Geometrie non euclidee

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2025-26

Euclide (III sec. a.C.)

Gli *Elementi* di Euclide: il metodo

In quest'opera, che sistematizza le conoscenze geometriche (e non solo) dell'epoca, Euclide dà un limpido esempio del metodo assiomatico antico.

- Si identificano dei concetti primitivi la cui intelligibilità è garantita dall'*evidenza*.
- Si identificano delle proposizioni primitive (assiomi e postulati) la cui verità è garantita dall'*evidenza*.
- Gli altri concetti geometrici sono definite a partire dai concetti primitivi mediante le *definizioni*, che trasferiscono l'evidenza dai secondi ai primi.
- Le altre verità geometriche sono definite a partire dalle proposizioni primitive mediante le *dimostrazioni*, che trasferiscono l'evidenza dalle seconde alle prime.

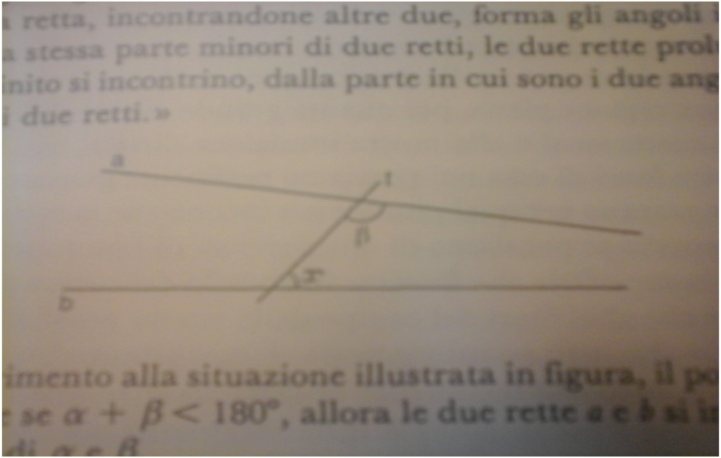
Gli *Elementi* di Euclide: assiomi e postulati

Assiomi (o *nozioni comuni*): proposizioni primitive che si ritengono evidentemente vere in generale, indipendentemente dal dominio di appicazione (es. "Il tutto è maggiore della parte").
Postulati: proposizioni primitive la cui verità è assunta come evidente, ma la cui validità è limitato al campo specifico della scienza che li assume.

Gli *Elementi* di Euclide: i cinque postulati

1. Da ogni punto si può condurre una retta a ogni altro punto;
2. Ogni segmento si può prolungare indefinitamente;
3. Dato un punto e un segmento, si può costruire una circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio;
4. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro;
5. Se due rette tagliate da una trasversale formano, dalla stessa parte, angoli coniugati interni la cui somma è minore di due retti, esse si incontrano da quella parte.

Gli *Elementi* di Euclide: il quinto postulato


retta, incontrandone altre due, forma gli angoli i
stessa parte minori di due retti, le due rette prol
inito si incontrino, dalla parte in cui sono i due ang
i due retti. »

mento alla situazione illustrata in figura, il po
se $\alpha + \beta < 180°$, allora le due rette a e b si in
di α e β

Gli *Elementi* di Euclide: il quinto postulato

- Il quinto postulato è equivalente alla seguente proposizione: Dati una retta e un punto fuori di essa, per quel punto può essere condotta una e una sola parallela alla retta data.
- Euclide non è probabilmente soddisfatto della sua "evidenza", tanto è vero che lo usa una volta sola in tutto il primo libro degli *Elementi* (Prop. 29).
- In una regione piana, grande a piacere ma comunque accessibile all'intuizione diretta, dati una retta e un punto fuori di essa, possiamo far passare per quel punto *infinite* rette che non incontrano la retta data; affermare che tutte quelle rette *meno una* incontrano la retta data è un'impegnativa estrapolazione che ci porta oltre i dati dell'osservazione e dell'intuizione.

