

# Precorso di Matematica

Lezione 3 – Equazioni con valore assoluto, radicali, logaritmi, esponenziali; Disequazioni

Alessandro Fiori Maccioni

- 1 Richiami: dominio e trasformazioni equivalenti/implicative
- 2 Equazioni con **valore assoluto**
- 3 Equazioni con **radicali**
- 4 Equazioni **esponenziali** e **logaritmiche**
- 5 **Disequazioni**: lineari, quadratiche (studio del segno), razionali, con valore assoluto, con radicali, esponenziali/logaritmiche; sistemi
- 6 Esercizi di riepilogo con soluzioni
- 7 Consigli pratici

**Dominio:** prima di risolvere, specifica dove l'espressione è definita (denominatori  $\neq 0$ ; radicandi  $\geq 0$  per indici pari; argomenti di  $\log > 0$ ).

**Trasformazioni equivalenti** (conservano le soluzioni):

- sommare/sottrarre la stessa quantità ai due membri;
- moltiplicare/dividere per  $k \neq 0$ ;
- fattorizzazioni/semplificazioni lecite nel dominio.

**Passi implicativi** (possono introdurre *spurie*): elevare al quadrato; moltiplicare per espressioni che possono valere 0 o avere segno incerto; togliere valori assoluti senza casi.

**Regola d'oro:** *controllare sempre* le soluzioni nell'equazione iniziale.

**Definizione**  $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$       **Distanza:**  $|x - a|$  è la distanza di  $x$  da  $a$ .

**Forme standard (disequazioni, con  $r \geq 0$ ):**

$$|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r, \quad |x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r,$$

$$|x - a| > r \Leftrightarrow x < a - r \vee x > a + r, \quad |x - a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r \vee x \geq a + r.$$

*Per completezza, per  $r \leq 0$ :*

- $|x - a| < r$ : nessuna soluzione;
- $|x - a| \leq r$ :  $x = a$  se  $r = 0$ ; nessuna soluzione se  $r < 0$ ;
- $|x - a| > r$ : sempre vera se  $r < 0$ ; per  $r = 0$  equivale a  $x \neq a$ ;
- $|x - a| \geq r$ : sempre vera se  $r \leq 0$ .

# Equazioni con valore assoluto: strategia ed esempi

**Strategia** per  $|A(x)| = B(x)$ :

- 1 Richiedi  $B(x) \geq 0$  (altrimenti **nessuna soluzione**).
- 2 Casi:  $A(x) = B(x)$  oppure  $A(x) = -B(x)$ .
- 3 Verifica finale nel dominio/condizioni.

## Esempi

$$1) |2x - 3| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 5 \\ 2x - 3 = -5 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \text{ oppure } x = -1.$$

$$2) |x - 2| = x + 1: \text{ condizione } x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1.$$

$$\text{Casi: } x - 2 = x + 1 \text{ (impossibile); } x - 2 = -(x + 1) \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (valida).}$$

## Esercizi

$$(a) |x + 3| = 2x - 1 \quad (b) |2x - 1| = |x + 4|$$

# Equazioni con radicali: indice pari

Consideriamo l'equazione irrazionale con indice pari

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x), \quad n \text{ pari}, \quad f(x), g(x) \text{ polinomi reali.}$$

**Idea chiave:** la radice di indice pari è sempre  $\geq 0$ . Per evitare soluzioni spurie:

- 1 **Isola** la radice a un lato (cioè nella forma scritta sopra).
- 2 **Condizioni preliminari**

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 & (\text{dominio: radicando non negativo}) \\ g(x) \geq 0 & (\text{concordanza dei segni}) \end{cases}$$

- 3 **Eleva alla  $n$ -esima** (passo implicativo!):  $f(x) = [g(x)]^n$ .
- 4 **Risolvi** l'equazione ottenuta e **verifica** nell'originale: accetta solo le soluzioni che soddisfano anche le due condizioni sopra (scarta le *spurie*).

## Schema risolutivo (indice pari)

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{(condizione di esistenza)} \\ g(x) \geq 0 & \text{(concordanza dei segni)} \\ f(x) = [g(x)]^n & \text{(elevamento a potenza)} \end{cases}$$

*Operativamente:* risolvi  $f(x) = [g(x)]^n$  e **verifica** le soluzioni affinché risulti  $f(x) \geq 0$ ,  $g(x) \geq 0$ .

