FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Funzioni di una variabile

Def.

Dati A e $B \subseteq$ R una funzione di A in B è una legge (o relazione, o mappa) che ad ogni elemento x di A associa uno ed un solo elemento y di B.

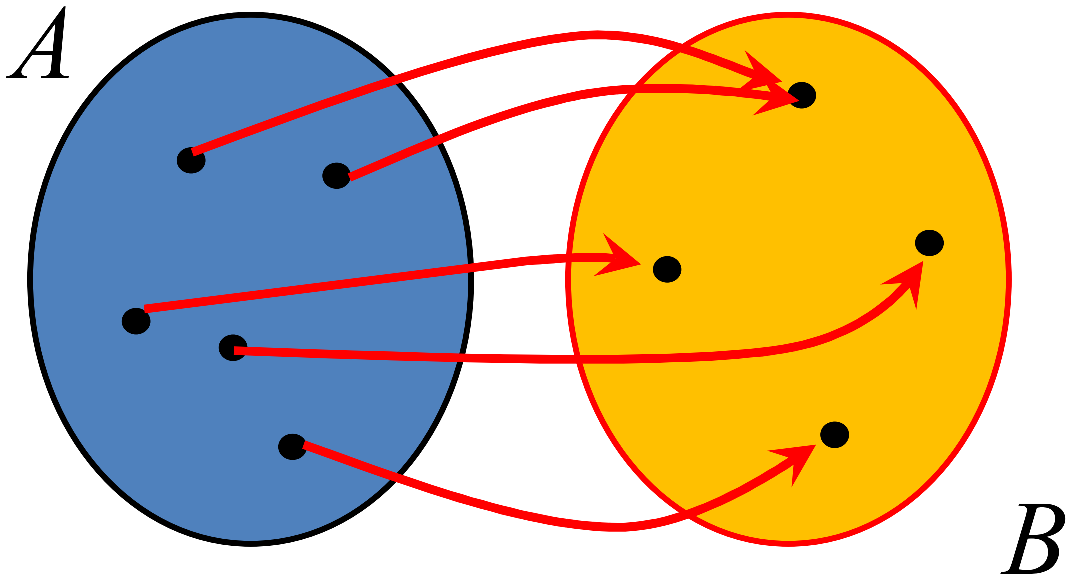
$f: A \to B$ oppure $y = f(x)$

$$x \in A \quad \text{e} \quad y = f(x) \in B$$

Funzioni di una variabile

A = dominio o insieme di definizione di f.

B = codominio di f



Funzioni di una variabile

Il grafico di f è un insieme di punti del piano (generalmente una curva) che è sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB costituito da $(x, f(x))$ con x$\in A$, $f(x)\in B$

Def.

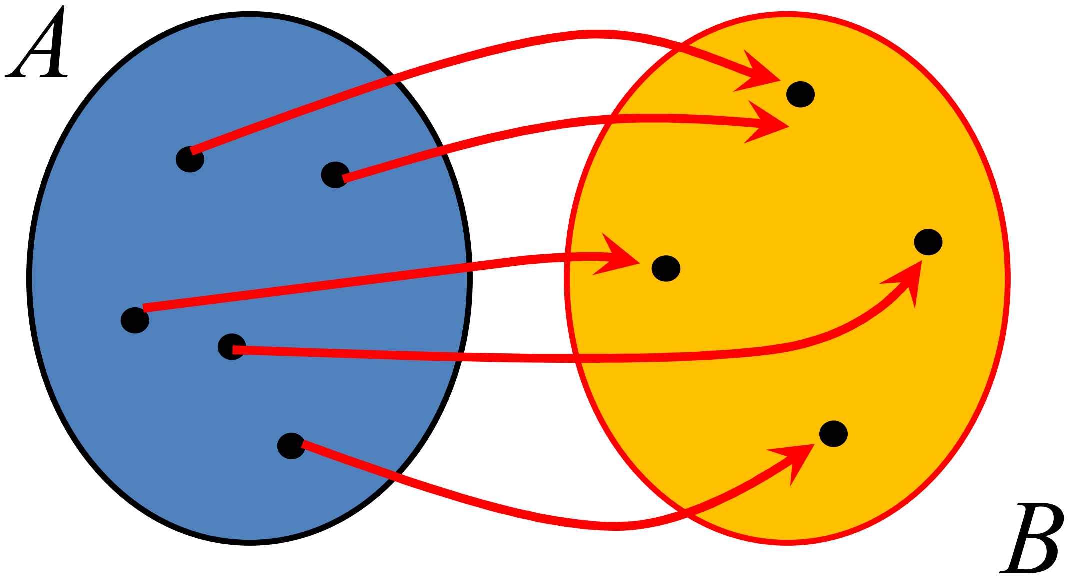
L'immagine di A tramite f, $f(A)$, è l'insieme dei valori di y tale che $\exists\, x \in A$ tale che $f(x) \in B$

