Università di Cagliari

CORSO ANALISI MATEMATICA 1 - A.A. 2025/2026

Docente: Loi Roberto

- Struttura del corso: 90 ore totali, 3 lezioni settimanali da 3 ore.
- Modalità di esame: scritto (con esercizi e teoria)
- Prove parziali: prima prova parziale 12 novembre, seconda prova parziale fine dicembre

Ricevimento e Contatti

Mail: roberto.loi69@unica.it

Gruppo Microsoft Teams **uc6l5lm**

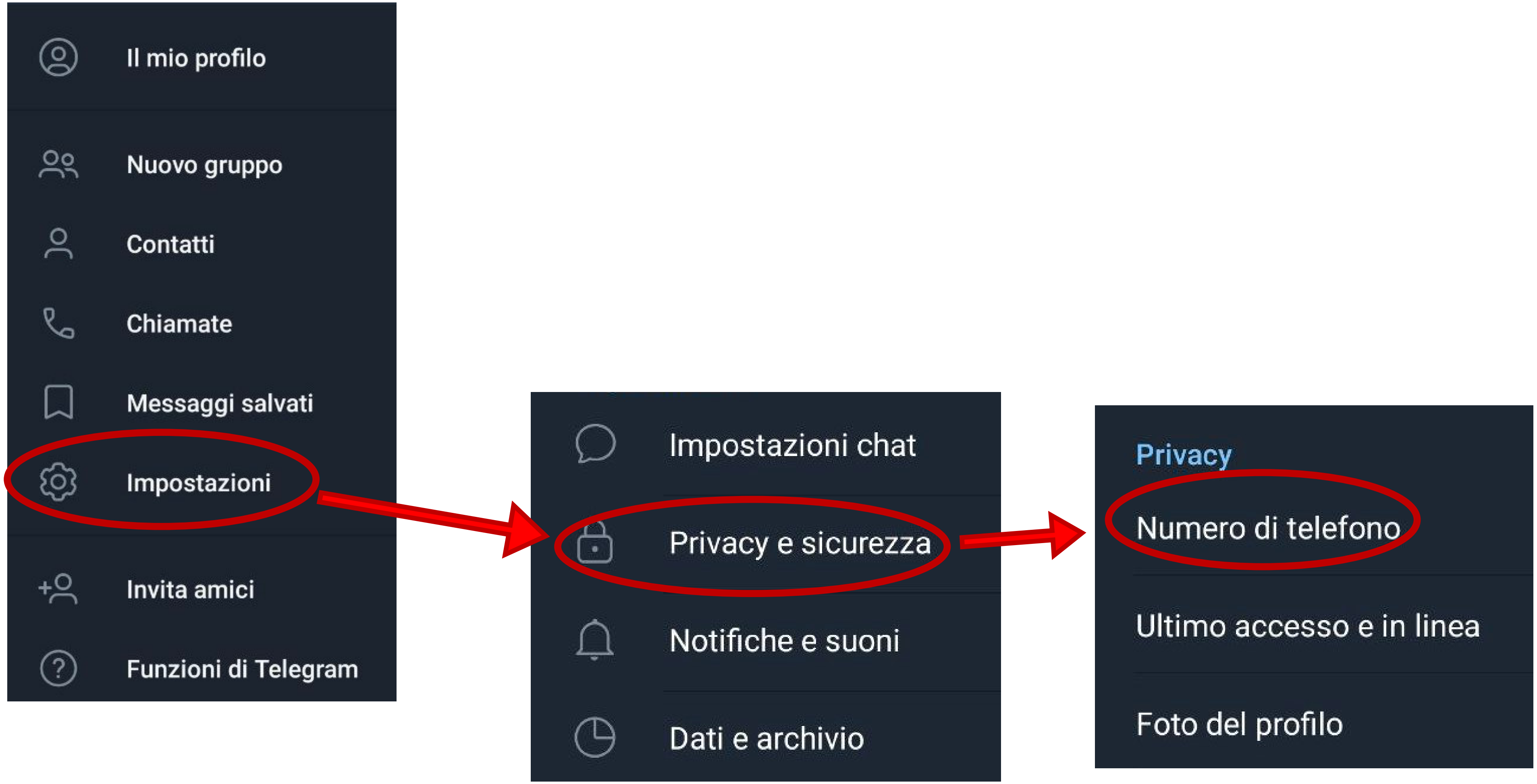
Pagina personale UNICA

https://web.unica.it/unica/page/it/roberto_loi69

Gruppo TELEGRAM Analisi 1 2025/2026

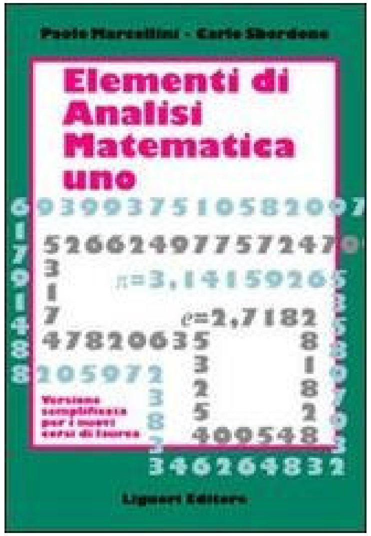
https://t.me/+Ip3rgJsDFe5jYTA8

Ricevimento e Contatti

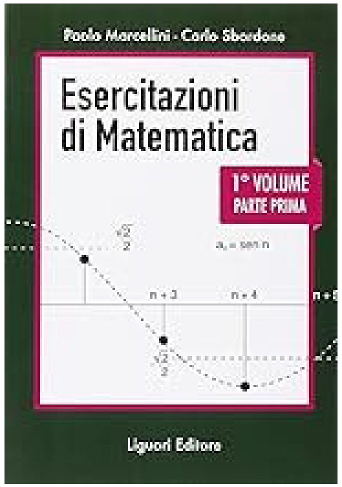


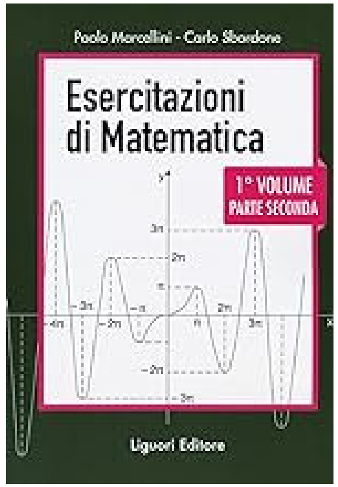
Testi consigliati

- **Elementi di analisi matematica 1.**
  Versione semplificata per i nuovi corsi di laurea P. Marcellini, C. Sbordone Editore Liguori