*Nota:* se  $g(x) < 0$  su un intervallo, lì l'equazione è **impossibile** perché  $n$  pari  $\Rightarrow \sqrt[n]{f(x)} \geq 0$ .

## Equazioni con radicali: indice dispari

Risolvere un'equazione irrazionale con indice **dispari** è semplice e immediato.  
Se la radice è **isolata** a un membro, è sufficiente elevare a potenza per eliminarla:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \iff f(x) = [g(x)]^n, \quad n \text{ dispari.}$$

Dato che l'indice  $n$  è **dispari**:

- nessuna restrizione sul radicando (può anche essere  $< 0$ );
- nessuna "concordanza dei segni" con  $g(x)$  è necessaria;
- l'elevamento alla  $n$ -esima è una trasformazione *equivalente* (non genera spurie).

### Esempio

**Risolvere:**  $\sqrt[3]{8x - 1} = 3.$

Elevando alla terza:  $8x - 1 = 27 \Rightarrow 8x = 28 \Rightarrow x = \frac{7}{2}.$

**Verifica:**  $\sqrt[3]{8 \cdot \frac{7}{2} - 1} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad (\checkmark).$

*Nota bene:* è comunque buona pratica **verificare sempre** le soluzioni nell'equazione iniziale.

# Equazioni con radicali: procedura e insidie

Ricapitoliamo la **procedura**:

- 1 **Dominio**: radicandi  $\geq 0$  per indici pari; quando isoli  $\sqrt{\cdot}$  a un lato in un'*uguaglianza*, richiedi anche l'**altro membro**  $\geq 0$  prima di elevare al quadrato.
- 2 Isola la radice; **eleva al quadrato** (passo implicativo!).
- 3 Risolvi e **controlla** nell'equazione di partenza (scarta spurie).

## Esempio

$\sqrt{2x+3} = x+1$ . Dominio:  $x \geq -\frac{3}{2}$  e  $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow x \geq -1$ .

Quadrato:  $2x+3 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ .

Check:  $x = \sqrt{2}$  ok;  $x = -\sqrt{2} \approx -1,41$  non  $\geq -1 \Rightarrow$  *spuria*.

Soluzione:  $\{\sqrt{2}\}$ .

## Esercizi

(a)  $\sqrt{x+4} = x$       (b)  $\sqrt{3x-1} = \sqrt{x+5}$

# Esponenziali: principi rapidi ed esempi

**Esponenziale**  $a^{f(x)} = b$  con  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0 \Rightarrow f(x) = \log_a b$ .

**Monotonia:** se  $a > 1$  la funzione  $a^x$  è crescente; se  $0 < a < 1$  è decrescente (utile per disequazioni).

## Esempi

1)  $5^{2x} = 125 = 5^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ .

2)  $2^{x+1} = 5 \cdot 10^{x-1} \Rightarrow 5^x = 4 \Rightarrow x = \log_5 4 = \frac{\ln 4}{\ln 5}$ .

## Esercizi

(a)  $4^{x-1} = 8$       (b)  $3^{2x-1} = 7$

# Logaritmi: condizioni, proprietà ed esempi

**Condizioni**  $\log_a(\cdot)$  definito per  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  e **argomento**  $> 0$ .

**Proprietà utili** (stessa base  $a$ ):

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a(x^k) = k \log_a x.$$

## Esempi

1)  $\log_3(x - 2) = 1 \Rightarrow x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5$  (dominio:  $x > 2$ ).

2)  $\log_3(x - 2) + \log_3(x + 1) = 2 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 9 \Rightarrow$

$$x^2 - x - 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}; \text{ dominio } x > 2 \Rightarrow \text{ accetto } \frac{1 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

## Esercizi

(a)  $\log_2(3x - 1) = 4$       (b)  $\log_5(x^2 - 1) = 1$

Per chiarezza espositiva, in questa lezione presenteremo le regole e gli esempi usando sempre il caso della **disequazione con simbolo  $>$** :

$$A(x) > B(x).$$

**Osservazione importante:** Tutti i concetti, i metodi e le trasformazioni visti per  $>$  restano validi, con le dovute modifiche, anche per gli altri casi:

$$<, \leq, \geq.$$

**Esempio:** se vale  $A(x) > B(x)$ , per analogia si può trattare anche  $A(x) \geq B(x)$  seguendo gli stessi passaggi e includendo gli zeri.