Es. Se $f\colon A \to B$, $f(x) = x^2$ $A = R$, $f(A) = [0, +\infty)$

Funzioni di una variabile

Def.

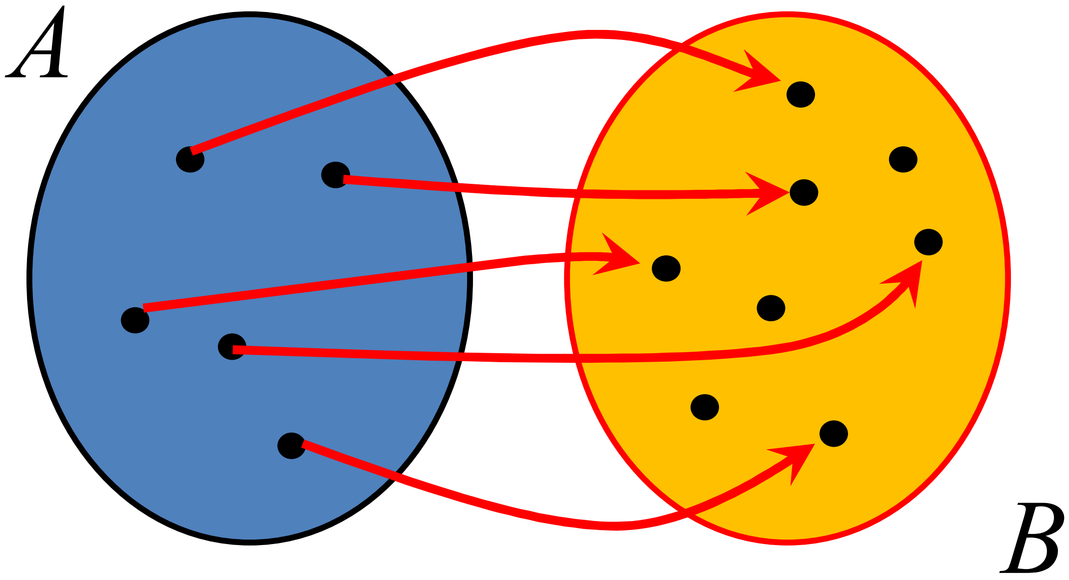
Si dice che f: $A \rightarrow B$ è suriettiva se $f(A) = B$ (cioè fissato $y \in B \Rightarrow \exists\, x \in A : y = f(x)$)



Def.

