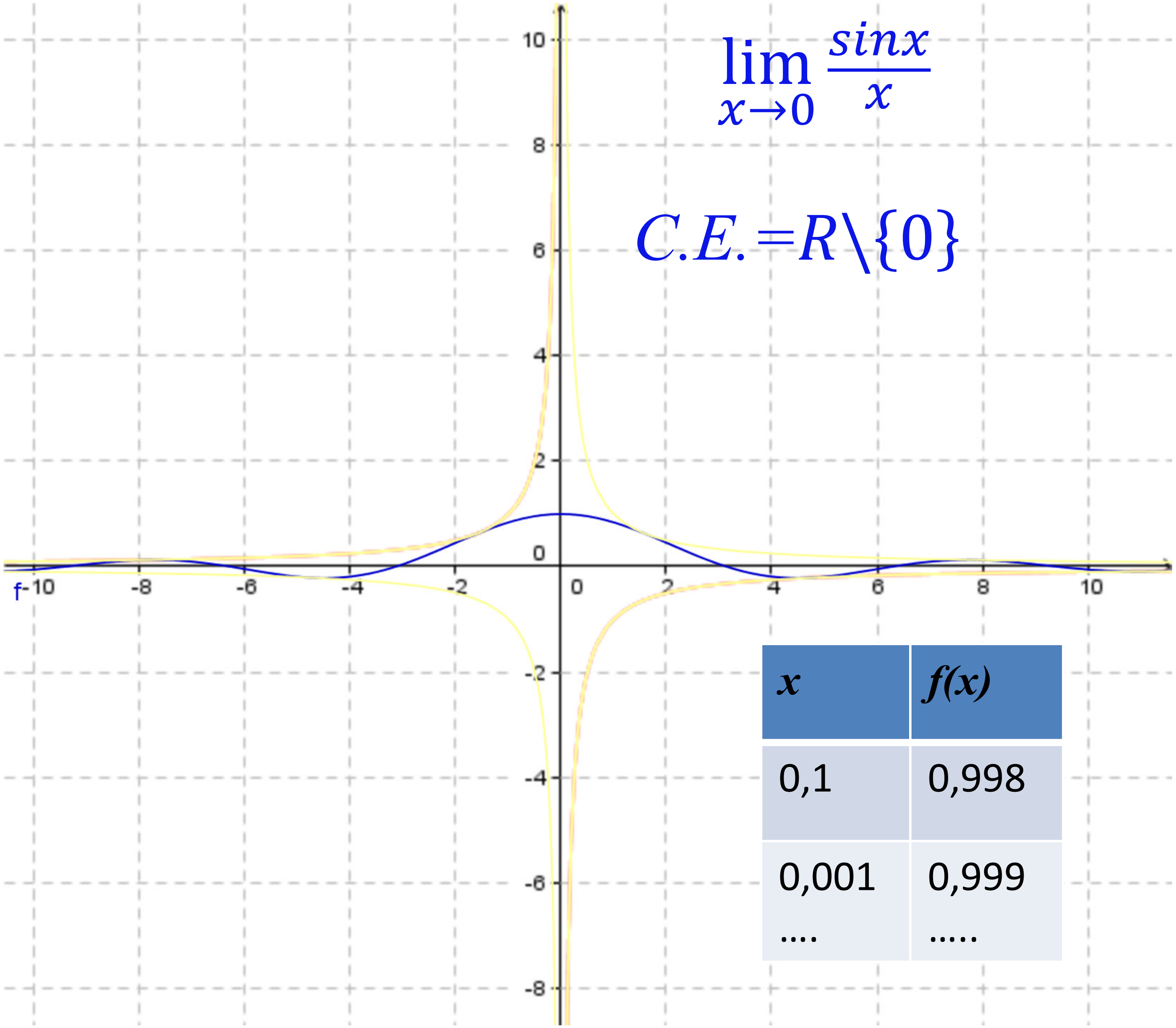
Limiti di funzioni

Limiti di funzioni



$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$C.E. = R \setminus \{0\}$$

x	*f(x)*
0,1	0,998
0,001 ….	0,999 …..