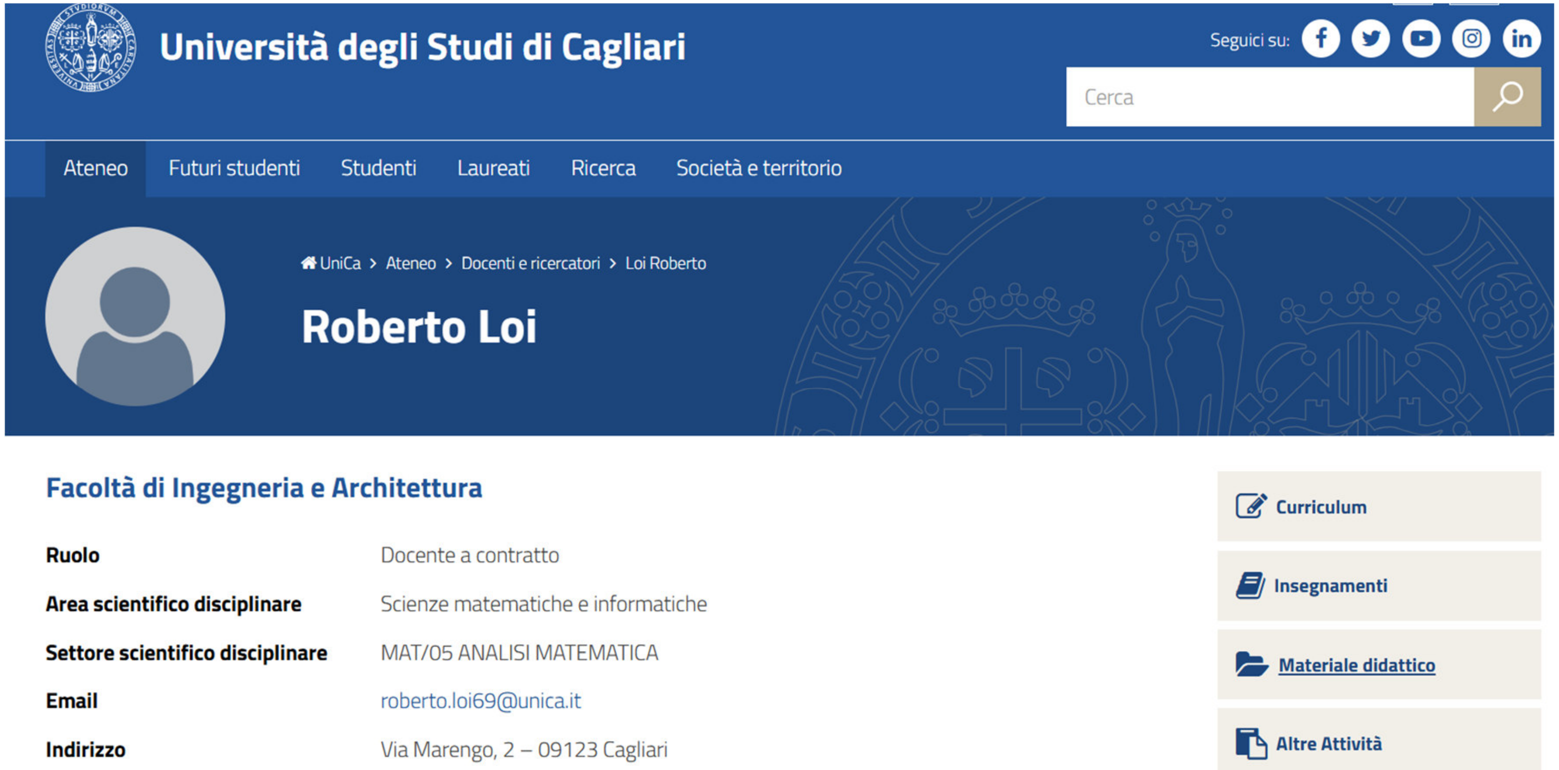
- **Esercitazioni di matematica vol.1.2**
  P.Marcellini, C. Sbordone
  Editore Liguori





Materiale consigliato online

- **Pagina web UNICA [LINK]**



Materiale consigliato online

- Cenni di teoria sugli insiemi.
- Topologia della retta.
- Funzioni reali a valori reali.
- Integrali indefiniti e integrali definiti.
- Equazioni differenziali.
- Cenni sulle successioni numeriche

Materiale consigliato online

- Cenni di teoria sugli insiemi.
- Topologia della retta.
- Funzioni reali a valori reali.
- Integrali indefiniti e integrali definiti.
- Equazioni differenziali.
- Cenni sulle successioni numeriche

Simbologia

$\in$	Appartiene
$\notin$	Non appartiene
$\exists$	Esiste
$\exists!$	Esiste unico
$\subset$	Contenuto strettamente
$\subseteq$	Contenuto
$\supset$	Contiene strettamente
$\supseteq$	contiene

$\Rightarrow$	Implica
$\Leftrightarrow$	Se e solo se
$\neq$	Diverso
$\forall$	Per ogni
$\ni \quad :$	Tale che

Simbologia

$\leq$ Minore o uguale

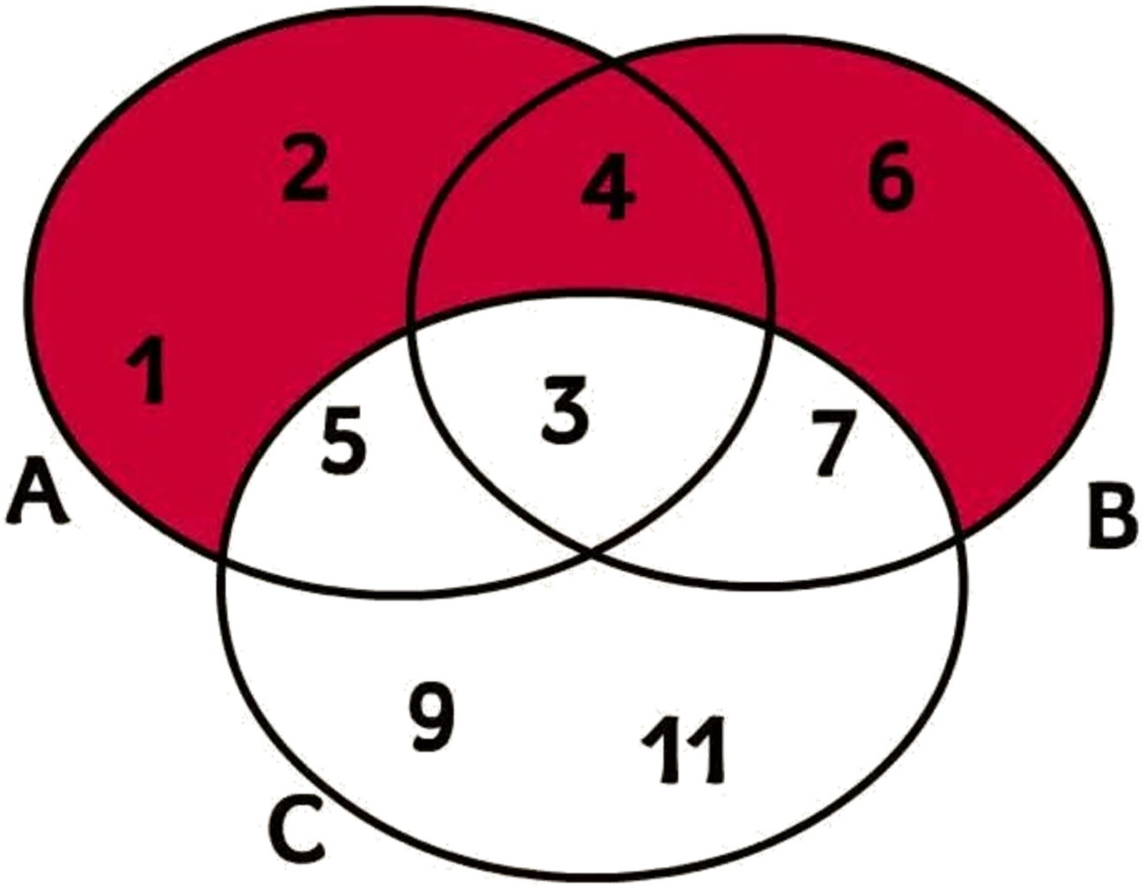
$\geq$ Maggiore o uguale

α alfa

β beta

γ gamma

γ, Γ	gamma
δ, Δ	delta
ε	epsilon
σ, Σ	sigma
ρ	rho


2
4
6
1
5
3
7
A
B
9
11
C

Rappresentazione di un insieme

Per rappresentare un insieme abbiamo tre possibilità:

1) Rappresentazione estensiva

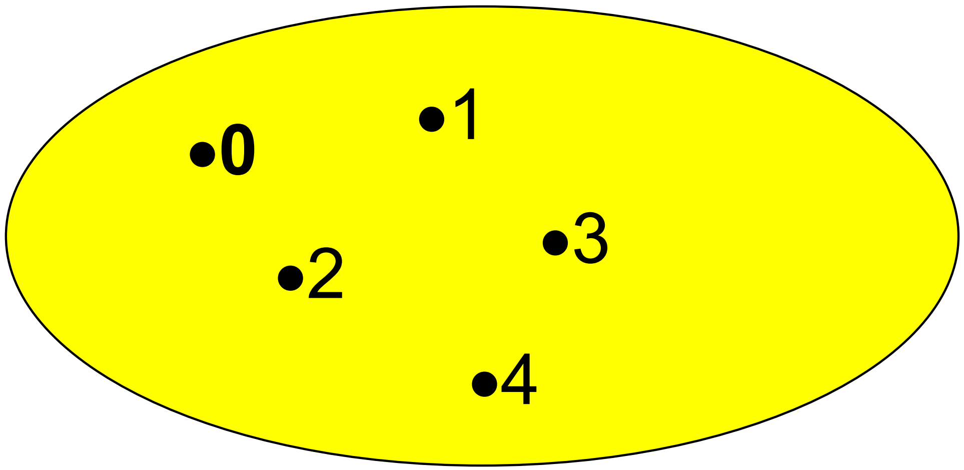
$$\mathbf{A = \{0, 1, 2, 3, 4\}}$$

Cenni di teoria sugli insiemi

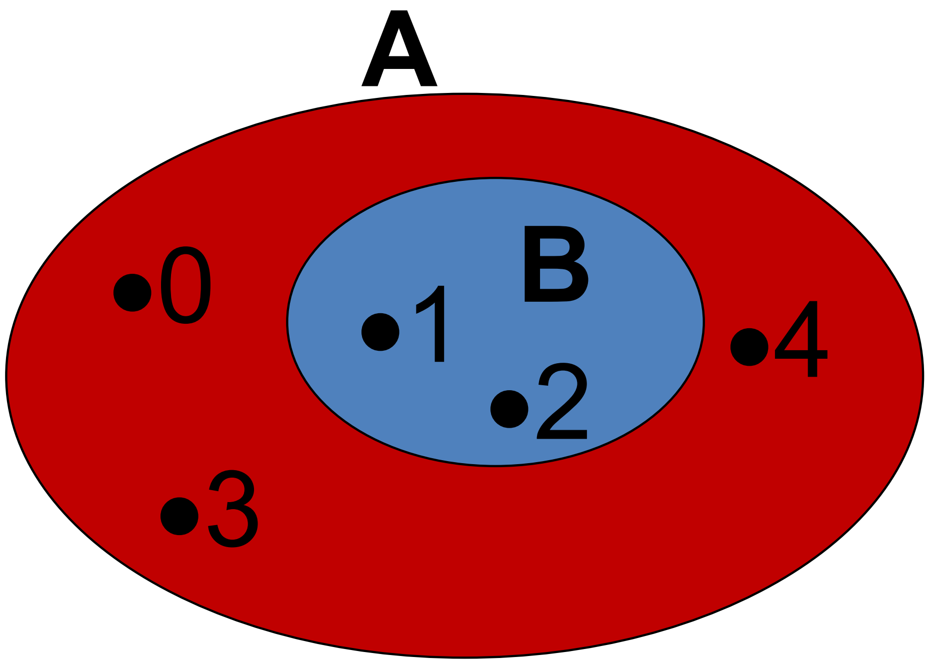
2) Rappresentazione intensiva

$$A = \{x \mid x \in N \;\; e \;\; x < 5\}$$

3) Rappresentazione con diagrammi di Eulero - Venn



Un insieme può essere contenuto in un altro



Operazioni tra gli insiemi

Si dice allora che B è un sottoinsieme di A:

$$\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$$

$\varnothing$ Insieme vuoto (insieme privo di elementi)

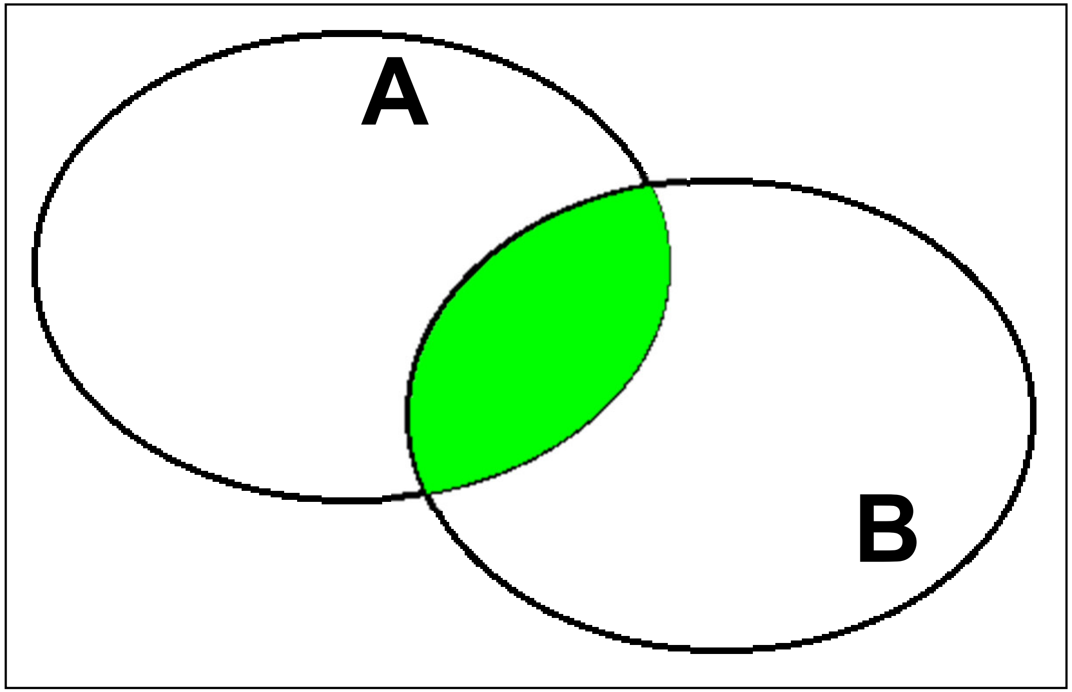
Diagrammi di Eulero - Venn

- **Intersezione**
- **Unione**
- **Complementare**

Operazioni tra gli insiemi

Si definisce **intersezione** di due insiemi A e B, l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e B.

$$A \cap B = \{x \ : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

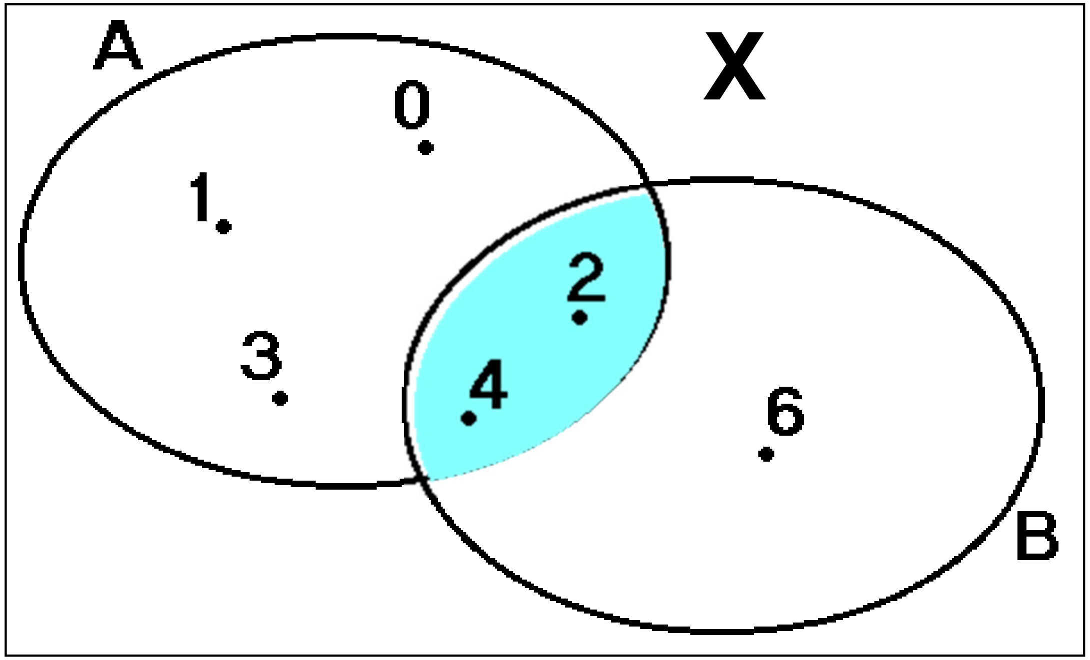


Operazioni tra gli insiemi

Dati ad esempio i due insiemi **A** = **{0,1,2,3,4}** e **B** = **{2,4,6}**, l'intersezione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{2, 4\}$$