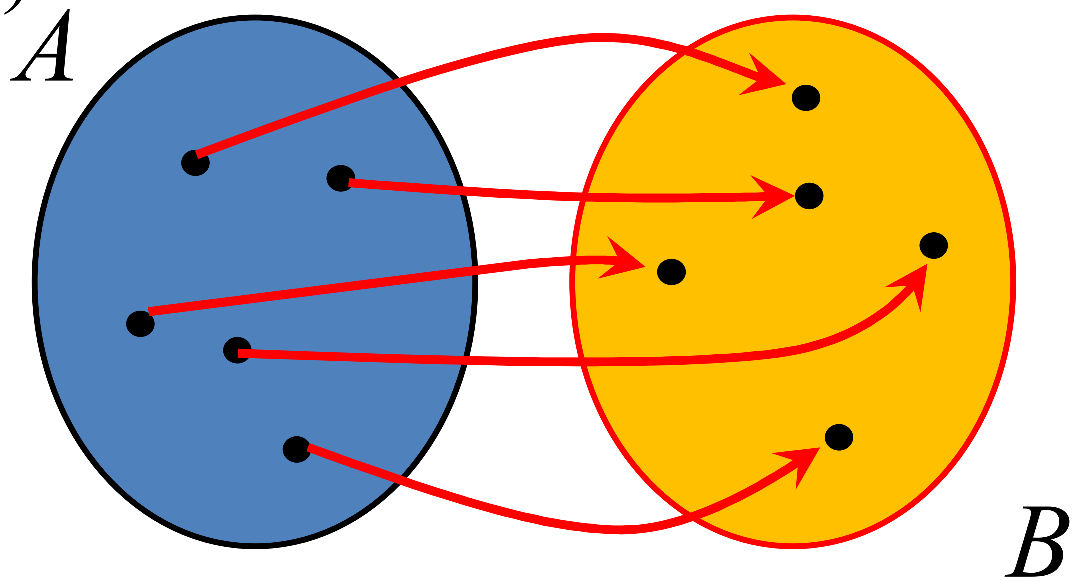
Si dice che $f\colon A \to B$ è iniettiva se

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



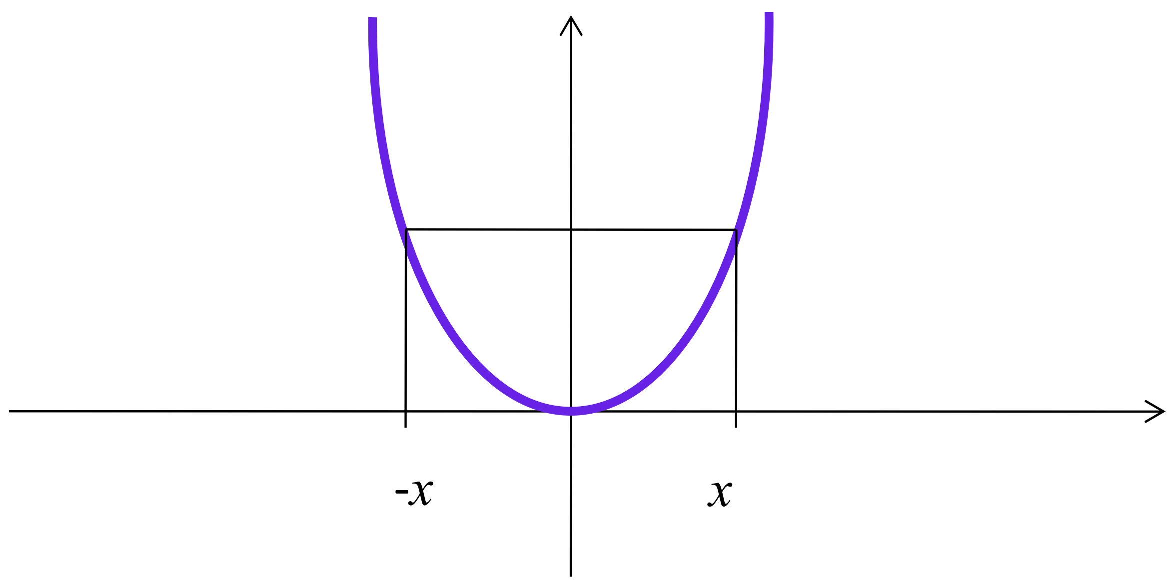
Def.

Se f è sia suriettiva che iniettiva allora si dice biiettiva (cioè si ha una corrispondenza biunivoca tra A e B)



