

*“If you think about it, this is our story as well; for we have faced each death with a quiet determination, and succeeded against the odds.”*

Hidetaka Miyazaki, president of Fromsoftware

## TEOREMA DI STOKES, DELLA DIVERGENZA E FORMULE DI GAUSS-GREEN

### FORMULE DI GAUSS-GREEN

Ricordiamo la regola pratica della formica. L'orientazione positiva si ha se, camminando sul bordo del dominio, paralleli al vettore normale, andando avanti ci lasciamo i punti della superficie alla nostra sinistra. Si usa inoltre l'impropria notazione  $[b, a]$  con  $b > a$  per indicare il senso di percorrenza dovuto all'orientazione, di fatto questo corrisponde a considerare la curva col meno davanti e quindi ad invertire gli estremi di integrazione nell'integrale curvilineo.

Ricordiamo le formule di Gauss-Green, che collegano integrali doppi ad integrali curvilinei di seconda specie

$$\begin{aligned}\int \int_D f_x dx dy &= \int_{+\partial D} f dy \\ \int \int_D g_y dx dy &= - \int_{+\partial D} g dx\end{aligned}$$

Dove il senso di percorrenza in  $\partial D$  è quello positivo.

**Esercizio 1.** Sia definito il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2, y > x^2 - 4, y < x + 2\}$$

Dopo aver rappresentato graficamente  $D$  e l'orientazione positiva di  $\partial D$ , calcolare l'area del dominio usando le formule di Gauss-Green. Una volta capito il dominio usiamo Gauss-Green che ci dice che

$$\int \int_D 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} -y dx + x dy$$

Dove di fatto stiamo considerando  $F = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$  cosicché  $D_y F_1 = -\frac{1}{2}$  e  $D_x F_2 = \frac{1}{2}$ . Allora possiamo suddividere la frontiera  $+\partial D$  in 3 curve, rispettivamente  $\gamma_1$  la parte di parabola,  $\gamma_2$  la retta verticale a destra e  $\gamma_3$  la retta obliqua in alto. Il punto di intersezione tra  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si ha in

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

cioè in  $(2, 0)$ .

Quello tra  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  è in

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

cioè in  $(2, 4)$ .

Quello tra  $\gamma_3$  e  $\gamma_1$  è in

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

cioè in  $x = -2$  e  $x = 3$ . A noi interessa  $x = -2$  a cui corrisponde il punto  $(-2, 0)$ .

Cosicché

$$\frac{1}{2} \int_{+\partial D} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \left( \int_{\gamma_1} -y dx + x dy + \int_{\gamma_2} -y dx + x dy + \int_{\gamma_3} -y dx + x dy \right)$$

Svolgiamo i 3 integrali.

Per il primo parametrizziamo  $\gamma_1$  con  $\gamma_1 = (t, t^2 - 4)$  e  $t \in [-2, 2]$ . Questo restituisce

$$\int_{\gamma_1} -y dx + x dy = \int_{-2}^2 (-t^2 + 4) + t(2t) dt = \left[ \frac{t^3}{3} + 4t \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3} + 8 + \frac{8}{3} + 8 = 16 + \frac{16}{3} = \frac{64}{3}$$

Per il secondo parametrizziamo  $\gamma_2$  con  $\gamma_2 = (2, t)$  e  $t \in [0, 4]$ . Questo restituisce

$$\int_{\gamma_2} -y dx + x dy = \int_0^4 2 dt = 8$$

Per il terzo parametrizziamo  $\gamma_3$  con  $\gamma_3 = (t, t + 2)$  e  $t \in [2, -2]$ . Questo restituisce

$$\int_{\gamma_3} -y dx + x dy = \int_2^{-2} (-t - 2) + t dt = \int_2^{-2} -2 dt = [-2t]_2^{-2} = 4 + 4 = 8$$

Ovvero in tutto ho  $\frac{1}{2}(\frac{64}{3} + 8 + 8)$  che, facendo il calcolo "a mano", è proprio l'area del dominio.