Critiche antiche al quinto postulato

Posidonio (I sec. a.C.): cambia la definizione di parallelismo. Due rette sono parallele se sono complanari e equidistanti. *Problema*: va dimostrato che il luogo dei punti equidistanti da una retta e giacenti da una parte di essa è una retta (la dimostrazione richiede il quinto postulato).
Tolomeo (II sec. d.C.): dimostra il quinto postulato a partire dalla proposizione che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti. *Problema*: questa proposizione va assunta come nuovo assioma, e non è più evidente del quinto postulato.
Proclo (V sec. d.C.): dimostra il quinto postulato a partire dalla proposizione che la distanza fra due punti presi su rette intersecantesi può essere resa grande a piacere prolungando sufficientemente le due rette. *Problema*: questa proposizione va assunta come nuovo assioma, e non è più evidente del quinto postulato.

Critiche moderne al quinto postulato

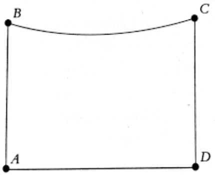
Nel 1560 viene stampata la versione latina dei commentari di Proclo, origine di una fioritura di studi su Euclide e sul quinto postulato: Commandino (1572), Clavio (1574), Cataldi (1603), Borelli (1658), Vitale (1680). John Wallis (1616-1703) dimostra la proposizione euclidea assumendo che data una figura, ne esiste un'altra ad essa simile e di dimensioni arbitrarie. *Problema*: la nozione di forma, cui implicitamente rimanda quella di similarità, è tra le più complesse dell'intera geometria ed abbisognerebbe di una chiarificazione preliminare.

Gerolamo Saccheri (1677-1733)


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu

Saccheri: la strategia

Nel suo *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733), Saccheri non intende sostituire il quinto postulato con una diversa proposizione, ma *dimostrarlo* a partire dagli altri quattro.
A tale scopo, assume come ipotesi la *negazione* del postulato delle parallele, con l'intento di ricavarne una conseguenza incompatibile con gli altri postulati di Euclide.
Il suo punto di partenza è il quadrilatero birettangolo isoscele:



ottenuto innalzando da A e B due lati AD e BC uguali tra loro e perpendicolari alla base, e dimostra che gli angoli γ e δ sono uguali.

Le tre ipotesi di Saccheri

1. *Ipotesi dell'angolo retto*: $\gamma = \delta = 90^\circ$;
2. *Ipotesi dell'angolo ottuso*: $\gamma = \delta > 90^\circ$;
3. *Ipotesi dell'angolo acuto*: $\gamma = \delta < 90^\circ$.

Se vale 1. (risp. 2., 3.), la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale (risp. maggiore, minore) di due retti.
Se le ipotesi 2. e 3. si rivelano intrinsecamente contraddittorie oppure, sotto tali ipotesi, si dimostra il quinto postulato, per *consequentia mirabilis* Saccheri ritiene di poter affermare che tale postulato risulta dimostrato.
Sotto l'ipotesi 2., Saccheri ritiene (in un certo senso, a torto) di aver dimostrato il postulato delle parallele. Sotto l'ipotesi 3., Saccheri perviene, attraverso ragionamenti involuti, a conclusioni che a suo dire "ripugnano alla natura della retta".

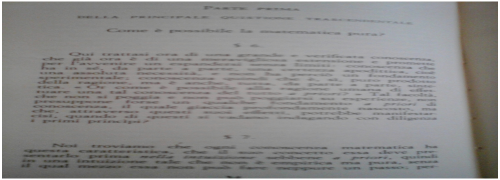
Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

Lambert critico di Saccheri

- Nella sua *Theorie der Parallellinien* (uscita postuma nel 1786), Lambert riesamina il lavoro di Saccheri. Deriva egli stesso una contraddizione dall'ipotesi dell'angolo ottuso, ma non riesce a vedere alcuna pecca nell'ipotesi dell'angolo acuto.
- Osserva che se l'ipotesi dell'angolo acuto fosse vera, esisterebbe una misura assoluta di lunghezza.
- Infatti, in geometria euclidea le misure angolari sono assolute, perché possono essere espresse come frazioni di un qualsiasi cerchio, mentre le misure di lunghezza non possono essere definite indipendentemente da un'unità di misura prefissata.
- Tuttavia, se l'ipotesi dell'angolo acuto fosse vera, tutti i triangoli tra loro simili sarebbero tra loro uguali, e quindi ad ogni angolo si potrebbe associare un unico triangolo equilatero con tale misura angolare — e definire le misure assolute di lunghezza a partire dal lato di tale triangolo.

