

A.A. 2024-25

Controlli automatici

Trasformata di Laplace

Prof. Alessandro Pisano

`apisano@unica.it`

Definizione

La trasformata di Laplace è un operatore che associa un una funzione $x(t)$ una diversa funzione, chiamata $X(s)$, in cui s è una variabile complessa detta variabile di Laplace.

La trasformata di Laplace e le sue proprietà costituiscono la base metodologica di una procedura che consente, fra le altre cose, di **rappresentare una sistema LTI SISO attraverso un rapporto di polinomi**, denominato «**Funzione di Trasferimento**», che mette a disposizione numerosi e potenti strumenti di analisi e progetto per i sistemi di controllo.

La trasformata (unilatera) di Laplace è definita come segue

$$X(s) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Si dimostra che la Trasformata di Laplace (TdL) di una ampia gamma di segnali (segnali canonici e impulsivi) risulta essere espressa attraverso un **rapporto di polinomi**.

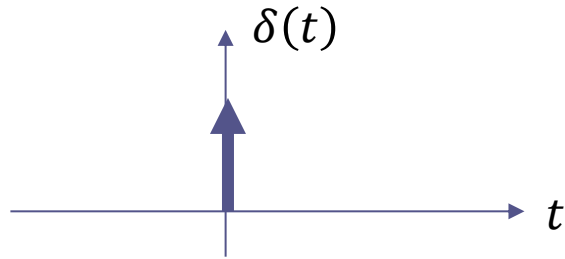
Segnali canonici: $x(t) = A_1 \delta(t) + A_2 \cos(\omega t + \phi) t^\beta e^{\alpha t}$

$$A_1, A_2, \omega, \phi, \alpha \in \mathbb{R} \quad \beta \in \mathbb{N}$$

Una combinazione lineare fra segnali canonici è essa stessa un segnale canonico

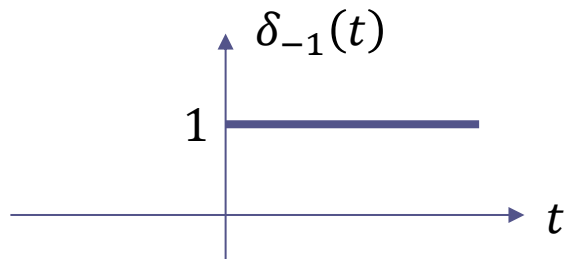
Funzione del tempo	Trasformata di Laplace
$\delta(t)$ (impulso di Dirac)	1
$\delta_{-1}(t)$ (gradino unitario)	$\frac{1}{s}$
$\delta_{-2}(t) = t\delta_{-1}(t)$ (rampa unitaria)	$\frac{1}{s^2}$

TdL

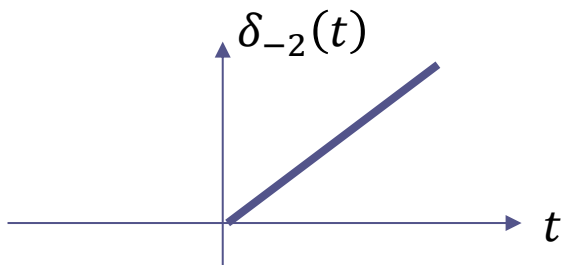
 $\delta(t)$ Impulso di Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

1

 $\delta_{-1}(t)$ Gradino unitario

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

 $\frac{1}{s}$ $\delta_{-2}(t)$ Rampa unitaria

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

 $\frac{1}{s^2}$

Funzione del tempo	Trasformata di Laplace
e^{at} (esponenziale)	$\frac{1}{s - a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$ (esponenziale polinomiale)	$\frac{1}{(s - a)^n}$
$\sin(\omega t)$ (sinusoide)	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$ (cosinusoide)	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t)$	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$ (fattore trinomio)
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$

Proprietà e teoremi

Linearità

$$\mathcal{L}(ax(t) + by(t)) = aX(s) + bY(s)$$

Es. $\mathcal{L}(2\delta_{-1}(t) + 4\sin(2t)) = 2\mathcal{L}(\delta_{-1}(t)) + 4\mathcal{L}(\sin(2t))$

$$= \frac{2}{s} + 4 \frac{2}{s^2 + 4}$$

Teorema di derivazione

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right) = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) &= s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2} \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} - \dots - s \left. \frac{d^{n-2}x(t)}{dt^{n-2}} \right|_{t=0} - \left. \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0} \\ &= s^n X(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} \left. \frac{d^i x(t)}{dt^i} \right|_{t=0} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Proprietà e teoremi