**Esercizio 2.** Sia definito il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0, y \geq -x, y \geq 2(x - 1)\}$$

Dopo aver rappresentato graficamente  $D$  e l'orientazione positiva di  $\partial D$ , calcolare l'area del dominio usando le formule di Gauss-Green. Una volta capito il dominio usiamo Gauss-Green che ci dice che

$$\int \int_D 1 \, dx dy = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} -y \, dx + x \, dy$$

Dove di fatto stiamo considerando  $F = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$  cosicché  $D_y F_1 = -\frac{1}{2}$  e  $D_x F_2 = \frac{1}{2}$ . Allora possiamo suddividere la frontiera  $+\partial D$  in 3 curve, rispettivamente  $\gamma_1$  la retta obliqua a destra,  $\gamma_2$  la retta orizzontale in alto e  $\gamma_3$  la retta obliqua a sinistra. Il punto di intersezione tra  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si ha in

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2(x - 1) \end{cases}$$

cioè in  $(1, 0)$ .

Quello tra  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  è in

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

cioè in  $(0, 0)$ .

Quello tra  $\gamma_3$  e  $\gamma_1$  è in

$$\begin{cases} y = -x \\ y = 2(x - 1) \end{cases}$$

cioè in  $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ .

Cosicché

$$\frac{1}{2} \int_{+\partial D} -y \, dx + x \, dy = \frac{1}{2} \left( \int_{\gamma_1} -y \, dx + x \, dy + \int_{\gamma_2} -y \, dx + x \, dy + \int_{\gamma_3} -y \, dx + x \, dy \right)$$

Svolgiamo i 3 integrali.

Per il primo parametrizziamo  $\gamma_1$  con  $\gamma_1 = (t, 2(t-1))$  e  $t \in [\frac{2}{3}, 1]$ . Questo restituisce

$$\int_{\gamma_1} -y \, dx + x \, dy = \int_{\frac{2}{3}}^1 -2(t-1) + 2t \, dt = \left[ 2t \right]_{\frac{2}{3}}^1 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Per il secondo parametrizziamo  $\gamma_2$  con  $\gamma_2 = (t, 0)$  e  $t \in [1, 0]$ . Questo restituisce

$$\int_{\gamma_2} -y \, dx + x \, dy = \int_0^1 0 \, dt = 0$$

Per il terzo parametrizziamo  $\gamma_3$  con  $\gamma_3 = (t, -t)$  e  $t \in [0, \frac{2}{3}]$ . Questo restituisce

$$\int_{\gamma_3} -y dx + x dy = \int_0^{\frac{2}{3}} t - t dt = \int_0^{\frac{2}{3}} 0 dt = 0$$

Ovvero in tutto ho  $\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+0+0)$  che, facendo il calcolo "a mano", è proprio l'area del dominio.

**Esercizio 3.** Sia definito il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Dopo aver rappresentato graficamente  $D$  e l'orientazione positiva di  $\partial D$ , calcolare l'area del dominio usando le formule di Gauss-Green. Una volta capito il dominio usiamo Gauss-Green che ci dice che

$$\iint_D 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} -y dx + x dy$$

Dove di fatto stiamo considerando  $F = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$  cosicché  $D_y F_1 = -\frac{1}{2}$  e  $D_x F_2 = \frac{1}{2}$ . Allora possiamo suddividere la frontiera  $+\partial D$  in 2 curve, rispettivamente  $\gamma_1$  la frontiera esterna (in senso antiorario) e  $\gamma_2$  la frontiera interna (in senso orario). Cosicché

$$\frac{1}{2} \int_{+\partial D} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \left( \int_{\gamma_1} -y dx + x dy + \int_{\gamma_2} -y dx + x dy \right)$$

Svolgiamo i due integrali:

Per il primo parametrizziamo  $\gamma_1$  come  $\gamma_1 = (3 \cos(t), 3 \sin(t))$  con  $t \in [0, 2\pi]$ : Questo restituisce

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} -y dx + x dy &= \int_0^{2\pi} -3 \sin(t)(-3 \sin(t)) + 3 \cos(t)3 \cos(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 9(\cos^2(t) + \sin^2(t)) dt = 18\pi \end{aligned}$$

Per il primo parametrizziamo  $\gamma_2$  come  $\gamma_2 = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$  con  $t \in [2\pi, 0]$ : Questo restituisce

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} -y dx + x dy &= \int_{2\pi}^0 -2 \sin(t)(-2 \sin(t)) + 2 \cos(t)2 \cos(t) dt = \\ &= \int_{2\pi}^0 4(\cos^2(t) + \sin^2(t)) dt = -8\pi \end{aligned}$$

Ovvero in tutto ho  $\frac{1}{2}(18\pi - 8\pi) = 5\pi$ .