Immanuel Kant (1724-1804)

La geometria in Kant (1)



Parte prima

DELLA PRINCIPALE QUISTIONE TRASCENDENTALE

Come è possibile la matematica pura?

§ 6.

Qui trattasi ora di una grande e verificata conoscenza, che già ora è di una meravigliosa estensione e promette per l'avvenire un espandersi senza limiti: conoscenza che ha in sé, da parte a parte, una certezza apodittica, cioè una assoluta necessità, e non ha perciò un fondamento sperimentale; conoscenza quindi che è, sì, puro prodotto della ragione, ma è anche, tutta, da parte a parte, sintetica. « Or come è possibile alla ragione umana di effettuare una tal conoscenza del tutto *a priori*? » Tal facoltà, che non si poggia e non può poggiarsi su esperienze, non presuppone forse un qualche fondamento *a priori* di conoscenza, il quale giaccia profondamente nascosto, ma che, attraverso questi suoi effetti, potrebbe manifestarcisi, quando di questi si vadano indagando con diligenza i primi principi?

§ 7.

Noi troviamo che ogni conoscenza matematica ha questa caratteristica, che il suo concetto essa deve presentarlo prima *nella intuizione* sebbene *a priori*, quindi in una intuizione tale che non è empirica ma pura, senza il qual mezzo essa non può fare neppure un passo; per-

La geometria in Kant (2)

ciò i suoi giudizi sono sempre *intuitivi*, laddove la filosofia deve contentarsi di *giudizi discorsivi* tratti da *semplici concetti*, e può forse illustrare con l'intuizione le sue dottrine apodittiche, ma non mai derivarnele. Questa osservazione circa la natura della matematica ci indirizza già ora verso la prima e somma condizione della sua possibilità; cioè deve starle a fondamento *una qualche intuizione pura*, nella quale essa può rappresentare tutti i suoi concetti *in concreto* e nondimeno *a priori*, o, come si dice, *può costruirli*. Se possiamo scoprire questa intuizione pura e la possibilità di essa, si spiega facilmente come siano possibili proposizioni sintetiche *a priori* nella matematica pura, e quindi anche come sia possibile questa stessa scienza; giacché, come la intuizione empirica ci rende, senza difficoltà, possibile di ampliare sinteticamente nella esperienza, per mezzo di nuovi predicati presentatici dalla stessa intuizione, il nostro concetto che ci facciamo di un oggetto della intuizione, così farà anche la intuizione pura, con questa sola differenza: che nell'ultimo caso il giudizio sintetico sarà certo *a priori* ed apodittico, ma nel primo sarà soltanto *a posteriori* ed empiricamente certo; poiché quest'ultima [intuizione] contiene soltanto ciò che si trova nella intuizione empirica contingente, laddove quella contiene ciò che deve trovarsi necessariamente nella intuizione pura, essendo, in quanto intuizione *a priori*, legata indissolubilmente col concetto *prima di ogni esperienza* o singola percezione.

La geometria in Kant (3)

sensi.

§ 10.

Adunque noi possiamo intuir cose *a priori* soltanto per mezzo della forma della intuizione sensitiva, con la quale però conosciamo, sì, anche gli oggetti ma soltanto come essi possono apparire a noi (ai nostri sensi) e non come essi, in sé, siano; tal presupposto è assolutamente necessario, se si vogliono ammettere come possibili delle proposizioni sintetiche *a priori*, o, trovatele reali, si vuol prima comprenderne e determinarne la possibilità.

