"Going in one more round when you don't think you can. That's what makes all the difference in your life."

Robert "Rocky" Balboa from Rocky

Jacobiano e cambi di coordinate principali

Dato il cambio di coordinate che fa passare $(x, y, z) \to (u, v, w)$, ovvero:

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

Definiamo lo jacobiano del cambio di coordinate come la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{du}x(u, v, w) & \frac{d}{dv}x(u, v, w) & \frac{d}{dw}x(u, v, w) \\ \frac{d}{du}y(u, v, w) & \frac{d}{dv}y(u, v, w) & \frac{d}{dw}y(u, v, w) \\ \frac{d}{du}z(u, v, w) & \frac{d}{dv}z(u, v, w) & \frac{d}{dw}z(u, v, w) \end{pmatrix}$$

In due variabili ovviamente sarà una matrice 2×2.
I cambi di coordinate classici sono dati da:

- Sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \sin(\phi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases}$$

dove $\rho \in (0, \inf)$ è il raggio della sfera, $\theta \in [0, 2\pi]$ è l'angolo di longitudine (partendo, in senso antiorario, dall'asse positiva delle x), $\phi \in [0, \pi]$ è l'angolo di latitudine (partendo dal polo nord verso il polo sud).
Il determinante dello jacobiano è dato da

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \cos(\theta)\sin(\phi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\phi) & \rho\cos(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & \rho\cos(\theta)\sin(\phi) & \rho\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -\rho\sin(\phi) \end{vmatrix} \\ &= |\cos(\phi)(-\rho^2\sin^2(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi) - \rho^2\cos^2(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi)) \\ &- \rho\sin(\phi)(\rho\cos^2(\theta)\sin^2(\phi) + \rho\sin^2(\theta)\sin^2(\phi))| \\ &= |-\rho^2\cos^2(\phi)\sin(\phi) - \rho^2\sin^3(\phi)| \\ &= |-\rho^2\sin(\phi)| = \rho^2\sin(\phi) \end{aligned}$$

Perché il seno è positivo tra $(0, \pi)$.

- Ellittiche

$$\begin{cases} x = a\rho\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y = b\rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = c\rho\cos(\phi) \end{cases}$$

dove $\rho \in (0, \inf)$ è il raggio della sfera, $\theta \in [0, 2\pi]$ è l'angolo di longitudine (partendo, in senso antiorario, dall'asse positiva delle x), $\phi \in [0, \pi]$ è l'angolo di latitudine (partendo dal polo nord verso il polo sud) e a, b e c (positivi) sono le lunghezze dei semiassi rispettivamente di x,y e z.
Il determinante dello jacobiano è dato da

$$\begin{vmatrix} a\cos(\theta)\sin(\phi) & -a\rho\sin(\theta)\sin(\phi) & a\rho\cos(\theta)\cos(\phi) \\ b\sin(\theta)\sin(\phi) & b\rho\cos(\theta)\sin(\phi) & b\rho\sin(\theta)\cos(\phi) \\ c\cos(\phi) & 0 & -c\rho\sin(\phi) \end{vmatrix}$$
$$= |c\cos(\phi)(-ab\rho^2\sin^2(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi) - ab\rho^2\cos^2(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi))$$
$$- c\rho\sin(\phi)(ab\rho\cos^2(\theta)\sin^2(\phi) + ab\rho\sin^2(\theta)\sin^2(\phi))|$$
$$= | - abc\rho^2\cos^2(\phi)\sin(\phi) - abc\rho^2\sin^3(\phi)|$$
$$= | - abc\rho^2\sin(\phi)| = abc\rho^2\sin(\phi)$$

Perché il seno è positivo tra $(0, \pi)$. (E' proprio lo stesso della sfera però modificato dalle lunghezze dei semiassi).

-Cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

dove $\rho \in (0, \inf)$ è il raggio del cilindro, $\theta \in [0, 2\pi]$ è l'angolo di longitudine (partendo, in senso antiorario, dall'asse positiva delle x) e z è la quota.
Il determinante dello jacobiano è dato da

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= |\rho(\cos^2(\theta) + \rho\sin^2(\theta)| = |\rho| = \rho$$

INTEGRALI DOPPI

Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_A \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

con $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x^2+y^2 \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq x\}$. Osserviamo che il dominio è proprio uno "spicchio" di circonferenza, quindi posso passare alle coordinate polari del tipo $x = \rho\cos(t)$ e $y = \rho\sin(t)$ con $\rho \in [0, 1]$ e $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. da cui si ha (ricordando che lo jacobiano del cambiamento ha determinante ρ)

$$\int\int_A \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2\cos(t)\sin(t)}{\rho}\rho\,d\rho dt = \int_0^1 \rho^2\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(t)\sin(t)\,dt =$$
$$\frac{1}{3}\left[\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_A \frac{x+y}{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

con $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x^2+y^2 \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq x\}$. Osserviamo che il dominio è proprio uno "spicchio" di circonferenza, quindi posso passare alle coordinate polari del tipo $x = \rho\cos(t)$ e $y = \rho\sin(t)$ con $\rho \in [0, 1]$ e $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. da cui si ha (ricordando che lo jacobiano del cambiamento ha determinante ρ)

$$\int\int_A \frac{x+y}{1+x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho(\cos(t)+\sin(t))}{1+\rho^2}\rho\,d\rho dt = \int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(t)+\sin(t)\,dt =$$
$$\left(\int_0^1 1-\frac{1}{1+\rho^2}\,d\rho\right)\left[\sin(t)-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\rho-\arctan(\rho)\right]_0^1\cdot 1 = \left[1-\frac{\pi}{4}\right]$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_A xy\,dxdy$$

con $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\,,\, y \geq |x|\}$. Osserviamo che il dominio è proprio uno "spicchio" di ellisse (la parte superiore), quindi posso passare alle coordinate polari del tipo $x = \rho\cos(t)$ e $y = \frac{\rho}{2}\sin(t)$ con $\rho \in [0, 1]$ e $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. da cui si ha (ricordando che lo jacobiano del cambiamento ha determinante $\frac{\rho}{2}$)

$$\int\int_A xy\,dxdy = \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\rho^2\cos(t)\sin(t)}{2}\frac{\rho}{2}\,d\rho dt = \int_0^1 \frac{\rho^3}{4}\,d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(t)\sin(t)\,dt =$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)\left[\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right] = 0$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_A \cos(x)+y\,dxdy$$

con A il quadrilatero di veritici (0,0), (1,0), (1,1), (2,1). Osserviamo che il dominio può essere diviso in 2, rispettivamente $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in [0,1]\,,\, 0 \leq y \leq x\}$ e $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in [1,2]\,,\, x-1 \leq y \leq 1\}$. Cosicché si ha

$$\int\int_A \cos(x)+y\,dxdy = \int\int_{B_1} \cos(x)+y\,dxdy + \int\int_{B_2} \cos(x)+y\,dxdy$$

il primo resituisce

$$\int\int_{B_1} \cos(x)+y\,dxdy = \int_0^1\int_0^x \cos(x)+y\,dxdy = \int_0^1 \cos(x)x + \frac{x^2}{2}\,dx =$$

$$[x\sin(x)]_0^1 - \int_0^1 \sin(x)\,dx + \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \sin(1) + [\cos(1)-1] + \frac{1}{6}$$

dove è stata usata l'integrazione per parti per $\cos(x)x$. Il secondo ridà

$$\int\int_{B_2} \cos(x)+y\,dxdy = \int_1^2\int_1^{x-1} \cos(x)+y\,dxdy = \int_1^2 \cos(x)(2-x) + \left[\frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2}\right]dx =$$

$$2[\sin(x)]_1^2 - [x\sin(x)]_1^2 + [-\cos(x)]_1^2 + \frac{1}{2} - \left[\frac{(x-1)^3}{6}\right]_1^2 =$$

$$-2\sin(2) + \sin(1) + 2\sin(2) - 2\sin(1) + \cos(1) - \cos(2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

sommando tutto anche col primo rimane

$$2\cos(1) - \cos(2) - \frac{1}{2}$$

Esercizio 5. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_A 2xy\,dxdy$$

con $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x \leq 1\,,\, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1-x\}$. Sostituendo il dominio, normale per le x, si ha