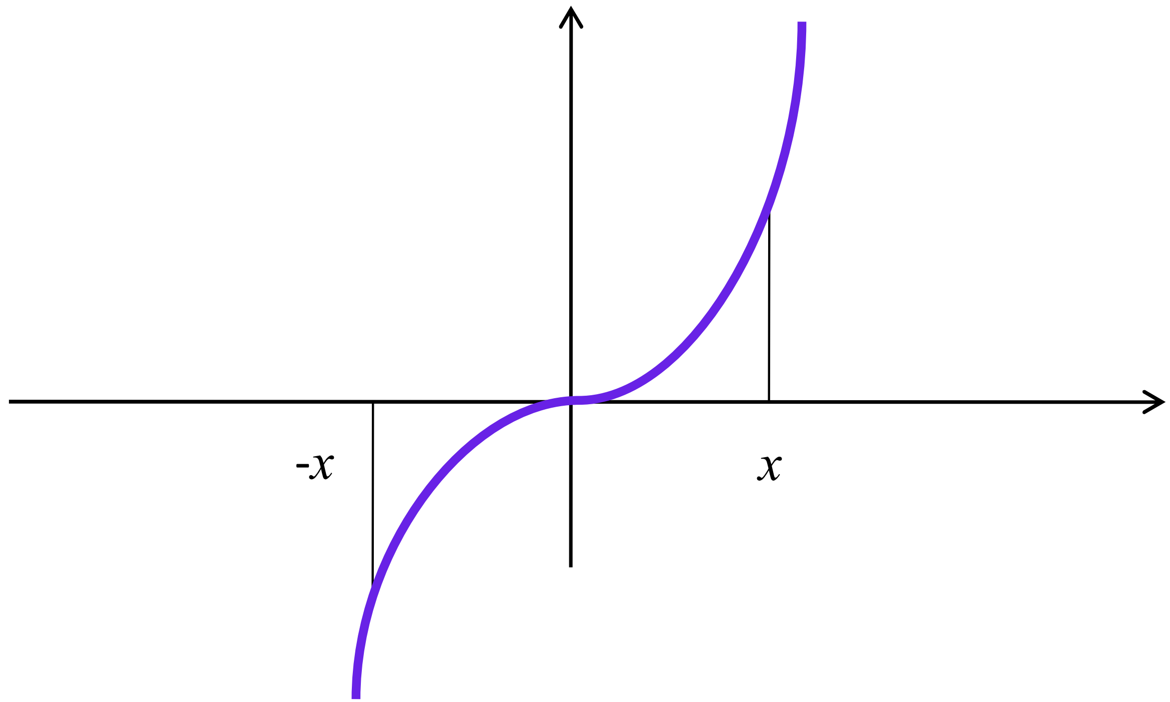
Def.

f è pari se $\forall\ x \in A : f(x) = f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse Y (es. $y = x^2$)



Def.

f è dispari se $\forall\ x \in A$: $f(-x) = -f(x)$, $f(x) = -f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine (es. $y = x^3$)



Def.

Una funzione f: $A \to B$ è periodica di periodo $T > 0$, se $\forall\, x \in A$, $x+T \in A$ e $f(x+T) = f(x)$

Es. Funzioni trigonometriche

Funzioni di una variabile

Def. Data la funzione f: $A \to B$,

f si dice limitata superiormente se

$\exists \ M \in R: f(x) \leq M \ \ \forall x \in A$

(il grafico di f sta sotto la retta orizzontale $y=M$)

Analogamente, f si dirà limitata inferiormente se

$\exists \ m \in R: f(x) \geq m \ \forall x \in A$

(il grafico di f sta sopra la retta orizzontale y=m.

La funzione f si dirà limitata se è limitata sia inferiormente che superiormente.

Def.

Date $f: A \to B$ e $g: B \to C$

Si definisce funzione composta di f e g :