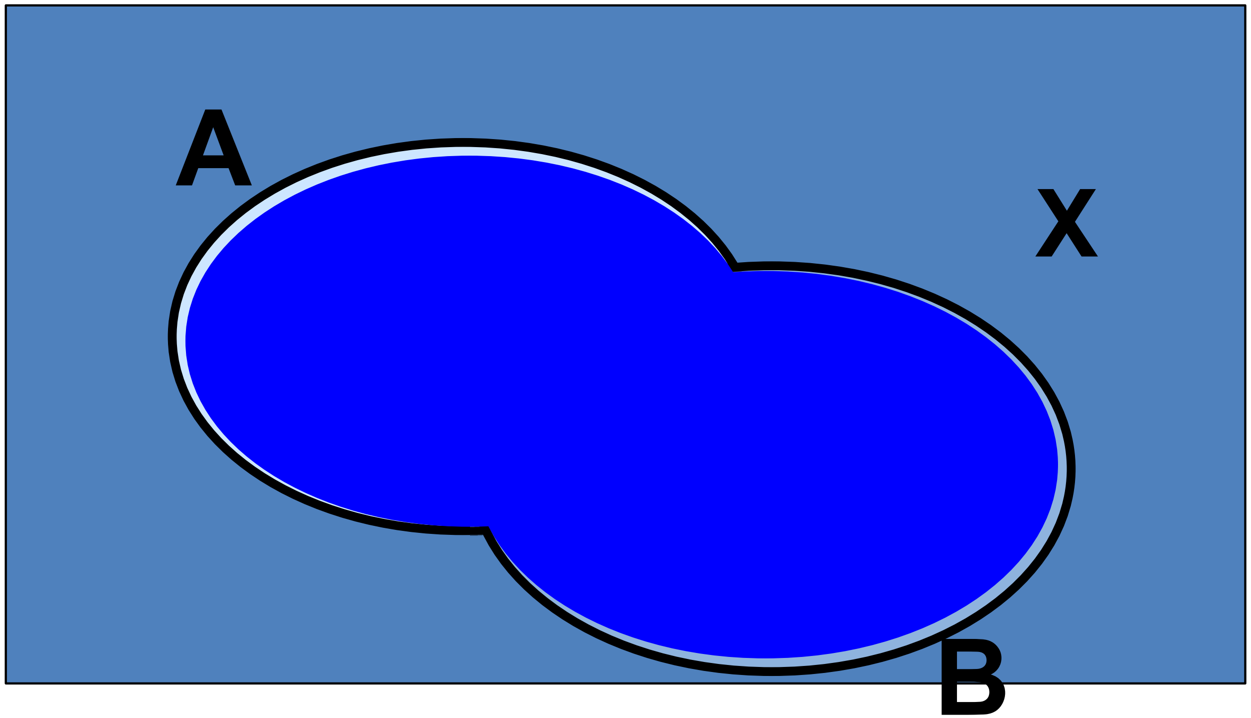
Dati ad esempio i due insiemi
A = {0,1,2,3,4} e **B = {2,4,6}**,
l'intersezione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme:



Operazioni tra gli insiemi

Si definisce **<u>unione</u>** di due insiemi A e B, l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi dati.

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ o } x \in B\}$$



Operazioni tra gli insiemi

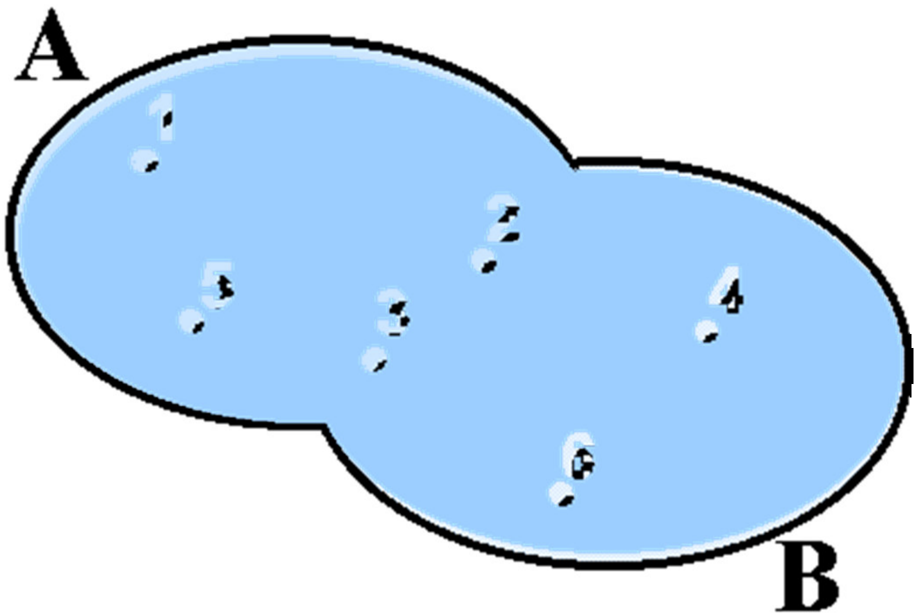
Dati ad esempio i due insiemi **A = {1,2,3,5}** e **B = {2,3,4,6}**, l'unione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme

$$\mathbf{A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}}$$

Operazioni tra gli insiemi

Dati ad esempio i due insiemi
A = {1,2,3,5} e **B = {2,3,4,6}**, l'unione
tra **A** e **B** è data dal seguente insieme:

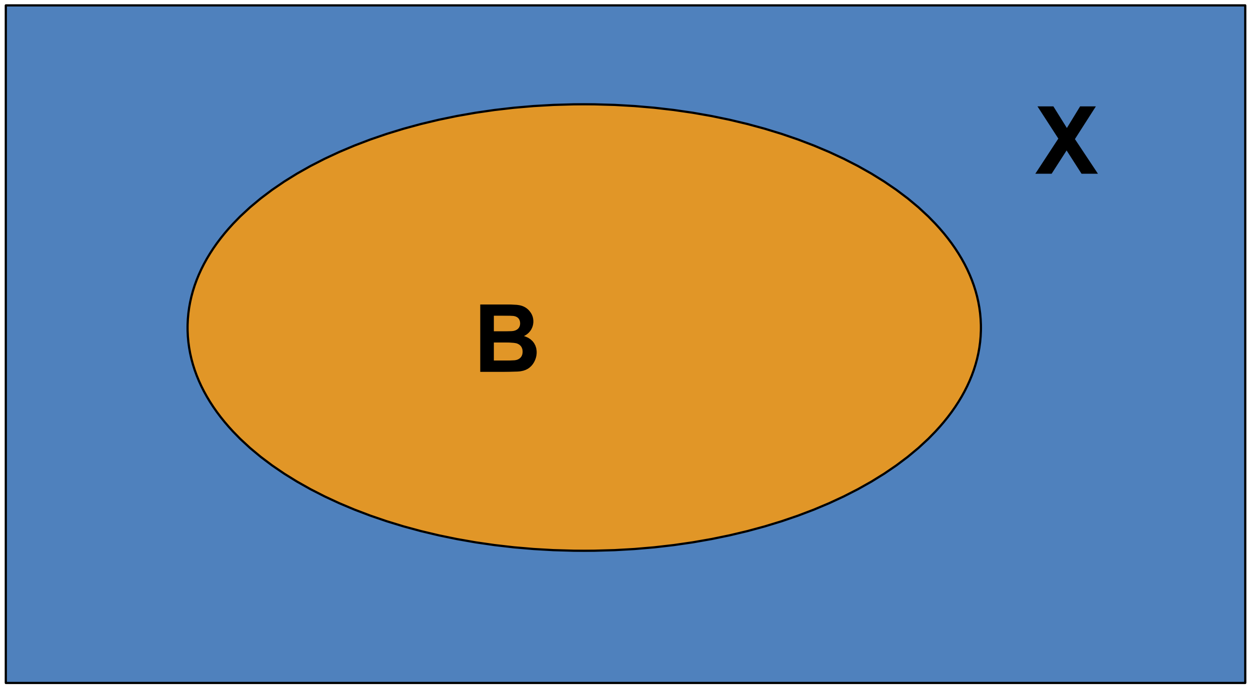
$$\mathbf{A \cup B = \{\mathit{x}:\ \mathit{x} \in A\ \mathit{o}\ x \in B\}}$$