## Notazione insiemistica

- Soluzioni  $\subseteq \mathbb{R}$  (o altro insieme numerico) e si esprimono con intervalli/insiemi.
- Intervalli:  $(a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ; unioni  $\cup$ , intersezioni  $\cap$ .

## Trasformazioni su una disequazione $A(x) > B(x)$ :

- Somma/sottrazione dello stesso termine: *conserva* il verso.
- Moltiplicazione/divisione per  $k > 0$ : *conserva* il verso; per  $k < 0$ : *inverte* il verso.
- Elevare al quadrato: *non* è in generale lecito (serve controllo di segno/monotonia).
- Funzioni monotone: se  $f$  è crescente,  $A > B \Leftrightarrow f(A) > f(B)$ ; se decrescente, si *inverte* il verso.

Gli stessi principi valgono anche per  $<$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ , con le dovute modifiche.

# Disequazioni lineari (metodo del segno)

**Caso rappresentativo**  $ax + b > 0$  con  $a \neq 0$ .

## Procedura rapida

- 1 Risolvi  $ax + b = 0 \Rightarrow$  soglia  $x_0 = -\frac{b}{a}$ .
- 2 **Segno di  $a$ :** per  $x > x_0$ ,  $ax + b$  ha lo stesso segno di  $a$ ; per  $x < x_0$ , ha il segno di  $-a$ ; per  $x = x_0$  vale  $ax + b = 0$ .
- 3 Applica  $> 0$ :

$$ax + b > 0 \iff \begin{cases} x > -b/a & \text{se } a > 0, \\ x < -b/a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

**Caso particolare**  $a = 0$ : diventa  $b > 0$  (vera per ogni  $x$  se  $b > 0$ , falsa altrimenti).

*Come si generalizza agli altri versi?*

- $ax + b \geq 0$ : come sopra ma **includi**  $x_0$ .
- $ax + b < 0$ : prendi il **complementare** degli intervalli di positività (stesse soglie).
- $ax + b \leq 0$ : come  $< 0$  ma **includendo**  $x_0$ .

# Disequazioni lineari: esempi

*Promemoria:* quando si divide/moltiplica per un numero **negativo** si **inverte** il verso.

## Caso $>$

1)  $3x - 5 > 7 \Rightarrow 3x > 12 \Rightarrow x > 4.$

2)  $-2x + 1 > 5 \Rightarrow -2x > 4 \Rightarrow x < -2$

(divisione per  $-2$ ).

## Caso $<$

1)  $5x + 2 < 12 \Rightarrow 5x < 10 \Rightarrow x < 2.$

2)  $-3x + 4 < 1 \Rightarrow -3x < -3 \Rightarrow x > 1$

(divisione per  $-3$ ).

## Caso $\geq$

1)  $2x - 3 \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 4 \Rightarrow x \geq 2.$

2)  $-4x + 2 \geq -10 \Rightarrow -4x \geq -12 \Rightarrow x \leq 3$

(divisione per  $-4$ ).

## Caso $\leq$

1)  $x - 7 \leq -2 \Rightarrow x \leq 5.$

2)  $-2x - 3 \leq 1 \Rightarrow -2x \leq 4 \Rightarrow x \geq -2$

(divisione per  $-2$ ).

# Disequazioni quadratiche (metodo del segno)

**Caso rappresentativo**  $q(x) = ax^2 + bx + c > 0$  con  $a \neq 0$ .

## Procedura

- 1 Trova gli zeri (se esistono) fattorizzando o con il discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ .
- 2 Costruisci la **tabella dei segni** nei tratti individuati dagli zeri:
  - se  $\Delta > 0$  (zeri semplici  $r_1 < r_2$ ) il segno *alterna*; fuori dagli zeri vale il segno di  $a$ ;
  - se  $\Delta = 0$  (zero doppio  $r_{1,2}$ ) il segno *non* cambia in  $r$ ;
  - se  $\Delta < 0$  il segno è *costante* ed è uguale al segno di  $a$  su  $\mathbb{R}$ .
- 3 Seleziona gli intervalli dove  $q(x) > 0$  (positività).