Linearità

$$\mathcal{L}(ax(t) + by(t)) = aX(s) + bY(s)$$

Es.
$$\mathcal{L}(2\delta_{-1}(t) + 4\sin(2t)) = 2\mathcal{L}(\delta_{-1}(t)) + 4\mathcal{L}(\sin(2t))$$

$$= \frac{2}{s} + 4 \frac{2}{s^2 + 4}$$

Teorema di derivazione

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right) = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^nx(t)}{dt^n}\right) = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0} - \dots - s\frac{d^{n-2}x(t)}{dt^{n-2}}\Big|_{t=0} - \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0}$$

$$= s^nX(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} \frac{d^i x(t)}{dt^i} \Big|_{t=0} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Teorema di integrazione

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t x(\tau)d\tau\right) = \frac{X(s)}{s}$$

Teorema del valore finale

Se esiste finito il $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, il valore di tale limite è:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = [sX(s)]_{s=0}$$

Come possiamo stabilire a priori se tale limite (valore di regime) esiste finito o meno ?

Esiste una condizione necessaria e sufficiente, basata sulla collocazione delle radici del polinomio a denominatore della TdL $X(s)$ del segnale

Dato un segnale canonico $x(t)$ la cui TdL è

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{chiameremo **POLI** e **ZERI** della sua TdL rispettivamente le radici del polinomio a denominatore e numeratore}$$

C.N.E.S. per l'esistenza di un valore di regime finito

Un segnale canonico $x(t)$ ammette un **limite finito** per $t \rightarrow \infty$ se e solo se la sua TdL $X(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa eccetto al più un polo **semplice** in $s = 0$

Un altro utile risultato è il seguente

C.N.E.S. per l'esistenza di un valore di regime nullo

Un segnale canonico $x(t)$ **tende a zero** per $t \rightarrow \infty$ se e solo se la sua TdL $X(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa.

Esempio

$$X(s) = \frac{3s + 2}{s(s + 1)}$$

La TdL del segnale in esame ha due poli: $s = 0$ ed $s = -1$

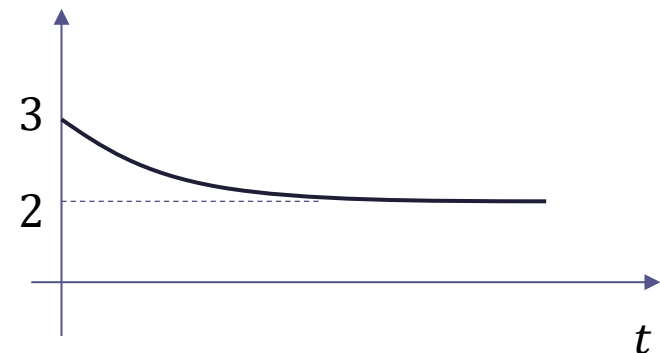
La condizione di applicabilità del teorema del valore finale è soddisfatta, e pertanto si ha che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = [sX(s)]_{s=0} = \left[\frac{3s + 2}{(s + 1)} \right]_{s=0} = 2$$

Si mostra facilmente che il segnale $x(t)$ la cui TdL è $\frac{3s+2}{s(s+1)}$ ha la seguente espressione:

$$x(t) = 2\delta_{-1}(t) + e^{-t}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(2\delta_{-1}(t) + e^{-t}) &= 2 \cdot \mathcal{L}(\delta_{-1}(t)) + \mathcal{L}(e^{-t}) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{3s+2}{s(s+1)} \end{aligned}$$



Esempio

$$X(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

La TdL del segnale in esame ha due poli immaginari puri:
 $s = 3j$ ed $s = -3j$

La condizione di applicabilità del teorema del valore finale **non è soddisfatta**, e pertanto si ha che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq [sX(s)]_{s=0} = \left[\frac{3s}{s^2 + 9} \right]_{s=0} = 0$$

Si verifica facilmente che il segnale $x(t)$ la cui TdL è $\frac{3}{s^2+9}$ è il segnale $x(t) = \sin(3t)$, ed infatti tale segnale non ammette un limite finito per $t \rightarrow \infty$

Antitrasformata di Laplace

La determinazione, a partire da un rapporto di polinomi $X(s)$, della funzione $x(t)$ tale che $\mathcal{L}(x(t)) = X(s)$ si effettua decomponendo $X(s)$ nella somma di termini elementari dei quali, mediante le Tabelle, si possono determinare con facilità le funzioni del tempo ad essi associate

Esempio

$$X(s) = \frac{2}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \quad \text{Decomposizione in fratti semplici}$$