Def.

sia f(x) definita in $A \in R$, *e sia* x_0 *un punto di accumulazione per A. Si dice che f(x) ha limite* ℓ *per x che tende a* x_0, *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ \delta_\varepsilon > 0 : \quad \left| f(x) - \ell \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x \in I(x_0, \delta_\varepsilon) \text{ escluso al più } x_0 \ \text{ cioè } \ | x - x_0 | < \delta_\varepsilon$$

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

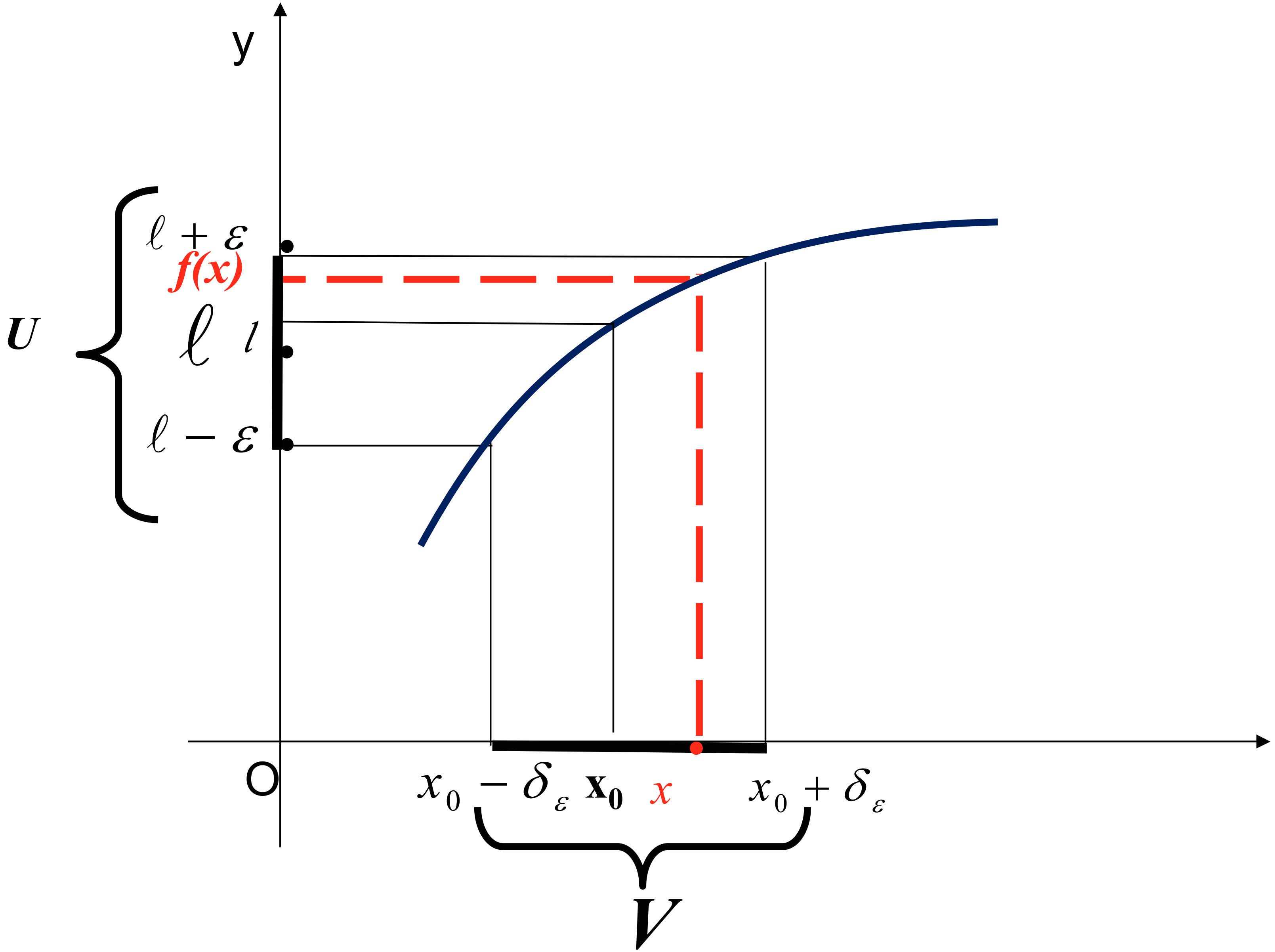
$$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$$

In simboli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$$

Limiti di funzioni



Def.

ℓ_1 *si definisce* ***limite destro*** *di f(x) per x che tende a* x_0^+: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_1$

se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta_\varepsilon > 0 \; : \quad |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$

$\Rightarrow x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ *cioè* $x \in (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$

Def.