Operazioni tra gli insiemi

Si definisce complementare di B rispetto all'insieme X, l'insieme degli elementi che stanno in X ma non in B.

$$X \setminus B = B^c = \{x \in X \text{ e } x \notin B\}$$

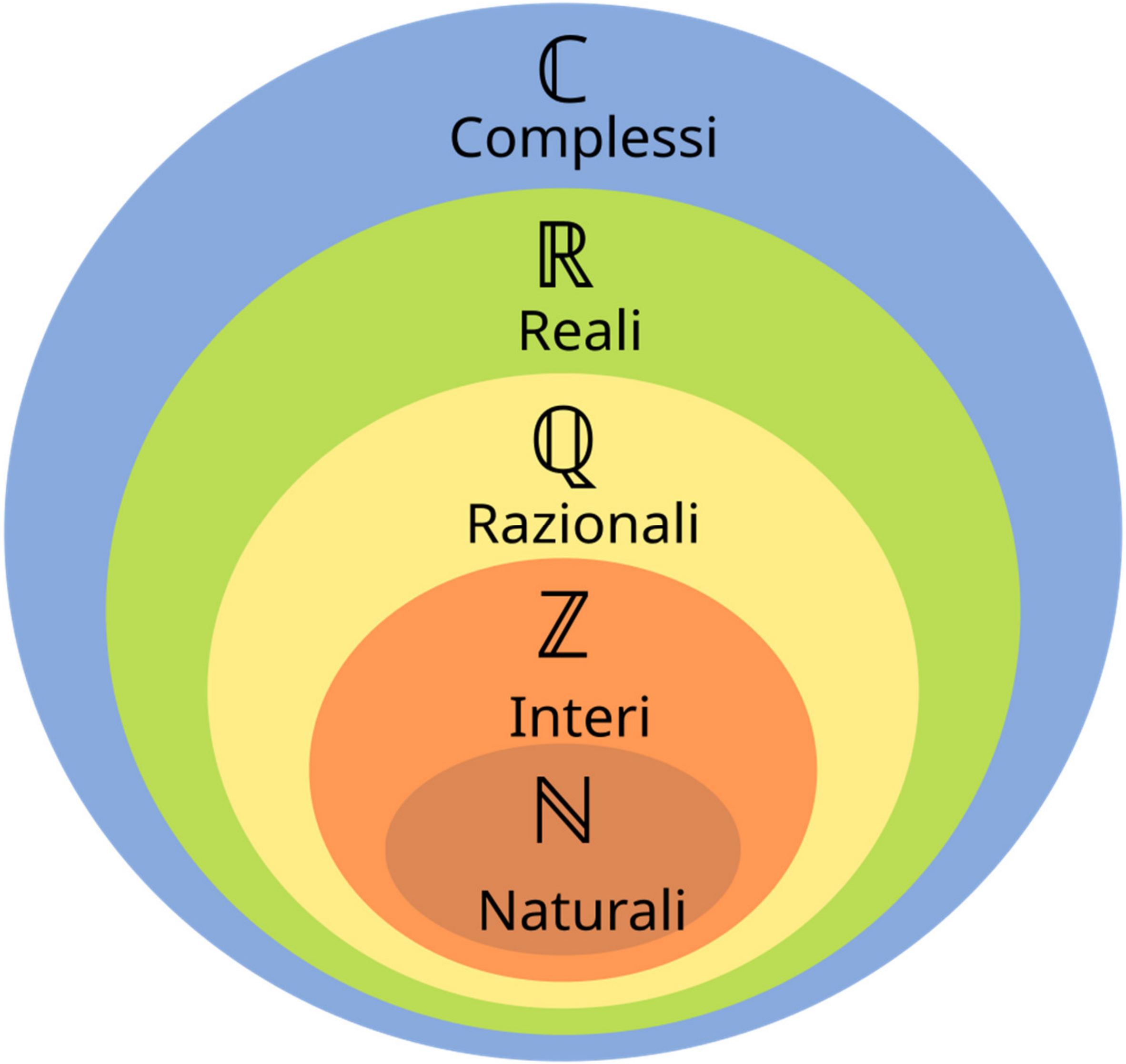


Operazioni tra gli insiemi

Dati due insiemi non necessariamente distinti A e B, si definisce prodotto cartesiano il nuovo insieme costituito da tutte le coppie ordinate (a, b) con $a \in$A, $b \in$B.

$$\text{A x B} = \{(a,b) : a \in A \; e \; b \in \text{B}\}$$

Gli insiemi numerici



Numeri naturali - $\mathbb{N}$

L'insieme dei numeri naturali è così denominato perché viene spontaneamente utilizzato per associare agli oggetti il concetto astratto di numero

$$\{0,1,2,3,4,....,+\infty\}$$

Numeri naturali - N

L'addizione e la moltiplicazione sono operazioni ben definite (interne) in N (il risultato è sempre un numero naturale)

$3+4=7$	$3 \times 4=12$	$6+8=14$
$6 \times 8=48$	$10 \times 3=30$	$10+3=13$

Numeri interi - I

Per permettere la sottrazione tra numeri naturali si introduce l'insieme dei numeri interi

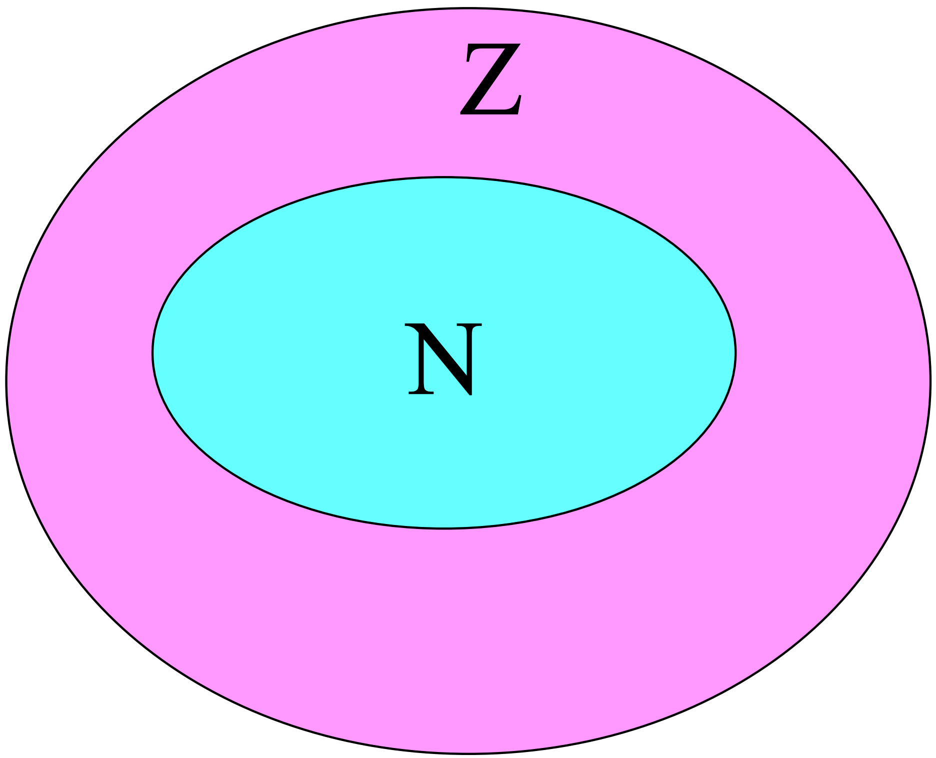
L'insieme Z dei numeri interi:

$$\{-\infty, \ldots. -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots. +\infty\}$$

