri maggiori o uguali a 100 soddisfa gli assiomi di Peano. Basta interpretare il simbolo "0" come "100" e dare agli altri simboli le usuali interpretazioni. Dedekind avrebbe detto che non è un problema, perché la catena $\{100\}_0$ è isomorfa alla catena $\{0\}_0$.