ℓ_2 *si definisce* ***limite sinistro*** *di f(x) per x che tende a* x_0^-*:* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2$

se $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta_\varepsilon > 0 \; : \; \left| f(x) - \ell_2 \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \; x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$ *cioè* $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$

Teorema (unicità del limite)

se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \ell$ *è unico*

Dimostrazione. Per assurdo:

supponiamo che $\exists\ \ell_1, \ell_2 : \ell_1 \neq \ell_2$

con $\ell_1 = \lim_{x\to x_0} f(x)$ in $I(x_0, \delta_{1\varepsilon})$,

$\ell_2 = \lim_{x\to x_0} f(x)$ in $I(x_0, \delta_{2\varepsilon})$

Fissato $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$

$$2\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2| = \left|\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2\right| \leq$$

$$\leq \left|f(x) - \ell_1\right| + \left|f(x) - \ell_2\right| < 2\varepsilon$$

in $I(x_0, \delta_\varepsilon)$, $\quad \delta_\varepsilon = \min(\delta_{1\varepsilon}, \delta_{2\varepsilon})$

Assurdo! $\Rightarrow \ell_1 = \ell_2$

Es. $$y = \frac{|x|}{x}$$ $C.E. = R \backslash \{0\}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \nexists \ limite$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Limiti di funzioni

Def.

Sia $f(x)$ *definita in* $A \in R$, *e sia* x_0 *un punto di accumulazione per A.*

Si dice che $f(x)$ *ha limite* $+\infty$ *per x che tende a* x_0, *se* $\forall M > 0, \; \exists \; \delta_M > 0 \; : \; \forall x \in I(x_0, \delta_M)$

$$\Rightarrow \; f(x) > M$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$$

Def.

Sia $f(x)$ *definita in* $A \in R$*, e sia* x_0 *un punto di accumulazione per A.*