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} 2xy\,dydx = \int_{-1}^{1}\frac{2x}{2}[(1-x)^2-(-\sqrt{1-x^2})^2]\,dx = \int_{-1}^{1}x[(1-x)^2-1+x^2]\,dx =$$

$$\int_{-1}^{1}x[2x^2-2x]\,dx = \int_{-1}^{1}2x^3-2x^2\,dx = \left[\frac{2x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{4}{3}$$

Esercizio 6. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_A x(y+1)\,dxdy$$

con $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid y \geq x^2+1\,,\, y \leq 3-|x|\}$. Per capire in che punti varia la x imponiamo l'uguaglianza delle due curve dapprima nel caso $x > 0$ e poi $x < 0$. Nel primo caso ho

$$\begin{aligned}
&3-x = x^2+1\\
&x^2+x-2 = 0\\
&x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}\\
&x = 1 \vee x = -2
\end{aligned}$$

Ovvero solo $x = 1$, nel secondo caso si osserva che si ottiene $x = -1$, allora ho

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2+1}^{3-|x|} x(y+1)\,dydx = \int_{-1}^{1}x\left[\frac{(y+1)^2}{2}\right]_{x^2+1}^{3-|x|}dx = \int_{-1}^{1}x\left[\frac{(4-|x|)^2}{2}-\frac{(x^2+2)^2}{2}\right]dx =$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{x(4+x)^2}{2}-\frac{x(x^2+2)^2}{2}\,dx + \int_{0}^{1}\frac{x(4-x)^2}{2}-\frac{x(x^2+2)^2}{2}\,dx =$$

il secondo restituisce

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1}x^3-8x^2+16x-x^5-4x^3-4x\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}-x^5-3x^3-8x^2+12x\,dx = C$$

chiamiamo il risultato di questo integrale C per non fare i calcoli, adesso infatti il primo

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}x^3+8x^2+16x-x^5-4x^3-4x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}-x^5-3x^3+8x^2+12x\,dx =$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{-1}-x^5-3x^3+8x^2+12x\,dx = -C$$

dove $-C$ perché abbiamo tutti i termini con potenze pari (quindi la valutazione in -1 coincide con quella in 1 a parte per $8x^2$ che però ha segno opposto). Quindi il risultato totale è 0, se non ci si crede fate i calcoli e si vede che va tutto a 0. Si poteva osservare anche dall'inizio che $x\left[\frac{(y+1)^2}{2}\right]_{x^2+1}^{3-|x|}$ è una funzione dispari, e su un intervallo simmetrico $[-1,1]$ da 0.

Osservazione 1. Osserviamo che l'integranda di $y+1$ è sia $\frac{(y+1)^2}{2}$ sia $\frac{y^2}{2}+y$ difatti osserviamo che queste differiscono solo di una costante (proprio il numero 1), pertanto se integriamo su due estremi, cioè

$$\int_a^b (y+1)dy = \left[\frac{(y+1)^2}{2}\right]_a^b = \frac{(b+1)^2}{2} - \frac{(a+1)^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2+2b+1-a^2-2a-1) =$$
$$= \frac{b^2}{2} + b - \frac{a^2}{2} - 2a$$
$$\int_a^b (y+1)dy = \left[\frac{y^2}{2}+y\right]_a^b = \frac{b^2}{2} + b - \frac{a^2}{2} - 2a$$

si osserva che il risultato è lo stesso (è questa la forza del teorema fondamentale del calcolo integrale).

Esercizio 7. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_A y(x^2+y^2)\,dxdy$$

con $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid 1 \le x^2+y^2 \le 36\,,\, x \ge y\sqrt{3} \ge 0\}$. Passiamo alle polari e vediamo dove varia l'angolo. Si osserva che siccome $0 \le y \le \frac{x}{\sqrt{3}}$, osserviamo che se $x = \rho\cos(\theta)$ e $y = \rho\sin(\theta)$ allora $0 \le \frac{y}{x} = \tan(\theta) \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ cioè $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$. Allora abbiamo

$$\int_1^6 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho\sin(\theta)\rho^2\rho\, d\rho d\theta = \int_1^6 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^4\sin(\theta)\, d\rho d\theta = \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^6 [\cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{6}} =$$
$$\left[\frac{6^5}{5} - \frac{1}{5}\right]\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1}{5}[6^5-1]\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Esercizio 8. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_A \frac{y}{1+xy}\,dxdy$$