## TEOREMA DI STOKES

Ricordiamo che il teorema di Stokes dice che

$$\int \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS = \int_{\partial^+ \Sigma} F \cdot dr$$

dove ricordiamo

$$\operatorname{rot} F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

e

$$\int \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS = \int \int_D \operatorname{rot} F(r(u, v)) \cdot (D_u r(u, v) \times D_v r(u, v)) \, dudv$$

Di fatto, Stokes collega gli integrali di flusso con gli integrali curvilinei di seconda specie.

**Esercizio 4.** Calcolare, mediante il teorema di Stokes, l'integrale

$$\int_{\partial^+ \Sigma} (1 + 2z) \, dx + y^2 \, dy + xy \, dz$$

esteso al bordo della superficie intersezione del piano  $z = 2 - x - y$  con il cilindro  $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ .

Ci serve parametrizzare la superficie che ha come bordo  $\partial^+ \Sigma$  (si osserva che questa è un'ellisse), possiamo adottare la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 2 - u - v \end{cases}$$

dove  $(u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq \frac{1}{16}\}$ . Pertanto avremo che

$$D_u = (1, 0, -1)$$

$$D_v = (0, 1, -1)$$

$$(D_u r(u, v) \times D_v r(u, v)) = (1, 1, 1)$$

Applichiamo Stokes e abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ \Sigma} (1 + 2z) \, dx + y^2 \, dy + xy \, dz &= \int \int_D (u - 0, 2 - v, 0 - 0) \cdot (1, 1, 1) \, dudv = \\ &= \int \int_D u + 2 - v \, dudv \end{aligned}$$

Per risolvere questo integrale doppio passiamo adesso alle polari  $u = \rho \cos(t)$  e  $v = \rho \sin(t)$  con  $\rho \in [0, \frac{1}{4}]$  e  $t \in [0, 2\pi]$ . Così abbiamo

$$\begin{aligned} \int \int_D u + 2 - v \, dudv &= \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^{2\pi} [\rho \cos(t) + 2 - \rho \sin(t)] \rho \, d\rho dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^3}{3} \cos(t) + \rho^2 - \frac{\rho^3}{3} \sin(t) \right]_0^{\frac{1}{4}} dt = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{192} \cos(t) + \frac{1}{16} - \frac{1}{192} \sin(t) \right] dt = \\ &= \left[ \frac{1}{192} (\sin(t) + \cos(t)) \right]_0^{2\pi} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

**Esercizio 5.** Calcolare, mediante il teorema di Stokes, l'integrale

$$\int_{\partial+\Sigma} F \cdot dr$$

con  $\Sigma = \{5x + 2y + z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$  e  $F = (-y^3, x^3, -z^3)$ .

Parametizziamo la superficie con la classica

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - 5u - 2v \end{cases}$$

dove  $(u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$ . Pertanto si ha

$$\begin{aligned} D_u &= (1, 0, -5) \\ D_v &= (0, 1, -2) \\ (D_u r(u, v) \times D_v r(u, v)) &= (5, 2, 1) \end{aligned}$$

Applichiamo Stokes e abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial+\Sigma} -y^3 \, dx + x^3 \, dy - z^3 \, dz &= \int \int_D (0 - 0, 0 - 0, 3u^2 + 3v^2) \cdot (5, 2, 1) \, dudv = \\ &= \int \int_D 3u^2 + 3v^2 \, dudv \end{aligned}$$

Per risolvere questo integrale doppio passiamo adesso alle polari  $u = \rho \cos(t)$  e  $v = \rho \sin(t)$  con  $\rho \in [0, 1]$  e  $t \in [0, 2\pi]$ . Così abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [3\rho^2 \cos^2(t) + 3\rho^2 \sin^2(t)] \rho \, d\rho dt &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^3 \, d\rho dt = \\ 6\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

**Esercizio 6.** Calcolare, mediante il teorema di Stokes, l'integrale

$$\int_{\partial+\Sigma} x dx + y dy + xy dz$$

con  $\Sigma$  l'intersezione del cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  e del paraboloide  $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$  orientata in modo che il versore normale punti verso l'asse  $z$ .