Calcoliamo le costanti A e B imponendo che i membri alla destra ed alla sinistra dell'uguale siano coincidenti

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{(A+B)s+A}{s(s+1)} = \frac{2}{s(s+1)} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A + B = 0 \\ A = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A = 2 \\ B = -2 \end{array}$$

$$X(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s(s+1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} \right\} =$$

TABELLE



$$= 2 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - 2 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = 2 \cdot \delta_{-1}(t) - 2 \cdot e^{-t}$$

Esempio $X(s) = \frac{2s + 1}{s(s + 2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{(s + 2)^2}$ Decomposizione in fratti semplici

Calcoliamo le costanti A, B e C imponendo che i membri alla destra ed alla sinistra dell'uguale siano coincidenti

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} = \frac{A(s+2)^2 + Bs(s+2) + Cs}{s(s+2)^2} = \frac{(A+B)s^2 + (4A+2B+C)s + 4A}{s(s+2)^2}$$

$$A + B = 0$$

$$(4A + 2B + C) = 2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4} \quad B = -\frac{1}{4} \quad C = 2 - 4A - 2B = \frac{3}{2}$$

$$4A = 1$$

$$X(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} + \frac{3}{3} \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s + 1}{s(s + 2)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} + \frac{3}{3} \frac{1}{(s+2)^2} \right\} = \quad \text{TABELLE} \quad \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{1}{4} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + \frac{3}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2} \right\} = \frac{1}{4} \cdot \delta_{-1}(t) - \frac{1}{4} \cdot e^{-2t} + \frac{3}{2} \cdot te^{-2t}$$

Risoluzione di equazioni differenziali del primo ordine mediante TdL

Mostriamo con riferimento ad un esempio come attraverso le proprietà della TdL sia possibile **risolvere equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti attraverso dei calcoli puramente algebrici**

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$u(t) = 2\delta_{-1}(t)$$

$$y(0) = 1$$

Applichiamo l'operatore di TdL a tutti i membri della equazione differenziale, semplificando il primo termine mediante il teorema di derivazione

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\}$$



$$sY(s) - y(0) + Y(s) = U(s)$$



$$(s + 1)Y(s) = y(0) + U(s)$$

$\nearrow 1$
 $\nearrow \frac{2}{s}$

$$(s + 1)Y(s) = y(0) + U(s) = 1 + \frac{2}{s}$$

Ora ricaviamo esplicitamente la $Y(s)$ e poi determiniamo, mediante antitrasformazione, la soluzione $y(t)$ della equazione differenziale.

$$Y(s) = \frac{1}{s + 1} \cdot [y(0) + U(s)] = \frac{1}{s + 1} \cdot \left[1 + \frac{2}{s} \right] = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{s(s + 1)}$$

L'antitrasformata del primo termine alla destra dell'uguale è la funzione esponenziale e^{-t}

L'antitrasformata del secondo termine alla destra dell'uguale è stata calcolata in un esempio precedente, ed è la funzione $2\delta_{-1}(t) - 2e^{-t}$

Si ha quindi, applicando la linearità della TdL:

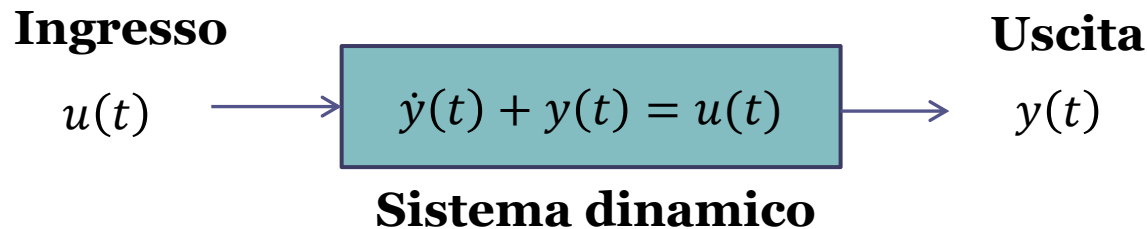
$$y(t) = e^{-t} + 2\delta_{-1}(t) - 2e^{-t} = 2\delta_{-1}(t) - e^{-t} \quad \text{Soluzione della equazione differenziale}$$

Abbiamo visto come attraverso l'impiego delle proprietà della TdL e delle relative tabelle sia stato possibile risolvere l'equazione differenziale oggetto di questo esempio attraverso una **procedura di calcolo interamente algebrica**.