Si dice che $f(x)$ *ha limite* $-\infty$ *per x che tende a* x_0*,*

se $\forall M > 0,\ \exists\ \delta_M > 0 : \forall x \in I(x_0, \delta_M)$

risulta $f(x) < -M$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty}$$

Def. Asintoto verticale

Se $$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty}$$

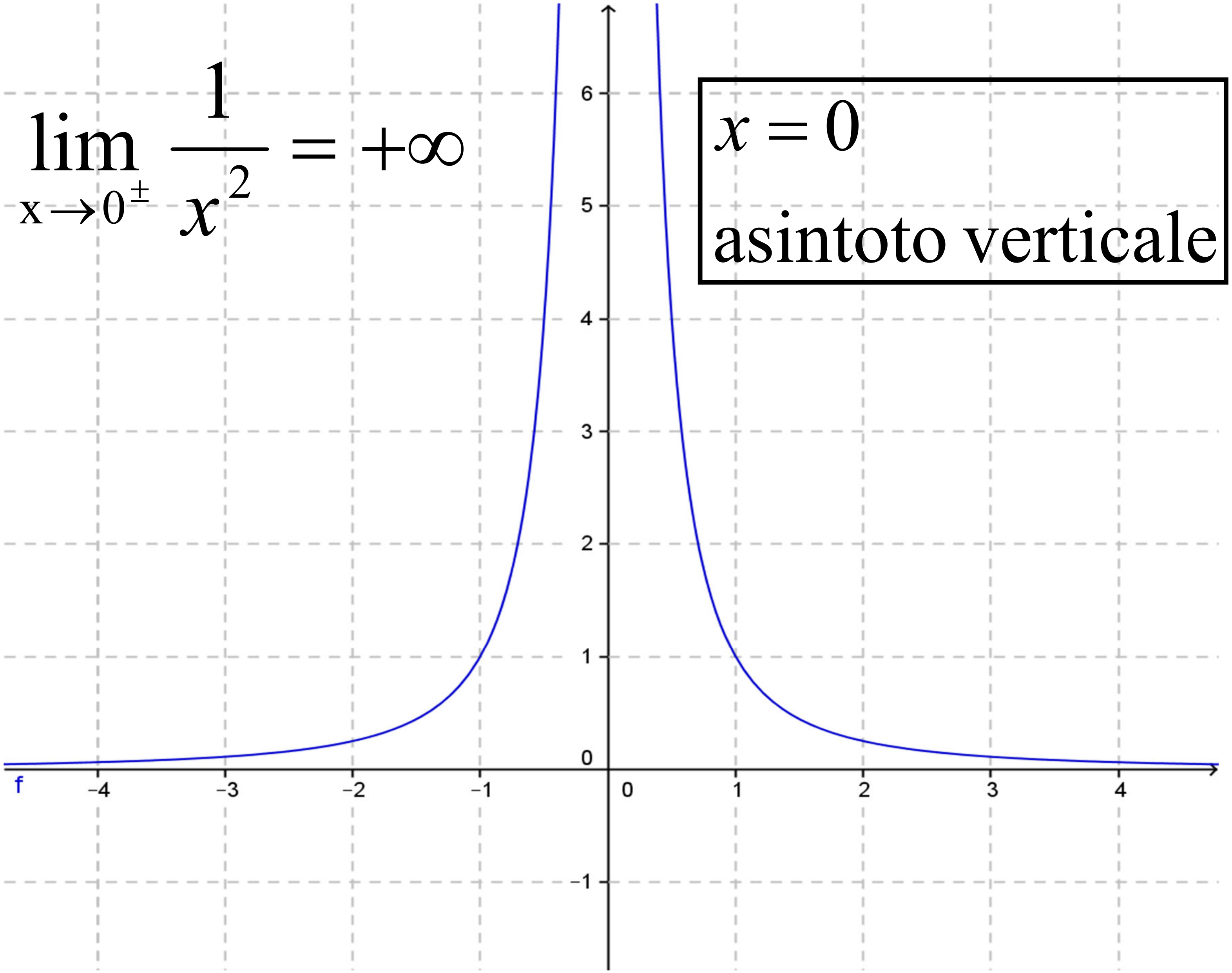
Allora la retta verticale

$$\boxed{x = x_0}$$ *si chiama Asintoto verticale*

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$x = 0$

asintoto verticale



Def.

Sia f(x) definita in $A \in R$, si dice che f(x) ha limite ℓ, per x che tende a $+\infty$, se:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ K_\varepsilon > 0 : \forall x \in I(K_\varepsilon, +\infty)$$

risulta $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell}$$

Def. Asintoto orizzontale

Se $$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell}$$

Allora la retta orizzontale

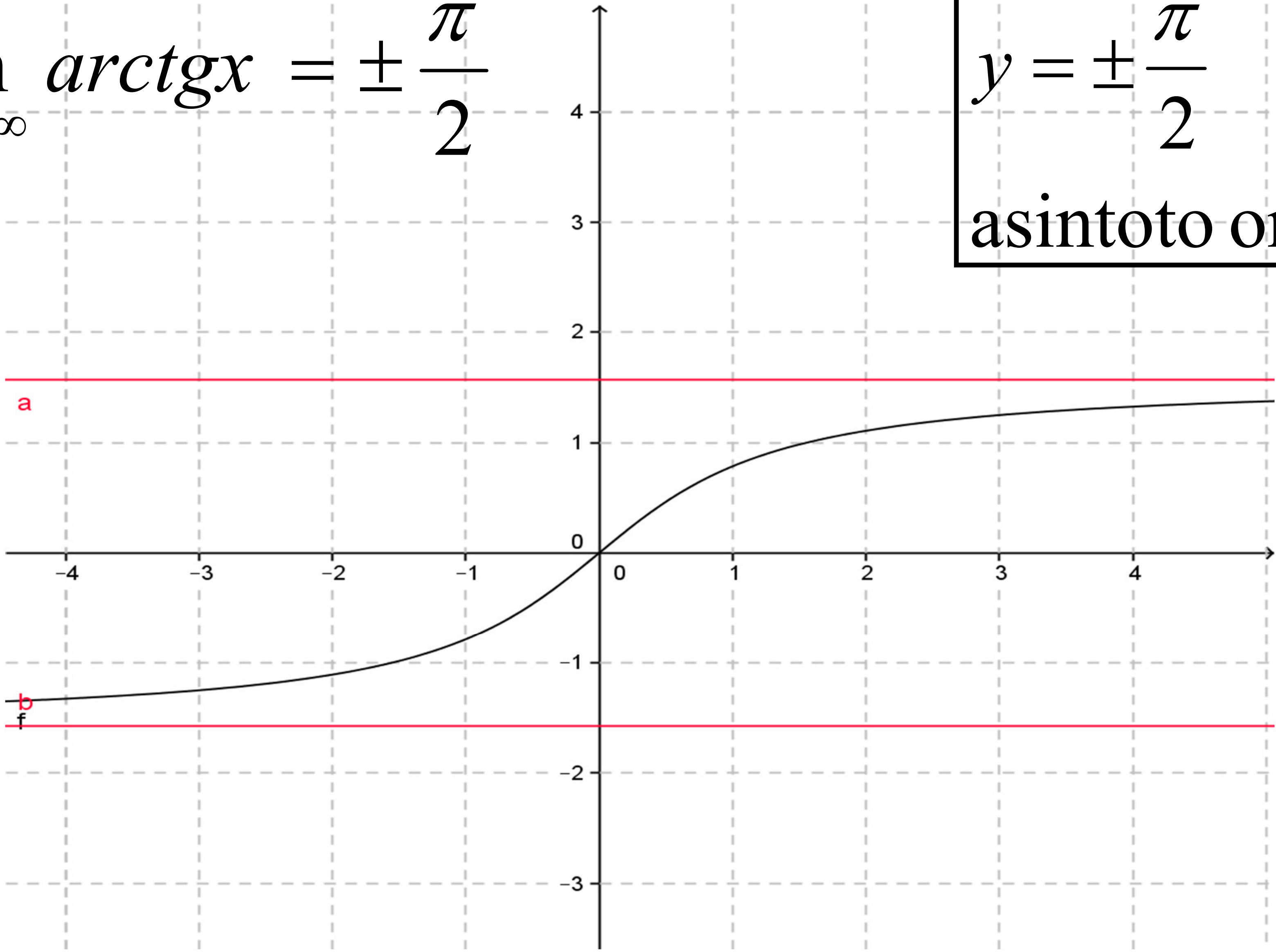
$$\boxed{y = \ell}$$ *si chiama Asintoto orizzontale*