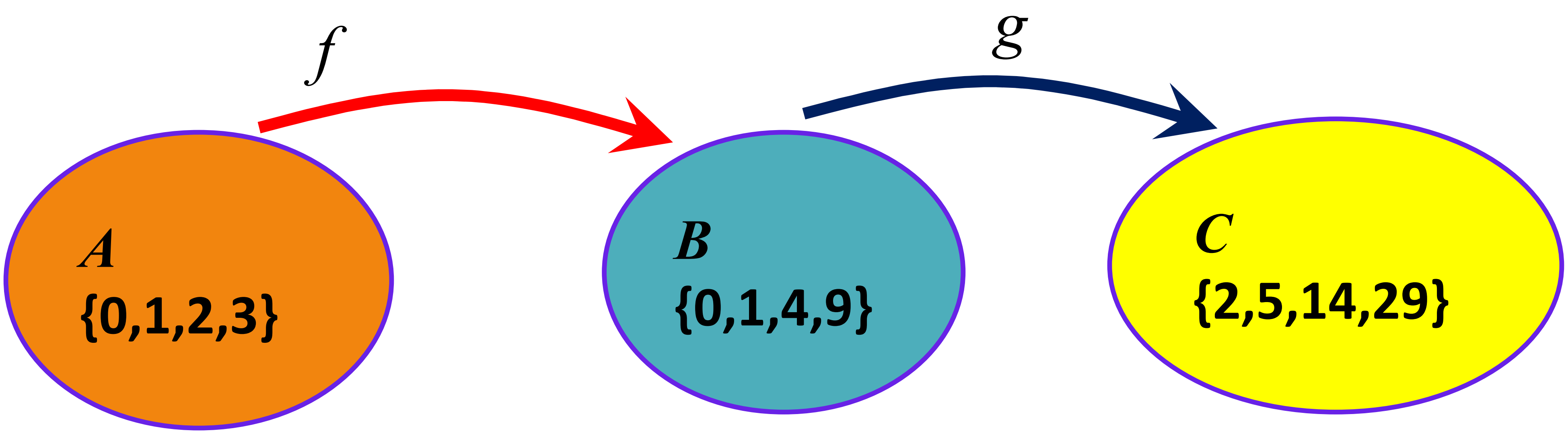
$y = g(f(x))$

la funzione $h: A \to C$ $h = g \circ f$

Esempio $f = x^2$, $g(x) = 3x+2$, $(A \equiv B \equiv C \equiv R)$

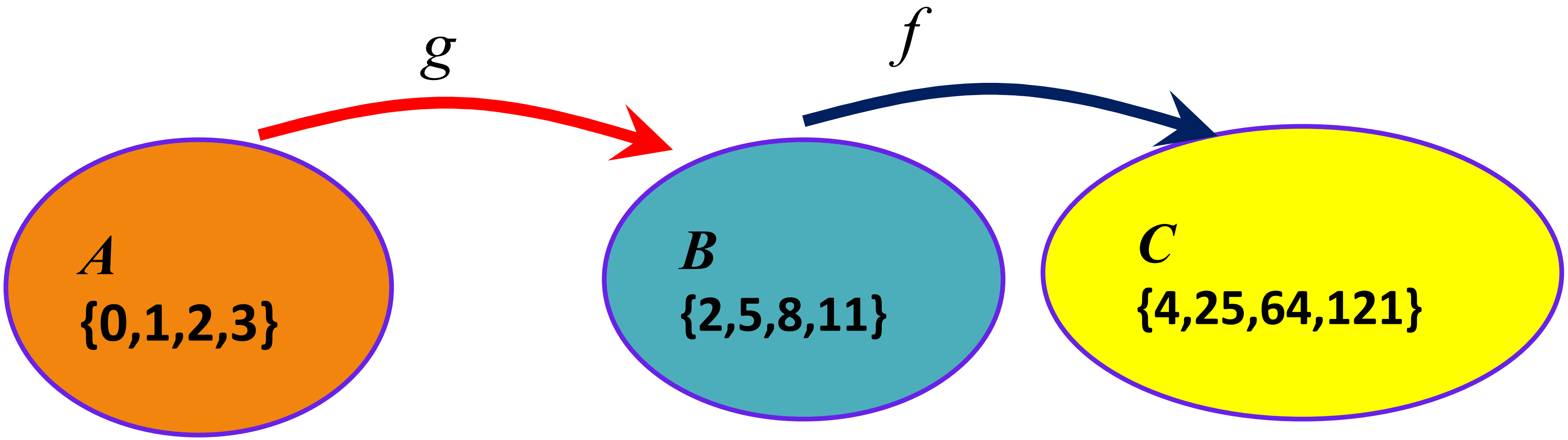
$g \circ f = 3x^2+2$

Esempio $f = x^2$, $g(x) = 3x+2$



$$\boxed{g \circ f = 3x^2+2}$$

Esempio $f = x^2$, $g(x) = 3x+2$



$$\boxed{f \circ g = (3x+2)^2}$$

Funzioni di una variabile

L'operazione di composizione non è commutativa ($g \circ f \neq f \circ g$)