Ora spazio e tempo sono quelle intuizioni che la matematica pura pone a fondamento di tutte le sue conoscenze e giudizi che si presentano nello stesso tempo come apodittici e necessari; poiché tutti i suoi concetti la matematica deve prima rappresentare, ossia costruire, nella intuizione, e la matematica pura nell'intuizione pura. La matematica (non potendo procedere analiticamente, cioè per scomposizione di concetti, ma solo sinteticamente) non è possibile che proceda di un passo, fintantoché le manca l'intuizione pura, nella quale soltanto può esser data la materia per giudizi sintetici *a priori*. La geometria pone a fondamento la intuizione pura dello spazio. L'aritmetica anche riesce a costruire i suoi concetti di numero mediante una successiva aggiunta delle unità nel tempo, ma specialmente la meccanica pura può formare i suoi concetti di movimento solo per mezzo della rappresentazione di tempo. Ma entrambe le rappresentazioni sono semplicemente intuizioni; poiché, se dalle intuizioni empiriche dei corpi e dei loro cambiamenti (movimento) si sopprime tutto ciò che è empirico, cioè che appartiene alla sensazione, rimangono ancora spazio e tempo, che quindi sono intuizioni pure, le quali

37

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Gauss: l'affrancamento da Euclide

Dal 1792 al 1813 Gauss, sotto l'influsso della filosofia kantiana, cerca di dimostrare il quinto postulato seguendo il metodo di Saccheri (poi ripreso anche da J.H. Lambert). Ha unìintensa corrispondenza con Wolfgang Bolyai (1775-1856), impegnato in analoghe ricerche.
Dal 1813 si convince che una geometria fondata sulla negazione del postulato delle parallele è assolutamente legittima e può riflettere proprietà centrali dello spazio reale. Dimostra numerosi teoremi ma non li pubblica per paura delle "strida dei beoti" (l'imperante teoria kantiana dello spazio avrebbe condannato chiunque avesse messo in dubbio la natura a priori e necessaria della geometria euclidea).
Nel 1831 si decide a pubblicare i propri risultati, ma Bolyai gli comunica che il figlio Janos è nel frattempo pervenuto a una geometria "iperbolica" e Gauss rinuncia al proprio progetto.

A quali "strida" si riferiva?

racconti di fate

geometrie da manicomio

la geometria non euclidea non può procurare agli studenti altro che stanchezza, vuotezza, arroganza e stupidità

elucubrazioni deliranti di un professore universitario elevate al rango di nuove verità sovrumane, per merito della sua megalomania

i geometri non euclidei hanno una comprensione oscura e menti ingannevoli, e l'insegnamento della geometria non euclidea in università e scuole darebbe origine a una razza di studenti che potrebbe compromettere la società

Gauss sulla natura della geometria

Mi convinco sempre di più che la necessità della nostra geometria (euclidea) non possa essere dimostrata, almeno non dalla ragione umana né per la ragione umana. Forse in un'altra vita potremo ottenere intuizioni sulla natura dello spazio che adesso ci sono inaccessibili. Sino ad allora dovremo collocare la geometria non nella stessa categoria dell'aritmetica, che è puramente a priori, ma in quella della meccanica (Lettera ad Olbers, 1817).

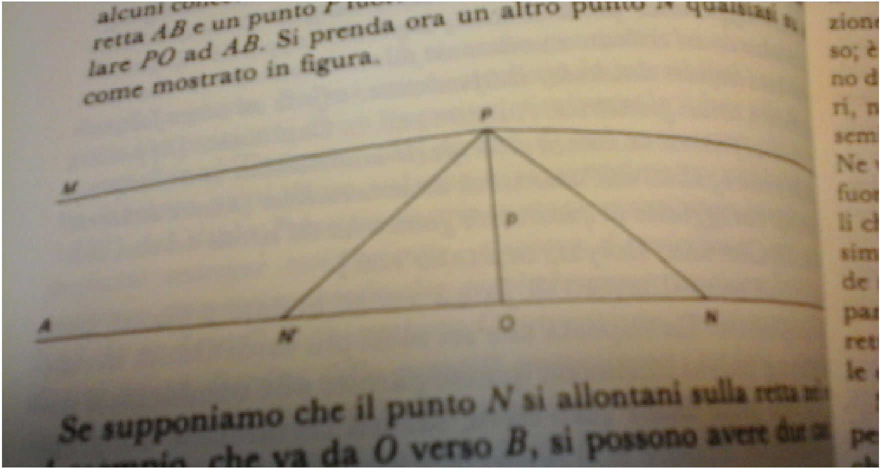
Dobbiamo umilmente ammettere che se il numero è il puro prodotto della nostra mente, lo spazio ha una realtà al di fuori delle nostre menti e non ne possiamo prescrivere le leggi completamente a priori (Lettera a Bessel, 1830).