Ora sviluppiamo un ragionamento differente, che anticipa dei risultati che saranno presentati in modo completo e organico da qui a poco. Consideriamo l'equazione differenziale di questo esempio come la descrizione di un sistema dinamico LTI

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad y(0) = y_0 \quad u(t) = 2\delta_{-1}(t)$$

Prescindiamo in questo ragionamento dalla particolare forma ipotizzata per il segnale $u(t)$ nel precedente esempio, e consideriamo un segnale di ingresso $u(t)$ qualunque.



Con riferimento ad una ODE LTI non omogenea come quella che descrive questo sistema dinamico l'analisi matematica ci insegna che la sua soluzione $y(t)$ può essere espressa attraverso la **somma di due termini**, detti «risposta libera» e «risposta forzata»

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$y(0) = y_0$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

La **risposta libera** $y_\ell(t)$ è l'uscita del sistema nell'ipotesi che l'ingresso forzante $u(t)$ sia pari a zero («soluzione dell'omogenea associata»). La risposta libera $y_\ell(t)$ è pertanto soluzione della ODE

$$\dot{y}_\ell + y_\ell(t) = 0$$

$$y_\ell(0) = y_0$$

La **risposta forzata** $y_f(t)$ è l'uscita del sistema nell'ipotesi che le condizioni iniziali siano nulle. La risposta forzata $y_f(t)$ è pertanto soluzione della ODE

$$\dot{y}_f(t) + y_f(t) = u(t)$$

$$y_f(0) = 0$$

Nella espressione della TdL dell'uscita $y(t)$ complessiva, che abbiamo ricavato nel contesto dell'esempio:

$$Y(s) = \frac{y_0}{s+1} + \frac{1}{s+1} U(s)$$

sono chiaramente individuabili due contributi distinti. Il primo rappresenta la TdL della risposta libera, il secondo la TdL della risposta forzata.

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

$$y(0) = y_0$$

$$Y(s) = \frac{y_0}{s+1} + \frac{1}{s+1} U(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s)$$



TdL della risposta libera



TdL della risposta forzata

$$Y_\ell(s) = \frac{y_0}{s+1}$$

$$Y_f(s) = \frac{1}{s+1} U(s)$$

La TdL della risposta **forzata** risulta essere il prodotto fra un certo rapporto di polinomi (in questo caso pari a $\frac{1}{s+1}$) e la TdL $U(s)$ del segnale di ingresso.

Il rapporto di polinomi $F(s) = \frac{1}{s+1}$ viene denominato «**Funzione di trasferimento**» del sistema dinamico LTI

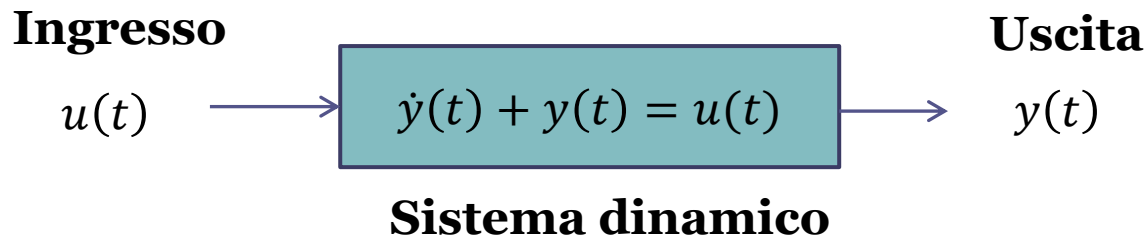
$$Y_f(s) = F(s)U(s)$$

$$F(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}$$

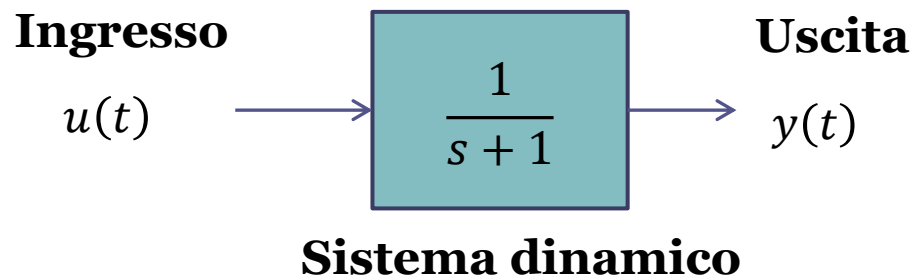
$$F(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Y_f(s) = F(s)U(s)$$

$$F(s) = \frac{1}{s+1}$$

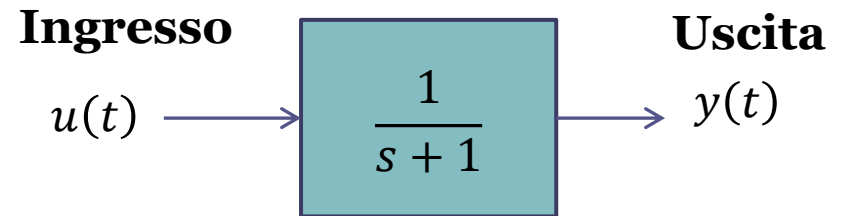


Il sistema dinamico ha «Funzione di Trasferimento» $F(s) = \frac{1}{s+1}$ e da qui in avanti **utilizzeremo la seguente rappresentazione**