Parametizziamo la superficie con la classica

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} \end{cases}$$

dove  $(u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 4\}$ . Pertanto si ha

$$D_u = \left(1, 0, \frac{2u}{9}\right)$$

$$D_v = \left(0, 1, \frac{v}{2}\right)$$

$$(D_u r(u, v) \times D_v r(u, v)) = \left(-\frac{2u}{9}, -\frac{v}{2}, 1\right)$$

Applichiamo Stokes e abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial+\Sigma} x dx + y dy + xy dz &= \int \int_D (u - 0, -v + 0, 0) \cdot \left(-\frac{2u}{9}, -\frac{v}{2}, 1\right) dudv = \\ &= \int \int_D -\frac{2u^2}{9} + \frac{v^2}{2} dudv \end{aligned}$$

Per risolvere questo integrale doppio passiamo adesso alle polari  $u = \rho \cos(t)$  e  $v = \rho \sin(t)$  con  $\rho \in [0, 2]$  e  $t \in [0, 2\pi]$ . Così abbiamo

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{9}\rho^2 \cos^2(t) + \frac{1}{2}\rho^2 \sin^2(t)\right) \rho d\rho dt = \\ &\int_0^1 -\frac{2}{9}\rho^3 \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\rho^3 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} d\rho = \\ &\int_0^1 -\frac{2}{9}\rho^3 \pi + \frac{1}{2}\rho^3 \pi d\rho = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9}\right) = \\ &\frac{\pi}{4} \left(\frac{5}{18}\right) \end{aligned}$$

## TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Il teorema della divergenza dice che

$$\int \int \int_B \operatorname{div} F \, dx dy dz = \int \int_{\partial^+ B} F \cdot \nu \, dS$$

Dove  $B \subset \mathbb{R}^3$  è un dominio normale rispetto ad un asse e dunque  $\partial^+ B$  è una superficie regolare.

**Esercizio 7.** Calcolare, mediante il teorema della divergenza, il flusso del campo  $F(x, y, z) = (x^3 + y, y^3 + z, z^3 + x)$  uscente dalla corona sferica  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ .

La divergenza di  $F$  si calcola semplicemente come

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

Osserviamo che la corona circolare si può parametrizzare in coordinate sferiche con  $x = \rho \cos(t) \sin(\phi)$ ,  $y = \rho \sin(t) \sin(\phi)$  e  $z = \rho \cos(\phi)$  con  $\rho \in [\sqrt{2}, 2]$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  e  $\phi \in [0, \pi]$ . Allora ho che l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int \int \int_B 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \, dx dy dz &= \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 3\rho^2 \rho^2 \sin(\phi) \, d\rho dt d\phi = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^2 3\rho^4 [-\cos(\phi)]_0^\pi \, d\rho = \\ &= 12\pi \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_{\sqrt{2}}^2 = \frac{12\pi}{5} [32 - 4\sqrt{2}] \end{aligned}$$

**Esercizio 8.** Calcolare, mediante il teorema della divergenza, il flusso del campo  $F(x, y, z) = (3y - x, z^2, xy)$  uscente dalla sfera centrata nell'origine e raggio 3.

La divergenza di  $F$  si calcola semplicemente come

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = -1 + 0 + 0$$

Osserviamo che la corona circolare si può parametrizzare in coordinate sferiche con  $x = \rho \cos(t) \sin(\phi)$ ,  $y = \rho \sin(t) \sin(\phi)$  e  $z = \rho \cos(\phi)$  con  $\rho \in [0, 3]$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  e  $\phi \in [0, \pi]$ . Allora ho che l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int \int \int_B -1 \, dx dy dz &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\rho^2 \sin(\phi) \, d\rho dt d\phi = 2\pi \int_0^3 \rho^2 [\cos(\phi)]_0^\pi \, d\rho = \\ &= -4\pi \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^3 = -4\pi \left[ \frac{27}{3} \right] = -36\pi \end{aligned}$$