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856)

Lobačevskij e la geometria iperbolica

Dopo aver redatto, tra il 1823 e il 1826, due memorie che gli vengono rifiutate per la pubblicazione, tra il 1829 e il 1855 Lobačevskij dà alle stampe una serie di opere in cui delinea i fondamenti di una *geometria iperbolica*: data una retta e un punto esterno ad essa, per quel punto passano *due* parallele alla retta data e la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti.

Due parallele a una retta data



retta AB e un punto P fuori ... Si prenda ora un altro punto N qualsiasi

lare PO ad AB. Si prenda ora

come mostrato in figura.

Se supponiamo che il punto N si allontani sulla retta ...

... che va da O verso B, si possono avere due ...

Due parallele a una retta data

- Due rette PL e OB sono parallele se sono complanari, non si incontrano se prolungate indefinitamente e ogni semiretta condotta per P entro l'angolo $\widehat{OPL}$ incontra OB.
- Data una retta AB, per un punto P fuori di essa si possono condurre due rette parallele PL e PM a AB.
- Gli angoli $\widehat{OPL}$ e $\widehat{OPM}$ sono uguali ma non necessariamente retti: la loro misura è l'angolo di parallelismo $\Pi(p)$, che dipende solo dalla distanza $PO = p$.
- $\Pi(p)$ è una funzione continua di p che tende a 0 quando p tende all'infinito, mentre tende a 90° quando p tende a 0.
- La distanza tra due rette parallele tende a 0 (senza mai raggiungerlo) da un lato, mentre tende all'infinito dall'altro; le parallele di Lobačevskij sono insomma "rette asintotiche".

Altre caratteristiche della geometria iperbolica

Nella geometria iperbolica vengono separati i concetti di *parallelismo* e *equidistanza*. Due rette possono:

1. intersecarsi ma non avere una perpendicolare comune (essere cioè divergenti in una direzione e convergenti in un'altra);
2. non intersecarsi ed avere una perpendicolare comune (essere cioè divergenti in entrambe le direzioni);
3. essere parallele e formare una perpendicolare comune all'infinito, dove formano un angolo nullo (essere cioè divergenti in una direzione e asintotiche nell'altra).

Janos Bolyai (1802-1860)

La variante di Bolyai della geometria iperbolica

- Fino al 1820 Janos, figlio di Wolfgang, prova a dimostrare il postulato delle parallele, ma già nel 1823 aveva chiaramente concepito il proprio sistema non euclideo. Scrive al padre:
  "Ho fatto scoperte così meravigliose che ne sono rimasto stupito e che non potrei perdonarmi andassero perdute. [...] Ho creato un universo completamente nuovo dal nulla. Tutto ciò che finora ti ho mandato è null'altro che un castello di carta paragonato a una torre".
- Janos completa il manoscritto nel 1829 e Wolfgang lo inserisce come appendice in una sua opera edita nel 1832.
- Alla richiesta da parte di Wolfgang di un giudizio sul lavoro del figlio, Gauss risponde:
  "Se cominciassi dicendo che non posso lodare quest'opera, saresti certamente sorpreso [...] Eppure non posso fare altrimenti, ché lodarla significherebbe lodare me stesso. Infatti l'intero contenuto dell'opera [...] coincide praticamente con le meditazioni che hanno occupato la mia mente negli ultimi 30 o 35 anni".

Bernhard Riemann (1826-1866)

Riemann: le geometrie sferica ed ellittica

- In *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria* (1854), Riemann distingue tra *illimitatezza* e *infinità* dello spazio. Il primo è un concetto qualitativo, relativo all'estensione, mentre il secondo è un concetto metrico, quantitativo.
- La geometria ellittica si basa su uno spazio illimitato ma finito. Ogni retta è una linea chiusa e finita. Due rette in un piano si incontrano sempre, quindi non possono esserci parallele a una retta da un punto ad essa esterno.
- Tutte le perpendicolari a una retta r da una stessa parte di essa passano per un punto A, e quelle dall'altra parte passano per un punto A'.
- Se A e A' sono distinti, due rette hanno sempre due punti in comune (*geometria sferica*).
- Se A e A' coincidono, due rette si incontrano in un punto (*geometria ellittica*). Il piano ellittico non viene diviso da una sua retta in due regioni distinte.