L'INSIEME dei numeri interi Z

Numeri interi - I

$$N \subset Z$$



Numeri interi - I

L'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione sono operazioni ben definite (interne) in Z (il risultato è sempre un numero intero relativo)

$-3+4= +1 \qquad -3- 4 = -7 \qquad +3+4 =+7$

$(-3)\cdot(-4)= +12 \qquad (+3) \cdot(+4)= +12$

$(+3) \cdot(-4) = -12$

La divisione non è ben definita: non sempre si può eseguire

(-30) : (-10) = +3

(+4) : (+5) = ?

Numeri razionali - Q

Per dare una risposta a qualsiasi divisione (con denominatore diverso da zero), si introduce l'insieme dei numeri razionali

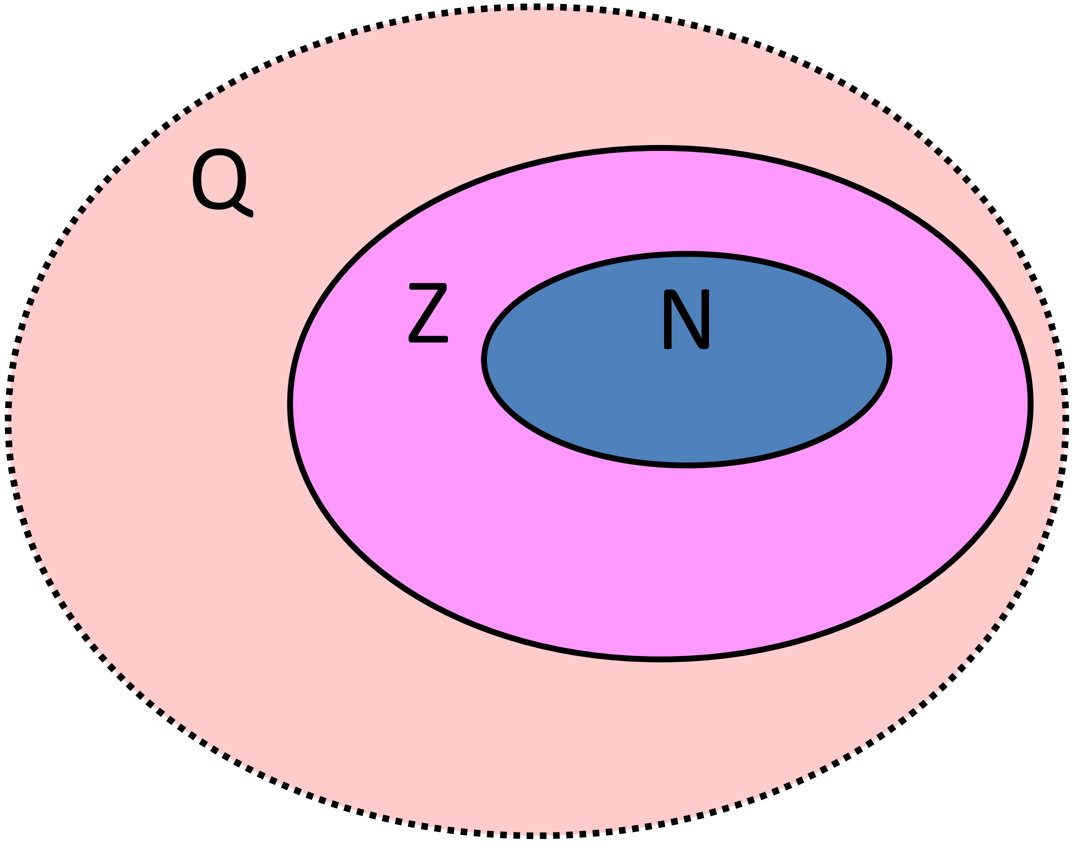
$$Q := \left\{ \frac{m}{n}, \qquad n \neq 0, \qquad m, n \in Z \right\}$$

L’INSIEME Q dei numeri razionali

- Naturali
- Interi relativi
- Decimali finiti relativi
- Decimali infiniti periodici semplici relativi
- Decimali infiniti periodici misti relativi

Numeri razionali - Q

$$N \subset Z \subset Q$$



Le operazioni in Q

L'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione sono operazioni ben definite in Q (il risultato è sempre un numero razionale)

$$3 \div 4 = \frac{3}{4}$$

Le operazioni in Q

L'operazione di estrazione di radice non è ben definita, non sempre si può eseguire

$$\sqrt{9} = 3,$$

$$\sqrt{3} = ?$$

L'INSIEME dei numeri Irrazionali

Per dare una risposta a qualsiasi radicale con radicando positivo, si introduce l'insieme dei numeri irrazionali

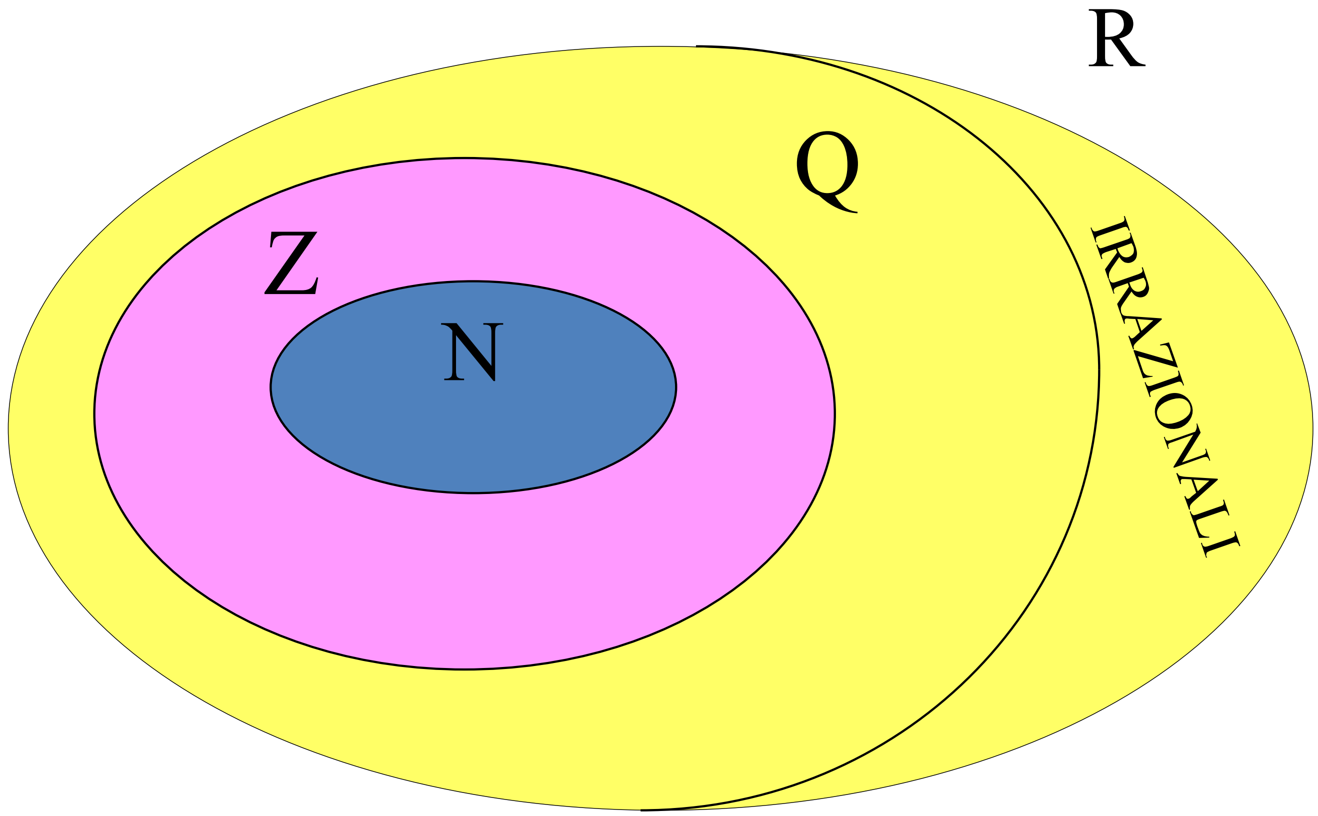
$$\sqrt[4]{5} \qquad \sqrt{7} \qquad \sqrt[3]{15}$$