Limiti di funzioni

$$\lim_{x \to \pm\infty} arctgx = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$y = \pm\frac{\pi}{2}$$

asintoto orizz.



Limiti di funzioni

Def.

Sia f(x) definita in $A \in R$,

si dice che f(x) ha limite $+\infty$, per x che tende a $+\infty$ se:

$$\forall M > 0,\ \exists\ K_M > 0 : \forall x \in (K_M, +\infty)$$

risulta $f(x) \in (M, +\infty)$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

***Teorema* (*algebra dei limiti*)**

Se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \ell_1 \pm \ell_2$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}, \qquad g(x), \ell_2 \neq 0$$

Convenzioni con ∞

$$\forall a > 0, \qquad a \pm \infty = \pm\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$\forall a > 0, \qquad a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$\forall b < 0, \qquad b \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$$

$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$$

Convenzioni con ∞

$$\frac{a}{\infty} = 0 \qquad\qquad \frac{a}{0} = \infty$$

Forme Indeterminate

$$\boxed{+\infty - \infty\,, \quad 0 \cdot \infty\,, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty}}$$

Limiti di funzioni

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$a^{-\infty} = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Teorema del confronto

Siano f(x), $f_1(x)$, $f_2(x)$ tre funzioni definite in $A \subseteq R$

sia x_0 *un punto di accumulazione per A e*

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

Se $$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = \ell$$

Allora $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Dimostrazione

Se $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = \ell$ *allora per definizione di limite:*

$$\exists \delta_1 : \left| f_1(x) - \ell \right| < \varepsilon \qquad \forall x \in I(x_0, \delta_1)$$

$$\exists \delta_2 : \left| f_2(x) - \ell \right| < \varepsilon \qquad \forall x \in I(x_0, \delta_2)$$

$$\Rightarrow \ell - \varepsilon < f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) < \ell + \varepsilon$$

$$\forall x \in I(x_0, \delta), \qquad \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

Casi particolari di $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$

Teorema

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$; $|g(x)| \leq M$

per $x \in I(x_0, \delta) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

Dimostrazione.

Per il teorema del confronto

$$\lim_{x \to x_0} | f(x) g(x) | \leq M \lim_{x \to x_0} | f(x) | = 0$$

Es. $$\lim_{x \to 0} x \sin \tfrac{1}{x} = 0$$

Limite di funzione composta

Siano $g : A \to B$ *e* $f : B \to R$:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0 \quad e \quad \lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$$

con $\ell = f(y_0)$ *(se f è continua)*

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell}$$

Limiti Notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$$

Es.

$$\lim_{x \to 0^+} xe^x + e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

$$\lim_{x \to 0^-} xe^x + e^{-\frac{1}{x}} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + arctgx = \frac{\pi}{2}$$

Limiti di funzioni

x=misura dell'arco PA in radianti

PH=sinx

QA=tgx

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\boxed{area\ (A\overset{\Delta}{O}P) < area\ (A\overset{\frown}{O}P) < area\ (A\overset{\Delta}{O}Q)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tgx}{2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1}$$