"Imagine a future version of you who's freely surpassed your limits."
Aoi Todo from Jujutsu Kaisen

SERIE NUMERICHE

Serie telescopiche

Le serie telescopiche sono quelle che possiamo riscrivere nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1}$, sono poco usuali e spesso si presentano sotto forma di rapporto di polinomi classico. La convergenza è garantita è possiamo anche ricavare la somma esplicita della serie. Per trovare il termine generico b_n cerchiamo di scrivere il denominatore come un prodotto di polinomi e poi vediamo se separando i due termini riusciamo ad ottenere la serie di partenza.

Esercizio 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n^2+2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Ma adesso preso $b_n = \frac{1}{n^2}$ otteniamo che la serie è telescopica, possiamo allora calcolare la somma della serie come $b_1 - l$, dove $l = \lim_{n\to\infty} b_n$. Pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2} = \frac{1}{1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - 0 = 1$$

Esercizio 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$$

Ora scelto $b_n = \frac{1}{2n+1}$ osserviamo che abbiamo una serie telescopica, ma allora come sopra la somma sarà data da $b_1 - l$, cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3} = \frac{1}{2\cdot 1+1} - 0 = \frac{1}{3}$$

Serie a termini costanti

I 3 metodi principali per risolvere le serie a termini costanti sono: metodo del rapporto, metodo della radice, metodo del confronto (anche asintotico). Più raramente si può utilizzare anche il metodo di condensazione.

Esercizio 3 (Confronto e confronto asintotico).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$$

Per risolvere questo problema usiamo il confronto asintotico, consideriamo la serie ausiliaria b_n a termini $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}n}$ in questo modo si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

Dove è stato usato il limite notevole del seno (nota bene che se $n \to \infty$ allora $\frac{1}{n} \to 0$). Siccome poi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}n}$ converge, si tratta della serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$, e il limite del rapporto non è infinito, per il criterio del confronto asintotico la serie di partenza converge.

Un'altro metodo è quello di osservare la disuguaglianza $\sin x \leq x$ valida $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, quindi anche per $\frac{1}{n}$ essendo questo minore o uguale a 1 $\forall n \in \mathbb{N}$. Da qua otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

La seconda converge come sopra e quindi la serie di partenza converge per criterio del confronto semplice.

Esercizio 4 (Condizione necessaria, confronto asintotico e rapporto).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \sin \frac{1}{2^n}$$

Per risolvere questo esercizio ci si può subito rendere conto che la condizione necessaria di convergenza non è rispettata, ovvero $a_n \to 0$ per $n \to \infty$. Infatti

$$\lim_{n\to\infty} 4^n \sin \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{\sin \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

dove è stato usato il limite notevole del seno, pertanto la serie è divergente.

Si potrebbe usare anche il criterio del confronto asintotico ponendo $b_n = n^2$ e osservando che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 1$$

Siccome, ovviamente, la serie dei b_n diverge e il limite del rapporto è maggiore di zero, la serie di partenza diverge.

Infine si potrebbe anche andare "di faccia" e provare un criterio, consiglio quello del rapporto in quanto si semplificano gli esponenti (in realtà va benissimo anche quello della radice). In questo caso scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4\frac{\sin\frac{1}{2^{n+1}}}{\sin\frac{1}{2^n}}$$

Forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, usiamo de l'Hopital (ATTENZIONE, ricorda che $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ dove $\ln a$ è il logaritmo naturale!!!)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{2^{n+1}} \cdot -\frac{1}{2^{n+1}} \cdot \log 2}{\cos\frac{1}{2^n} \cdot -\frac{1}{2^n} \cdot \log 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{2^{n+1}}}{\cos\frac{1}{2^n}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ricordandosi del 4 di prima otteniamo che il limite del rapporto è $2 > 1$ quindi la serie diverge.

Esercizio 5 (Criterio della radice)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\sqrt{n}-n}$$

Applichiamo il criterio della radice per studiare l'eventuale convergenza, ovvero scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{\sqrt{n}-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^{\sqrt{n}}}}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{\sqrt{n}}{n}}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{2} = \frac{1}{2}$$

dove sono state usate le usuali proprietà delle potenze ($(x^a)^b = x^{a\cdot b}$) e il fatto che $\sqrt[a]{x} = x^{\frac{1}{a}}$. Siccome adesso il limite è minore di 1, la serie converge.