Numeri Reali - R

L'insieme R è costituito dall'unione dei numeri razionali con i numeri irrazionali

$$R = Q \cup \{irrazionali\}$$

Numeri Reali - R



Le operazioni in R

L'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione e la radice ennesima con radicando positivo sono operazioni ben definite (interne) in R

(il risultato è sempre un numero reale)

Le operazioni in R

L'estrazione di radice non è ancora ben definita: non sempre si può eseguire cioè in R non si possono risolvere tutte le equazioni

La radice pari di un reale negativo non si può eseguire in R:

$$\sqrt{-2} \qquad \sqrt[4]{-7}$$

$x^2 + 1 = 0$ non ha soluzione in R

Numeri Complessi - C

Si definisce l'unità immaginaria i e si introduce l'insieme dei numeri complessi

I numeri complessi possono essere espressi nella forma algebrica : $z = a + ib$

Con a e b numeri reali e

$$i^2 = -1$$

Numeri Complessi - C

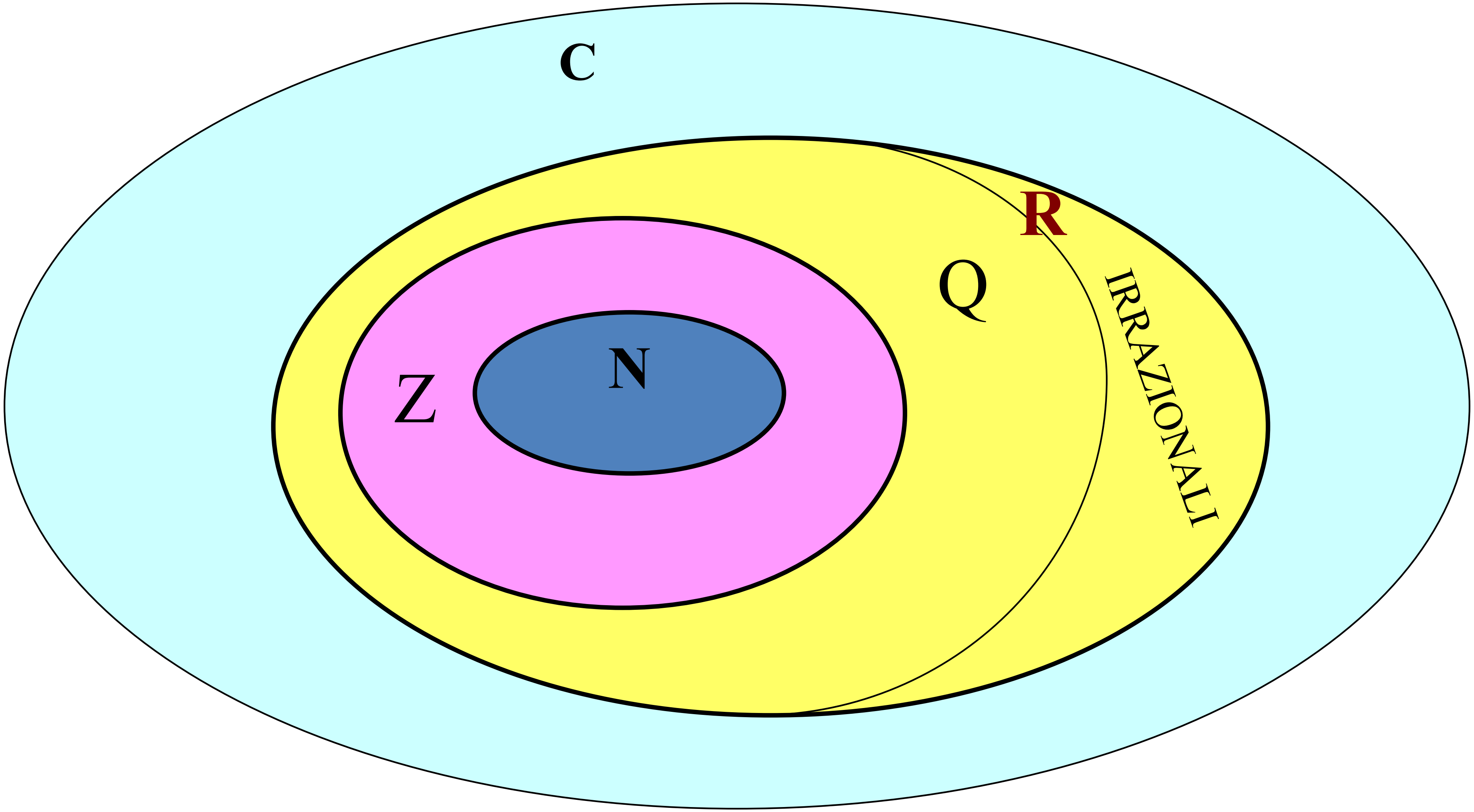
Un numero complesso, con il coefficiente della parte immaginaria nullo, è un numero reale puro

$$a + ib = a, \qquad (b = 0)$$

$$\mathrm{R} \subset \mathrm{C}$$

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{in} \quad \mathrm{C} \quad \text{ha soluzione: } x = \pm i$$

Numeri Complessi - C



Cenni di Topologia in R

Sottoinsiemi di R - INTERVALLI

Dati due numeri reali a e b, $a \leq b$, si definisce

$[a,b] = \{x \in \mathrm{R} : a \leq x \leq b\}$ Intervallo Chiuso

$(a,b) = \{x \in \mathrm{R} : a < x < b\}$ Intervallo Aperto $]a,b[$

Sottoinsiemi di R - INTERVALLI

$(a,b]$ e $[a,b)$ né **CHIUSO** né **APERTO**

Si può anche dire che $(a,b]$ è chiuso a destra e aperto a sinistra (viceversa per $[a,b)$)

Sottoinsiemi di R - INTERVALLI

$$[a,b) = \{x \in \mathrm{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a,b] = \{x \in \mathrm{R} : a < x \leq b\}$$