con $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x \leq 1\,,\, 2 \leq y \leq 3\}$. Sostituiamo i valori nel dominio e abbiamo

$$\int_2^3 \int_1^2 \frac{y}{1+xy}\,dxdy = \int_2^3 [\ln(1+xy)]_1^2\,dy = \int_2^3 \ln(1+2y) - \ln(1+y)\,dy =$$
$$\left[\frac{(1+2y)\ln(1+2y) - (1+2y)}{2} - (1+y)\ln(1+y) + (1+y)\right]_2^3 =$$
$$\frac{(1+6)\ln(1+6) - (1+6)}{2} - (1+3)\ln(1+3) + (1+3) -$$
$$\left\{\frac{(1+4)\ln(1+4) - (1+4)}{2} - (1+2)\ln(1+2) + (1+2)\right\} =$$
$$\frac{7\ln(7) - 7}{2} - 4\ln(4) + 4 - \left(\frac{5\ln(5) - 5}{2}\right) + 3\ln(3) - 3$$

INTEGRALI TRIPLI

Esercizio 9. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A z^2\, dxdydz$$

con $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\,,\, z \geq 0\}$. Osserviamo che il dominio è proprio uno "spicchio" di sfera, quindi posso passare alle coordinate polari del tipo $x = \rho \sin(\phi)\cos(t)$, $y = \rho \sin(\phi)\sin(t)$ e $z = \rho\cos(\phi)$ con $\rho \in [0, 1]$ e $t \in [0, 2\pi]$. Da cui si ha (ricordando che lo jacobiano del cambiamento ha determinante $\rho^2 \sin(\phi)$).

$$\begin{aligned}
\int\int\int_A z^2\, dxdydz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\cos^2(\phi)\rho^2\sin(\phi)\, d\rho dt d\phi \\
=&2\pi \int_0^1 \rho^4\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\phi)\sin(\phi)\, d\phi = 2\pi \int_0^1 \rho^4\, d\rho \left[-\frac{\cos^3(\phi)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
=&2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}\pi
\end{aligned}$$

Esercizio 10. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A \cos(z)\, dxdydz$$

con $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, ;\, x + y + z \leq \pi\}$. Osserviamo che possiamo integrare per segmenti, nel quale si ha $0 \leq z \leq \pi - x - y$ e l'insieme $A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi]\,,\, y \in [0, \pi - x]\}$. Cosicché si ha

$$\int\int_{A_0}\left(\int_0^{\pi-x-y} \cos(z)\, dz\right)dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi-x} [\sin(\pi - x - y) - 0]\, dydx =$$

$$\int_0^{\pi} [\cos(\pi - x - y)]_0^{\pi-x}\, dx = \int_0^{\pi} \cos(0) - \cos(\pi - x)\, dx = \pi + [\sin(\pi - x)]_0^{\pi} = \pi$$

Esercizio 11. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A dxdydz$$

con A il dominio delimitato dal piano $z = 0$, $x + y = 0$ e l'ellissoide $z = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2$. Osserviamo che il dominio è integrabile per segmenti con $z \in [0, 1 - \frac{x^2}{4} - y^2]$ mentre il dominio A_0 proprio uno "spicchio" di ellisse, quindi posso passare alle coordinate polari del tipo $x = 2\rho\cos(t)$ e $y = \rho\sin(t)$

con $\rho \in [0,1]$ e $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. da cui si ha (ricordando che lo jacobiano del cambiamento ha determinante 2ρ)

$$\int\int_{A_0} \left(\int_0^{1-\frac{x^2}{4}-y^2} dz \right) dxdy = \int\int_{A_0} 1 - \frac{x^2}{4} - y^2 \, dxdy = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1-\rho^2) 2\rho \, d\rho dt =$$
$$\pi \int_0^1 2\rho - 2\rho^3 \, d\rho = \pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{2} \right]_0^1 = \pi \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 12. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A dxdydz$$