## Risoluzione esercizi bonus

**Esercizio 9.** Con i consigli di Einer, Lazarus e Soma si vede che la superficie è parametrizzata come  $\phi(t, \theta) = (x(t) \cos(\theta), x(t) \sin(\theta), z(t))$  con  $t \in [a, b]$  e  $\theta \in [0, \alpha]$  dove  $\alpha$  ricordiamo che è l'angolo di rotazione. Pertanto calcoliamo l'elemento d'area come

$$\begin{aligned} |D_t \times D_\theta| &= |(x'(t) \cos(\theta), x'(t) \sin(\theta), z'(t)) \times (-x(t) \sin(\theta), x(t) \cos(\theta), 0)| = \\ &= |(-x(t)z'(t) \cos(\theta), x(t)z'(t) \sin(\theta), x(t)x'(t))| = \sqrt{x^2(t)(z')^2(t) + x^2(t)(x')^2(t)} = \\ &= x(t)\sqrt{(z')^2(t) + (x')^2(t)} = x(t)|\gamma'(t)| \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che  $x(t) > 0$  e che  $|\gamma'(t)| = \sqrt{(z')^2(t) + (x')^2(t)}$  è l'elemento di lunghezza della curva (ricorda dagli integrali curvilinei).

Pertanto l'integrale di superficie risulta

$$\begin{aligned} \int \int_{\Sigma} d\sigma &= \int_a^b \int_0^\alpha x(t)|\gamma'(t)| d\theta dt = \alpha \int_a^b x(t)|\gamma'(t)| dt \\ &= \alpha \int_{\gamma} x ds \end{aligned}$$

che è ciò che volevamo. Avete appena dimostrato il teorema di Guldino!

**Esercizio 10.** Osserviamo innanzitutto che il bordo di  $\Omega$ , che è un paraboloido a concavità verso il basso parallelo all'asse delle  $x$ , come consigliano Aisen, Van e Sera, è dato dall'unione delle due superfici

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y^2 + z^2 \leq 4\} \\ \Sigma_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 4 - y^2 - z^2, y^2 + z^2 \leq 4\} \end{aligned}$$

Perciò

$$\int_{\Sigma} \langle F, \nu \rangle d\sigma = \int_{\Sigma_1} \langle F, \nu \rangle d\sigma + \int_{\Sigma_2} \langle F, \nu \rangle d\sigma$$

Calcoliamo il primo, difatto la superficie è data come funzione  $g_1(y, z) = 0$  con  $D_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq 4\}$ . Ci serve un vettore normale entrante, dunque rivolto verso l'alto, pertanto basta considerare

$$\nu = \phi_y \wedge \phi_z = \left( 1, -(g_1)_y, -(g_1)_z \right) = (1, 0, 0)$$

che va bene. La funzione prende la forma di

$$F(\phi(y, z)) \cdot \nu = F(0, y, z) \cdot (1, 0, 0) = (4, 2y^3, -3y^2z^2) \cdot (1, 0, 0) = 4$$

Cosicché l'integrale sarà in polari

$$\int_{\Sigma_1} \langle F, \nu \rangle d\sigma = 4 \int \int_{D_1} dydz = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho d\rho d\theta = 16\pi$$

Vediamo ora il secondo, la superficie è data come funzione  $g_2(y, z) = 4 - y^2 - z^2$  con  $D_2 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq 4\}$ . Ci serve un vettore normale entrante, ricordiamo che

$$\nu = \phi_y \wedge \phi_z = \left(1, -(g_2)_y, -(g_2)_z\right) = (1, 2y, 2z)$$

è uscente, quello entrante è il contrario. La funzione prende la forma di

$$\begin{aligned} F(\phi(y, z)) \cdot \nu &= F(4 - y^2 - z^2, y, z) \cdot (-1, -2y, -2z) \\ &= (4e^{4-y^2-z^2}, 2y^3z, -3y^2z^2) \cdot (-1, -2y, -2z) \\ &= 6y^2z^3 - 4y^4z - 4e^{4-y^2-z^2} \end{aligned}$$