Sottoinsiemi di R - INTERVALLI

Intervallo Illimitato superiormente, chiuso

$$[b,+\infty) = \{x \in \mathrm{R} : x \geq b\}$$

Intervallo Illimitato superiormente, aperto

$$(b,+\infty) = \{x \in \mathrm{R} : x > b\}$$

Sottoinsiemi di R - INTERVALLI

Intervallo Illimitato inferiormente, chiuso

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathrm{R} : x \leq a\}$$

Intervallo Illimitato inferiormente, aperto

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathrm{R} : x < a\}$$

Intervallo Illimitato

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathrm{R}\}$$

$- \infty$ $+ \infty$

Sottoinsiemi di R - Intorno

Def: Intorno di centro x_0 e raggio δ

$I(x_0,\delta) = (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ cioè $\{x \in R : |x - x_0| < \delta,\ \delta > 0\}$

Intorno destro di x_0

$(x_0,\ x_0+\delta)$ cioè $\{x \in R : x_0 < x < x_0 + \delta,\ \ \delta > 0\}$

Intorno sinistro di x_0

$(x_0 - \delta,\ x_0)$ cioè $\{x \in R :\ x_0 - \delta < x < x_0,\ \ \delta > 0\}$

Sottoinsiemi di R - Intorno

Intorno di ∞: un qualunque intervallo del tipo

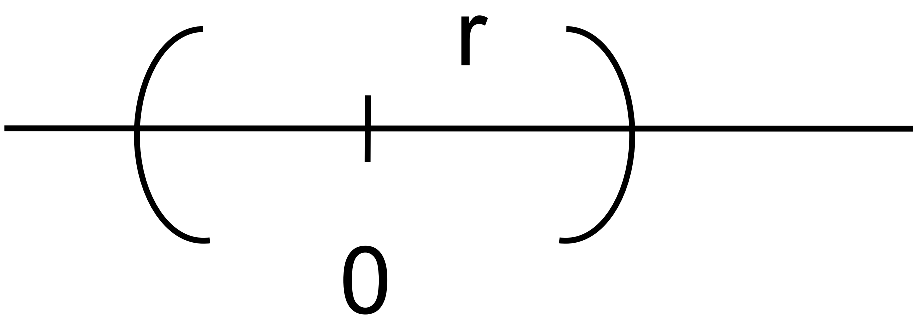
$(-\infty , a)$ cioè $\{x \in \mathrm{R} : x < a \}$

oppure

$(a,+\infty)$ cioè $\{x \in \mathrm{R} : x > a \}$

Def.

$A \subset R$ è **limitato** se $\exists$ $I(0,r)$ che lo contiene



Sottoinsiemi di R - Intorno

Def.

$k \in$ R è maggiorante (minorante) per A se:

1) k è confrontabile con ogni $x \in$ A;

2) $\forall\ x \in \mathrm{A} : x \leq k\ (x \geq k)$

Es. i maggioranti di intervalli del tipo (a,b), $(a,b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ stanno nella semiretta:

Sottoinsiemi di R

Es. i minoranti di intervalli del tipo (a,b), (a,b], (a,+∞), [a,+∞) stanno nella semiretta:

Def.

A è limitato superiormente se

$\exists\, k \in \mathrm{R} : x \le k,\ \forall x \in \mathrm{A}$, k maggiorante di A

Es. (0,3), es: $k = 3$, etc

$\{x \in R:\ \ x + 3 \le 2\}$, es: $k = -1$, k=0….etc

Sottoinsiemi di R

A è limitato inferiormente se

$\exists\, H \in R : H \leq x,\ \forall x \in A,$ H minorante di A

Es. (0,2), H=0, etc

$\{x \in R:\ x^3 + 3 \geq 0\}$, H= $-\sqrt[3]{3}$, etc

A è limitato se è limitato superiormente e inferiormente

Def.

Si definisce estremo superiore di A, e si indica con supA, il minimo dei maggioranti di A, se esiste.

Es. [0, 5), 5 è l'estremo superiore,

[3,7], 7 è l'estremo superiore (=max)

(-∞, 1), 1 è l'estremo superiore $\{x \in R\colon\ x^3 < 16\}$, x=$2\sqrt[3]{2}$ è il sup.

Sottoinsiemi di R

Si definisce estremo inferiore di A, e si indica con infA, il massimo dei minoranti di A, se esiste.

Es. $(1, +\infty)$, 1 è l'estremo inferiore

$[2,6]$, 2 è l'estremo inferiore

$\{x \in R: \ x^3 + 1 > 2\}$, $x = 1$ è l'estremo inferiore

supA e inf A se esistono sono unici.

Se supA $\in$ A $\Rightarrow$ m_1= supA = massimo di A

Se infA $\in$ A $\Rightarrow$ m_2= infA = minimo di A

Es.

[-1, 3), -1 è il minimo, 3 è l'estremo superiore

[0,1], 0 è il minimo, 1 è il massimo

(2, +∞), non limitato superiormente 2 è l'estremo inferiore

Def.

Un punto x_0 si dice ***interno*** ad A se esiste un suo intorno $I(x_0,\delta)$ con $\delta>0$ contenuto in A.

Si dice ***esterno*** ad A se è interno al CA (A^C)

Si dice di ***frontiera*** per A se non è né interno né esterno ad A

Interno di A

$\mathring{A}$ Insieme dei punti interni ad A

Es. se A=(1,3], $\mathring{A}$=(1,3)

∂A, FA Insieme dei punti di frontiera di A

Es. se A=(1,3], i punti di frontiera sono i punti x =1 e x = 3

Osservazioni

$$se\ x_0 \in \mathring{A} \ \Rightarrow x_0 \in A$$

$$se\ x_0 \notin \mathring{A} \ \text{(esterno)} \ \Rightarrow x_0 \notin A$$

$$se\ x_0 \in \partial A \ \text{(frontiera)}$$

può essere $x_0 \in A$ oppure $x_0 \notin A$, in ogni caso per $\forall$ I(x_0,δ) contiene sia punti di A sia punti di CA.

Def.

x_0 è un **punto di accumulazione** per A se

in $\forall\ I(x_0,\delta)$ esiste un punto di A diverso da x_0.

(Cioè in ogni intorno di x_0 $\exists$ infiniti elementi di A)

Es. se A=(-2,3], x=-2 è di accumulazione per A, ma anche x=3, x=0, x=1,..etc, cioè è di accumulazione per A, qualunque $x \in [2,3]$

DA = A' = derivato di A è l'insieme dei punti di accumulazione per A.

Se $x_0 \in \mathrm{D}A$ allora può aversi $x_0 \in A$ oppure $x_0 \notin A$

Es. x = 1 e x =3 sono entrambi punti di accumulazione per l'intervallo (1,3],
x = 3 appartiene all'intervallo dato, x = 1 NO.

Se $x_0 \in \mathring{A} \Rightarrow x_0 \in \mathrm{D}A$

Se $x_0 \notin \mathrm{D}A$ allora x_0 si dice isolato

Sottoinsiemi di R

Se D$A = \emptyset \Rightarrow A$ si dice discreto

Es. $A = \{1,2,3,4\}$

Se D$A = A \Rightarrow A$ si dice perfetto

Es.: $A = [a,b]$

Def.

$A \subseteq$ R si dice aperto se ogni x$\in A$ è un punto interno, cioè se $A = \mathring{A}$

Es. (a,b)

A si dice chiuso se A^C è aperto.

Es. $[a,b]$

n.b. R e $\varnothing$ sono gli unici insiemi sia aperti che chiusi.

Def.

Dato $A \subset R$ si definisce chiusura di A e si indica con $\overline{A}$, l'insieme :

$$\overline{A} = A \cup \partial A$$

A è chiuso $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$

Es. se $A=(2,5]$, allora $\overline{A} = [2,5]$

Teorema di Bolzano Weierstrass

Ogni $A \subset \mathrm{R}^n$ limitato e infinito possiede almeno un punto di accumulazione.

Un insieme chiuso e limitato in R^n ammette massimo e minimo assoluto

Es. $A=[1,4]$, $\max(A)=4$, $\min(A)=1$

$A=\left\{x \in R : x^2 \leq 1\right\}$ $\max(A)=1$, $\min(A)=-1$