La Funzione di trasferimento $F(s)$ di un processo LTI caratterizza completamente, e facilmente, la sua risposta **forzata** a segnali di ingresso aventi forma arbitraria, che nell'ambito dei controlli è ciò che ci interessa. In un sistema di controllo ben progettato, infatti, la risposta libera tenderà sempre a zero.

$$Y_f(s) = F(s)U(s) \quad F(s) = \frac{1}{s+1}$$



La Funzione di trasferimento di un processo LTI è definita come il **rapporto fra la TdL della componente **forzata** della variabile uscita e la TdL del segnale di ingresso**

$$F(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}$$

Esempio Determinare la risposta forzata del sistema dinamico $\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$ per un ingresso a gradino esponenziale $u(t) = e^{-2t}$

$$Y_f(s) = F(s)U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{1}{s(s+1)}$$

TdL della risposta (forzata) all'ingresso esponenziale $u(t) = e^{-2t}$

Altre proprietà

Teorema della traslazione nel tempo

Si consideri un arbitrario segnale $x(t)$ causale avente TdL $X(s)$ ed il segnale «ritardato» $z(t) = x(t - T), T > 0$, ottenuto traslando la curva verso destra di T

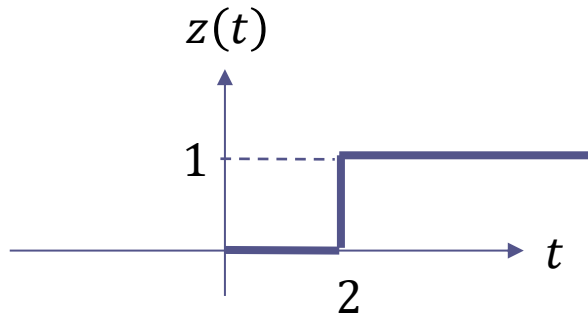


La TdL $Z(s)$ del segnale ritardato può essere facilmente determinata a partire dalla TdL $X(s)$ del segnale originario secondo la formula seguente

$$Z(s) = \mathcal{L}\{z(t)\} = X(s) \cdot e^{-sT}$$

Esempio

Si determini la TdL del segnale $z(t)$ descritto nel seguito



$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

Il segnale $x(t)$ oggetto di questo esempio può essere visto come una versione «ritardata» del gradino unitario, quindi applicando il Teorema della traslazione nel tempo

$$x(t) = \delta_{-1}(t)$$



$$z(t) = \delta_{-1}(t - 2)$$



$$X(s) = \frac{1}{s}$$



$$Z(s) = X(s)e^{-2s} = \frac{1}{s}e^{-2s}$$

Prodotto per una funzione esponenziale

Si consideri un segnale $x(t)$ arbitrario causale avente TdL $X(s)$ ed il segnale $z(t) = e^{at}x(t)$ ottenuto moltiplicando il segnale originario per la funzione esponenziale e^{at}

La TdL $Z(s)$ del segnale $z(t) = e^{at}x(t)$ può essere facilmente determinata a partire dalla TdL del segnale $x(t)$ secondo la formula seguente

$$Z(s) = \mathcal{L}\{z(t)\} = X(s - a)$$

Esempio Si determini la TdL del segnale $z(t) = e^{-2t}\cos(3t)$

La TdL del segnale $x(t) = \cos(3t)$ è (v. Tabella) $X(s) = \frac{s}{s^2+9}$

Applicando il teorema nel caso $a = -2$ si ha:

$$Z(s) = X(s + 2) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9} = \frac{s+2}{s^2+4s+13}$$

Teorema della convoluzione

Si considerino due segnali causali $x(t)$ ed $y(t)$ aventi rispettivamente TdL $X(s)$ ed $Y(s)$, ed il segnale $z(t)$ ottenuto operando la **convoluzione** fra i due segnali $x(t)$ ed $y(t)$:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_0^t x(\tau)y(t - \tau)d\tau = \int_0^t y(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

Si dimostra che

$$Z(s) = X(s) \cdot Y(s)$$