La composizione di due funzioni biiettive è biiettiva

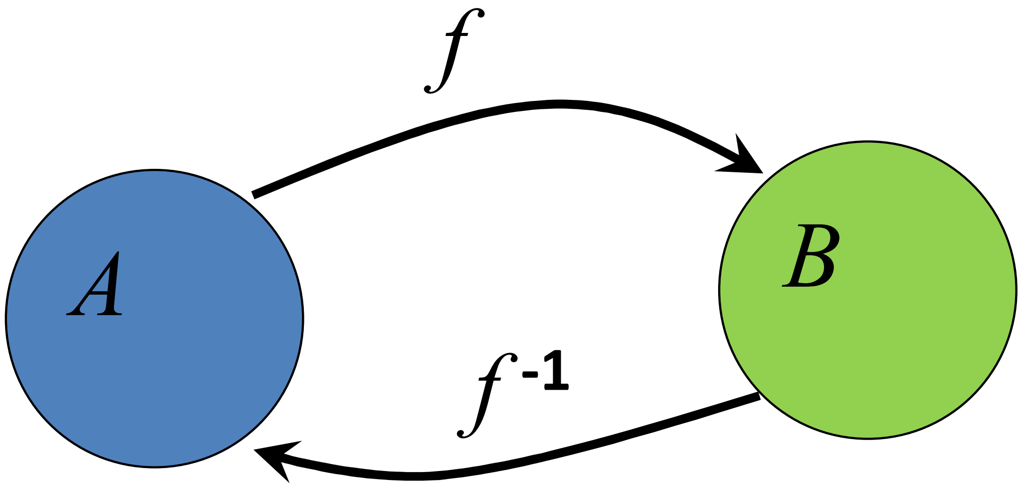
Funzioni di una variabile

Def.

Date f: $A \to B$ biiettiva, si definisce funzione inversa di f:

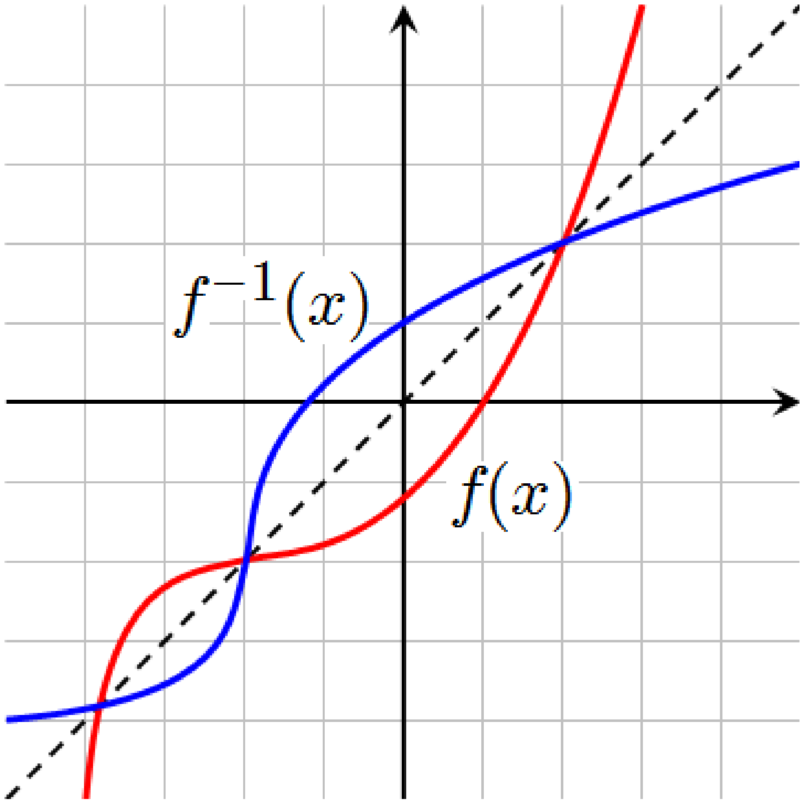
$f^{-1} : B \to A$ tale che $f^{-1} \circ f = I_A$