con $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 9\,,\, -x \leq y \leq x\sqrt{3}\}$. Osserviamo che il dominio è integrabile per strati, con $z \in [0,9]$ e il dominio $A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \in [0, \sqrt{z}]\,,\, \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]\}$ dove siamo passati alle polari con spicchi di circonferenze di raggio $\sqrt{z}$ e l'angolo si è trovato facendo $-\rho\cos(\theta) \leq \rho\sin(\theta) \leq \rho\cos(\theta)\sqrt{3}$ e dunque $-1 \leq \tan(\theta) \leq \sqrt{3}$ che risolta restituisce l'angolo visto sopra. Cosicché si ha

$$\int_0^9 \left(\int\int_{A_z} \rho \, d\rho d\theta \right) dz = \int_0^9 \left(\int_0^{\sqrt{z}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \rho \, d\rho d\theta \right) dz = \frac{7\pi}{12} \int_0^9 \frac{z}{2} \, dz =$$
$$\frac{7\pi}{12} \left[\frac{z^2}{4} \right]_0^9 = \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{81}{4}$$

Esercizio 13. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A x^2 + y^2 \, dxdydz$$

con A il solido racchiuso nel cilindro $x^2 + y^2 = 1$, nel piano $z = 3$ e nel paraboloide ellittico $z = 1 - x^2 - y^2$. Possiamo integrare per segmenti facendo variare $z \in [1-x^2-y^2, 3]$ e considerando $A_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ dove si possono usare le polari (quindi in $\mathbb{R}^3$ le coordinate cilindriche $x = \rho\cos(t)$, $y = \rho\sin(t)$,$z = z$ per $\rho \in [0,1]$, $t \in [0, 2\pi]$). Allora si ha

$$\int\int_{A_0} \left(\int_{1-x^2-y^2}^3 x^2 + y^2 \, dz \right) dydx = \int\int_{A_0} (x^2+y^2)(3 - 1 + x^2 + y^2) \, dyd =$$
$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 (2 + \rho^2) \rho \, d\rho dt = 2\pi \int_0^1 2\rho^3 + \rho^5 \, d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{2} + \frac{\rho^6}{6} \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right] = \frac{4\pi}{3}$$

Esercizio 14. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A dxdydz$$

con $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ x^2 + y^2 + z^2 - z \leq 0\}$. Osserviamo che il dominio è l'intersezione tra il cono circolare retto con vertice l'origine e la sfera centrata in $(0, 0, \frac{1}{2})$ di raggio $\frac{1}{2}$. Pertanto si può dividere il dominio in 2 (la parte del cono e quella della sfera) e integrarle separatamente. Per capire quando il cilindro tocca la sfera imponiamo la condizione

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = z \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} &2z^2 = z \\ &z(2z - 1) = 0 \\ &z = 0 \vee z = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

pertanto ragioniamo prima per $z \in [0, \frac{1}{2}]$ per strati e poi per $z \in [\frac{1}{2}, 1]$ in coordinate sferiche. Primo caso abbiamo $A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq z^2\}$ in cui usiamo le polari in $\mathbb{R}^2$, da cui

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int\int_{A_z} dydx \right) dz = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^z \int_0^{2\pi} \rho\, dtd\rho dz = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^z dz =$$
$$2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z^2}{2}\, dz = \pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{24}$$

il secondo caso invece

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin(\phi)\, d\theta d\rho d\phi = 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} [-\cos(\phi)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \cdot \frac{1}{24} = \frac{\pi}{12}$$

pertanto il risultato finale è $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{24} = \frac{\pi}{8}$.

Esercizio 15. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A e^y \sqrt{x^2 - z^2}\, dxdydz$$

con $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq x\, ,\, 0 \leq x \leq 1\, ,\, 0 \leq y \leq x^3\}$. Possiamo integrare per segmenti con $z \in [0,x]$ e $A_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x \leq 1\, ,\, 0 \leq y \leq x^3\}$. Perciò si ha

$$\int\int_{A_0} e^y \left(\int_0^x \sqrt{x^2 - z^2}\, dz\right) dxdy$$

Per risolvere il primo integrale usiamo la classica trasfromazione $z = x\sin(t)$ e dunque $dz = x\cos(t)dt$. Ora se $z = x$ allora $\sin(t) = 1$ da cui $t = \frac{\pi}{2}$, mentre se $z = 0$ banalmente $t = 0$. Allora (ricordando che sia x che $\cos(t)$ sono positivi in questi domini)

$$\int\int_{A_0} e^y \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x^2(1-\sin^2(t))}x\cos(t)\, dt\right) dxdy = \int\int_{A_0} e^y \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2(t)\, dt\right) dxdy =$$
$$\int\int_{A_0} e^y x^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dxdy = \frac{\pi}{4}\int\int_{A_0} e^y x^2\, dxdy = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2 \left(\int_0^{x^3} e^y\, dy\right) dx =$$
$$\frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2(e^{x^3} - 1)\, dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{e-2}{3}\right) = \frac{\pi(e-2)}{12}$$