Riemann: le geometrie sferica ed ellittica

Riemann: le geometrie sferica ed ellittica

> Fra le mostruosità più grandi che questo matematico minore che fu Riemann ha messo al mondo, quella di una linea perfettamente diritta e chiusa in sé è forse la più spassosa. [...]
> Una delle conseguenze peggiori di questa geometria è il pericolo che si corre se si sputa in linea retta davanti a sé: si rischia infatti che lo sputo vi ricada addosso!
>
> Eugen Dühring (1833-1921)

Geometrie non euclidee: il problema della coerenza

- I sistemi non euclidei sono *consistenti*? Ossia, è possibile derivare in essi contraddizioni? E' chiaro che la questione va affrontata in senso puramente *formale*, prescindendo dall'intuizione spaziale.
- Si può cercare una dimostrazione di consistenza *assoluta* oppure *relativa*: dimostrare cioè che se una certa geometria non euclidea G deriva delle contraddizioni, queste possono essere già derivate nella geometria euclidea E.
- Per fare questo, si "traducono" i concetti di G in concetti di E, in modo che le traduzioni di tutti i teoremi di G risultino dimostrabili in E: si ottengono così *modelli euclidei delle geometrie non euclidee*.
- Nel 1866, Eugenio Beltrami fornisce il primo modello euclideo per la geometria iperbolica, usando una superficie detta *pseudosfera*.

Geometria iperbolica: il modello euclideo di Klein

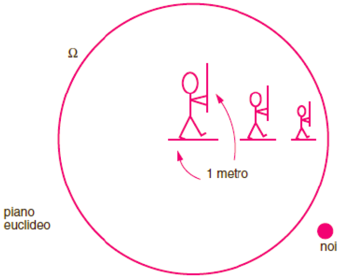
Si fissi una circonferenza C.

punto	$\longrightarrow$	punto interno a C (contorno escluso)
retta	$\longrightarrow$	corda di C (estremi esclusi)
piano	$\longrightarrow$	insieme dei punti e delle rette di cui sopra
parallele	$\longrightarrow$	corde che non si incontrano all'interno di C

Questo modello soddisfa tutti gli assiomi (e quindi i teoremi) della geometria euclidea, tranne il postulato delle parallele: data una retta r e un punto P esterno ad essa, si possono condurre per P due parallele ad r.

Geometria iperbolica: il modello euclideo di Klein

Geometria *iperbolica*: l'omino e il suo mondo di gas



Geometrie non euclidee: implicazioni filosofiche (1)

- Kant: gli assiomi delle geometria euclidea sono conseguenze necessarie di una forma trascendentale, data a priori, della nostra facoltà intuitiva.
- La dimostrazione della consistenza relativa delle geometrie non euclidee spinge le indagini geometriche verso un *approdo ipotetico-deduttivo*: si utilizza il metodo assiomatico senza pronunciarsi sulla verità o evidenza degli assiomi.
- Lobačevskij: la geometria dello spazio fisico è una scienza empirica, a posteriori. La verità delle proposizioni geometriche può essere controllata ad es. mediante osservazioni astromomiche.

Geometrie non euclidee: implicazioni filosofiche (2)

- Gauss concorda: la geometria dello spazio può essere determinata attraverso misurazioni della somma degli angoli interni in triangoli opportunamente grandi. La geometria euclidea ci "sembra" vera perché i triangoli della nostra esperienza sono talmente piccoli da rendere l'ipotesi dell'angolo retto e quella dell'angolo acuto indistinguibili a meno del margine di errore sperimentale. Per Gauss, determinare quale sia la geometria corretta per lo spazio fisico si riduce a conoscere il valore di una costante C che esprime il limite superiore dell'altezza relativa all'angolo retto di un triangolo isoscele rettangolo; la geometria euclidea si ottiene nel caso in cui C è infinita.
- Riemann: l'ipotesi dell'illimitatezza dello spazio ha maggior certezza empirica di ogni altra esperienza esterna. Ma da essa non segue assolutamente la sua *infinità*. Determinare se lo spazio è finito è compito della fisica.