$f \circ f^{-1} = I_B$

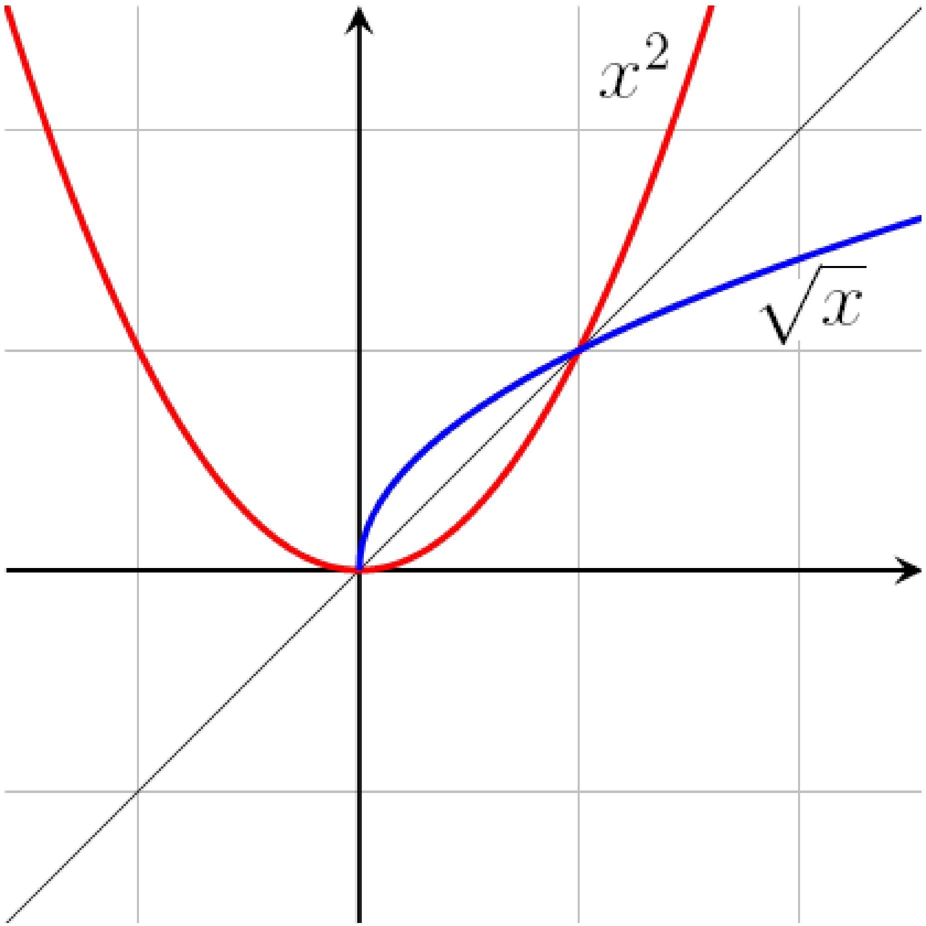


Funzioni di una variabile

I grafici di f e f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante



Es f: $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $y=x^2$, f (nel dominio indicato) è biiettiva la sua funzione inversa è $y = \sqrt{x}$



Nota. La funzione $y = x^2$ (f: R → R) non è biiettiva ma è stata "resa" biiettiva, quindi invertibile, restringendo il suo dominio (per l'iniettività) e codominio (per la suriettività).

Nell'esempio il dominio è stato «rimpicciolito» in modo tale da avere una funzione strettamente crescente e quindi iniettiva. Il codominio è stato «rimpicciolito» all'intervallo massimale $[0, +\infty)$ e la funzione è diventata anche suriettiva

Def.

Sia f: $A \rightarrow B$, f si dice monotona in A se verifica una delle seguenti condizioni ($\forall\, x_1, x_2 \in A$)

1) f strett. crescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$

2) f crescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$

3) f strett. decrescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$

4) f decrescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$

Se si verificano la 1 e 3 allora la funzione $f(x)$ è strettamente monotona.

Teorema. Una funzione $f: A \to R$ strettamente monotona in A, è invertibile in A. Inoltre la sua inversa è ancora strettamente monotona.

Funzioni di una variabile

Esempio