Cosicché l'integrale sarà in polari

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_2} \langle F, \nu \rangle d\sigma &= \int \int_{D_2} 6y^2z^3 - 4y^4z - 4e^{4-y^2-z^2} dydz = \\ &= -4 \int_0^{2\pi} \int_0^2 e^{4-\rho^2} \rho d\rho d\theta = -8\pi \left[ -\frac{e^{4-\rho^2}}{2} \right]_0^2 = 4\pi(1 - e^4) \end{aligned}$$

Dove  $\int \int_{D_2} 6y^2z^3 - 4y^4z dydz = 0$ , perché la funzione è dispari in  $z$  su un insieme simmetrico rispetto all'asse delle  $z$ .

Mettendo tutto assieme

$$\int_{\Sigma} \langle F, \nu \rangle d\sigma = 16\pi + 4\pi(1 - e^4) = 20\pi - 4\pi e^4$$

## La sfida di Bastion (esercizi bonus)

Chiarito il malinteso con i calcamorte i nostri eroi sono accolti all'interno della capitale. Il piano è deciso: mentre i calcamorte raduneranno un esercito per combattere le forze di Bastion, i 7 eroi andranno a prendere una misteriosa spada tenuta dalle forze del Carosello, l'unica cosa che si dice riesca a ferire Bastione tutti coloro sotto il controllo dell'ambra. Riusciranno a convincere il carosello a cedere il prezioso cimelio? Forse sì, risolvendo questi esercizi.

(Questi sono esercizi bonus che potrebbero aiutarvi)

**Esercizio 11** (Area di curva polare). Sia  $\gamma$  una curva chiusa semplice e regolare di equazione polare  $\rho = f(\theta)$ ,  $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$  e  $f \in C^1([\theta_0, \theta_1])$ . Se  $\gamma$  è la frontiera di un dominio  $A$ , mostrare che

$$\text{area}(A) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

**Esercizio 12** (Integrale di Stokes). Si calcoli l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = z^2 dx + xyz dy + xz^2 dz$$

esteso al bordo  $+\partial D$  della superficie laterale  $D$  del cilindro circolare retto  $x^2 + y^2 = 1$  compreso tra il piano di equazione  $x + y/2 + z = 3$  col cilindro circolare retto  $x^2 + y^2 = 1$  e  $z=0$ .

**Esercizio 13** (Legge di Gauss). Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Uscente da una qualsiasi superficie chiusa  $A$  contenente all'interno l'origine.

## Suggerimenti

In (11):

**Van:** Guarda qua Einer, se la curva è in forma polare allora la curva parametrica è  $x(\theta) = f(\theta) \cos(\theta)$  e  $y(\theta) = f(\theta) \sin(\theta)$ ;

**Einer:** Già, a questo punto basta usare Gauss Green per trasformare l'integrale di area in uno curvilineo. Ahhh, che posto magnifico, devo documentare tutto nel diario;

In (12):

**Dasten:** L'esercizio è abbastanza standard, però conviene calcolarlo con Stokes l'integrale curvilineo giusto?;

**Lazarus:** Sì, tanto il cilindro si parametrizza facilmente con le cilindriche e  $\text{rot}F = (-xy, 0, yz)$  ... secondo te era antica questa statua che ho appena rotto?;

In (13):

**Aisen:** Sembra tosto, però osserviamo che in un dominio  $T$  che non contiene l'origine siccome  $\text{div}(F) = 0$  per il teorema della divergenza  $\int_{\partial T} F \cdot \nu d\Sigma = 0$ ;

**Sera:** Giusto, e quindi se osserviamo che  $A$  senza una palla interamente contenuta ha flusso nullo ho che, chiamata  $\Sigma$  la superficie di  $A$ ,

$$0 = \int_{\partial T} F \cdot \nu d\Sigma = \int_{\Sigma} F \cdot \nu d\Sigma - \int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\Sigma$$

Ehi Soma tutto bene?;

**Soma:** Sì questo posto è strano ... a quel punto basta calcolare l'integrale superficiale sulla palla interna che è semplice, tanto in  $\partial B_R(0)$  si ha  $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = R^3$ ;