*Come si generalizza agli altri versi?*

- $q(x) \geq 0$ : aggiungi gli zeri agli intervalli di positività.
- $q(x) < 0$ : prendi il complementare (rispetto a  $\mathbb{R}$ ) della positività, escludendo gli zeri.
- $q(x) \leq 0$ : come  $< 0$  ma includendo gli zeri.

*Suggerimento grafico:* marca  $r_1, r_2$  sulla retta reale e usa la concavità (segno di  $a$ ) per determinare i segni nei vari intervalli.

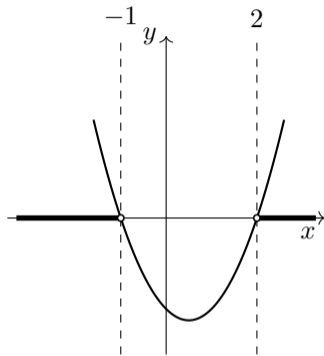
# Disequazioni quadratiche: riepilogo casi per $q(x) > 0$

$\Delta$	$a$	Zeri	Soluzione di $q(x) > 0$
$> 0$	$> 0$	$r_1 < r_2$	$(-\infty, r_1) \cup (r_2, \infty)$
$> 0$	$< 0$	$r_1 < r_2$	$(r_1, r_2)$
$= 0$	$> 0$	$r_{1,2}$ (doppio)	$\mathbb{R} \setminus \{r_{1,2}\}$
$= 0$	$< 0$	$r_{1,2}$ (doppio)	$\emptyset$
$< 0$	$> 0$	nessuno	$\mathbb{R}$
$< 0$	$< 0$	nessuno	$\emptyset$

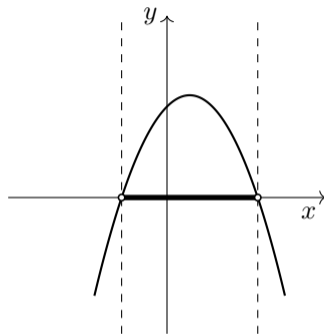
## Esempi (caso $>$ )

- $(x - 2)(x + 1) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ o } x > 2.$
- $-(x - 2)(x + 1) > 0 \Rightarrow -1 < x < 2$  (qui  $a < 0$ ).
- $(x - 2)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 2$  (zero doppio).

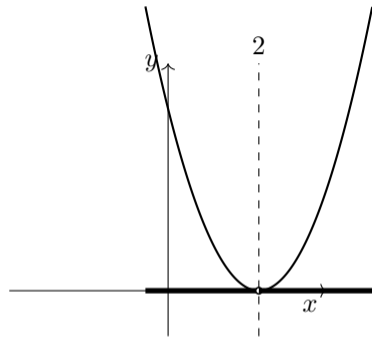
# Disequazioni quadratiche: esempi grafici



$$(x - 2)(x + 1) > 0 \Rightarrow \\ x < -1 \vee x > 2$$



$$-(x - 2)(x + 1) > 0 \Rightarrow \\ -1 < x < 2$$



$$(x - 2)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 2$$

Come si generalizza? Per  $\geq 0$  **aggiungi** gli zeri; per  $< 0$  prendi i **complementari** degli intervalli di positività (escludendo gli zeri); per  $\leq 0$  come  $< 0$  ma **includendo** gli zeri.

Nota: se  $\Delta < 0$  e  $a > 0$ ,  $q(x) > 0$  per ogni  $x$ ; se  $\Delta < 0$  e  $a < 0$ , nessuna soluzione.

**Schema generale** per  $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ :

- 1 **Dominio:**  $Q(x) \neq 0$ .
- 2 Trova zeri di  $P$  e di  $Q$ , ordina sulla retta reale.
- 3 Costruisci la tabella dei segni
- 4 Applica la condizione  $> 0$ , rispettando il dominio.

## Esempio

$$\frac{x - 3}{x + 2} < 0.$$

Zeri:  $x = 3$  (numeratore),  $x = -2$  (denominatore).

Segni:  $(-\infty, -2)$  (+);  $(-2, 3)$  (-);  $(3, \infty)$  (+).

Soluzione:  $(-2, 3)$  (estremi esclusi).