Esercizio 16. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int\int\int_A 1\, dxdy$$

con $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^n \mid x^2 + y^2 \leq 3\, ,\, 9 - x^2 - y^2 \geq z \geq \frac{9-x^2-y^2}{3}\}$. Integriamo per segmenti passando alle cilindriche cosi da avere $A_0 = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \mid \rho \in [0,\sqrt{3}]\, ,\, \theta \in [0,2\pi]\}$. Allora l'integrale sarebbe

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{\frac{9-\rho^2}{3}}^{9-\rho^2} \rho\, dzd\rho d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2(9-\rho^2)}{3}\rho\, d\rho = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\sqrt{3}} 9\rho - \rho^3\, d\rho =$$
$$= \frac{4\pi}{3}\left[\frac{9\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3}\left[\frac{27}{2} - \frac{9}{4}\right]$$

Coniche e quadriche solite

Nel piano valgono le seguenti formule:

-Parabola di vertice (b,c) : $y = (x-b)^2 + c$;

-Circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio R: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$;

-Ellisse di centro (x_0, y_0) e lunghezza dei semiassi (a, b): $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$;

-Iperbole equilatera (quella generale è troppo complessa): $y = \frac{1}{x}$;

Nello spazio valgono le seguenti formule:

-Cilindro con sezioni di centro (x_0, y_0) e raggio R,parallelo all'asse delle z: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$;

-Paraboloide di vertice (x_0, y_0, z_0), rivolto verso l'alto: $z = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0$;

-Cono ad una faglia di vetice (x_0, y_0, z_0), rivolto verso l'alto, parallelo all'asse z: $z = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + z_0$;

-Cono a due faglie di vetice (x_0, y_0, z_0), parallelo all'asse z: $(z - z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$;

-Sfera di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio R: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$;

-Ellissoide di centro (x_0, y_0, z_0) e lunghezza dei semiassi (a, b, c): $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$;

La sfida di Bastion (esercizi bonus)

Dopo la feroce battaglia contro William, oramai sconfitto ed imprigionato, i nostri eroi continuano la ricerca di Bastion cercando di risolvere i seguenti indizi. A fine pagina i soliti compagni vi daranno suggerimenti.

(Questi sono alcuni esercizi bonus particolari che potrebbero aiutarvi)

Esercizio 17 (Integrale doppio)**.**

$$\int\int_A \cos(x+y)\, dxdy$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid y \geq 0,\, 0 \leq x \leq 2\,,\, y - x \leq 0\,,\, x + y \leq 2\}$.

Esercizio 18 (La torta della principessa)**.**

$$\int\int\int_E \sqrt{y^2+z^2}\, dxdydz$$

dove E è la regione delimitata da

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 9 \\ x = 0 \\ y = 3x \end{cases}$$

nel primo ottile (cioe per $x > 0$, $y > 0$, e $z > 0$).

Suggerimenti

In (17):
Einer: In questo caso non penso convenga ragionare con un dominio normale rispetto alle x;
Dasten: Concordo, probabilmente conviene ragionare sulle due rette date, magari disegnandole e trovando il dominio;
Soma: Esattamente. In questo modo, ricordando che $0 \leq x \leq 2$, si riesce a trovare dove varia anche la y e a riscrivere il dominio normale;

Lazarus: Guarda il dominio, sembra davvero una fetta di torta!;
Van: Dopo Pozzoprofondo ne vorrei davvero una... Comunque integrare per segmenti su x mi sembra la strategia migliore;
Sera: Si, tanto poi (y, z) sono fissi nel cer... ma cosa è quella cosa che vola?