## Con valore assoluto e con radicali

**Assoluto**  $|A(x)| > B(x)$ :

- Se  $B(x) < 0$ , la disequazione è sempre vera (perché  $|A(x)| \geq 0$ ).
- Altrimenti isola  $|A(x)|$  e riduci alle forme standard:  $|x - a| > r \Leftrightarrow x < a - r \vee x > a + r$ .

**Radicali**  $\sqrt{R(x)} > S(x)$  (indice pari):

- **Dominio:**  $R(x) \geq 0$ .
- Se elevi al quadrato, verifica anche il segno di  $S(x)$ .

### Esempio

$$\sqrt{3x + 1} \leq x + 2.$$

$$\text{Dominio: } x \geq -\frac{1}{3} \text{ e } x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2.$$

$$\text{Quindi } x \geq -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Elevando al quadrato: } 3x + 1 \leq (x + 2)^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 + x + 3 \text{ (sempre vero).}$$

$$\text{Soluzione: } x \geq -\frac{1}{3}.$$

# Esponenziali e logaritmiche: monotonia

**Esponenziale**  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  con  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ :

$$\begin{cases} a > 1 \Rightarrow f(x) > g(x) \\ 0 < a < 1 \Rightarrow f(x) < g(x) \text{ (verso invertito)} \end{cases}$$

**Logaritmo** (stessa base  $a$ ):

$$\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > v(x) & (a > 1) \\ u(x) < v(x) & (0 < a < 1) \end{cases}$$

con  $u(x), v(x) > 0$ .

## Esempi

1)  $3^{2x-1} > 7 \Rightarrow 2x - 1 > \log_3 7 \Rightarrow x > \frac{1 + \log_3 7}{2}$ .

2)  $\log_{1/2}(x-1) \geq 3$ : base  $< 1 \Rightarrow x - 1 \leq (1/2)^3 = \frac{1}{8}$ , con  $x - 1 > 0 \Rightarrow 1 < x \leq \frac{9}{8}$ .

**Idea:** risolvi *ogni* disequazione, poi **interseca** gli insiemi soluzione.

## Esempio

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ (x - 2)(x + 1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \in [-1, 2] \end{cases} \Rightarrow x \in [1, 2].$$

**Suggerimento grafico:** usa una retta, segna gli zeri e colora gli intervalli validi, poi fai l'intersezione visiva.

1.  $|2x - 5| \geq 7$

2.  $\sqrt{x + 4} = x$

3.  $\log_5(x^2 - 1) = 1$

4.  $3^{2x-1} > 7$

5.  $\frac{x - 3}{x + 2} < 0$

6. Sistema: 
$$\begin{cases} |x - 2| < 3 \\ (x - 2)(x + 1) \geq 0 \end{cases}$$

1.  $x \leq -1, \quad x \geq 6.$

2. Dominio e concordanza:  $x \geq 0$ . Risolvo:  $x + 4 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$

Accetto solo  $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$  (perchè  $x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$  è *spuria*).

3.  $x^2 - 1 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$  con dominio  $x^2 - 1 > 0$  (ok).

4.  $2x - 1 > \log_3 7 \Rightarrow x > \frac{1 + \log_3 7}{2}.$

5.  $(-\infty, -2): +; (-2, 3): -; (3, \infty): +.$  Soluzione:  $(-2, 3).$

6.  $|x - 2| < 3 \Rightarrow -1 < x < 5; (x - 2)(x + 1) \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ o } x \geq 2.$   
Intersezione:  $[2, 5).$

- **Inizia dai Domini:** radicandi  $\geq 0$  (pari), argomenti  $\log > 0$ , denominatori  $\neq 0$ .
- **Segna i passi implicativi:** quadrati, prodotti per espressioni di segno incerto, rimozione di valore assoluto  $|\cdot|$ .
- **Monotonia:**  $a > 1$  conserva il verso;  $0 < a < 1$  lo inverte. Idem per  $\log_a$ .
- **Tabelle del segno** per quadratiche/razionali: disegna gli zeri sulla retta, poi gli intervalli (attenzione a molteplicità e ordine degli zeri).
- **Controllo finale:** sostituisci le soluzioni nell'originale; scarta le *spurie*.
- **Scrittura chiara:** evidenzia dominio, passaggi e insieme soluzione.