Serie a termini alterni

Il metodo principale per risolvere questo tipo di serie è il metodo di Leibnitz. Alcune volte può essere necessario dimostrare l'assoluta convergenza della serie.

Esercizio 6 (Lebnitz).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \sin \frac{1}{n}$$

Questa è una serie a termini alterni mascherata, infatti $\cos n\pi = (-1)^n$, proviamo ad applicare Leibniz allora. Ovviamente $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$. Vogliamo però mostrare che $\sin \frac{1}{n}$ decresce. Risulta semplice facendo la derivata notando che il coseno è positivo per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, cosicché

$$\left[\sin \frac{1}{n}\right]' = \cos \frac{1}{n} \cdot \frac{-1}{n^2} \leq 0$$

La disuguaglianza vale perché, ripetiamo, $\cos \frac{1}{n}$ è positivo $\forall n \in \mathbb{N}$ così come $\frac{1}{n^2}$, quindi col meno diventa negativo. La derivata risulta negativa ovvero la funziona è non crescente (in realtà la disuguaglianza è stretta e la funzione è decrescente). Pertanto possiamo applicare Leibniz e la serie è convergente.

Esercizio 7 (Lebnitz).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin n}$$

Questa è una serie a termini alterni, proviamo ad applicare Leibniz. Anche qui, semplicemente, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sin n} = 0$. Vediamo se la il termine generico decresce a 0. Facciamo ancora la derivata:

$$\left[\frac{1}{n + \sin n}\right]' = \frac{-(1 + \cos n)}{(n + \sin n)^2} \leq 0$$

dove è stata sfruttata la classica $-\cos n \leq 1$ per ottenere l'annullamento del numeratore. Quindi anche in questo caso Leibniz è applicabile e la serie è convergente.

SERIE DI FUNZIONI

Le serie di funzioni sono l'estensione diretta delle serie classiche. Anche in questo caso il termine generico è una funzione $f_n(x)$ della quale studiamo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. La somma parziale è denotata con $S_k(x)$ mentre la funzione somma $S(x)$. Diremo che una serie converge (puntualmente/uniformemente) se la successione (di funzioni) delle serie parziali converge (puntualmente/uniformemente) alla funzione somma. Oltre a queste due convergenze esiste la convergenza totale, che si ottiene se esiste $M_n \geq f_n(x)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\forall\, x \in I$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge. Spesso per trovare M_n si considera $M_n = \sup_{x\in I}|f_n(x)|$ (Piccola chicca, questo viene detto anche *criterio di Weierstrass*).

Esercizio 8 (Convergenza puntuale e totale in [a,b)**.**]

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln{(1+x)}}{n^3} \qquad \forall\, x > -1$$

Osserviamo che la convergenza puntuale è data $\forall\, x > -1$ in quanto, fissato x, $\ln{(1+x)}$ è un numero moltiplicato per la serie armonica generalizzata (che sappiamo benissimo convergere) quindi ho la convergenza. Studiamo la convergenza uniforme (in realtà la totale direttamente). Dovremo considerare

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x>-1} |S_k(x) - S(x)|$$

e vedere se da 0.

Notiamo che essendo il logaritmo una funziona illimitata e crescente, il sup è agli estremi. Per $x \to -1^+$ e per $x \to \infty$ si ha

$$\lim_{x\to -1^+} |\ln{(1+x)}| = \lim_{x\to\infty} |\ln{(1+x)}| = \infty$$

Pertanto non si ha la convergenza uniforme su $\{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$. Tuttavia sia, come prima, l'intervallo $[a, b]$, con $-1 < a < b < \infty$. Adesso

$$\sup_{x\in[a,b]} \ln{(1+x)} = \max_{x\in[a,b]} \ln{(1+x)} = \max\{\ln(1+a), ln(1+b)\}$$

ma allora posso considerare (supposto $\ln(1+a) > \ln(1+b)$

$$M_n = \frac{\ln(1+a)}{n^3} \geq \frac{\ln(1+x)}{n^3}$$

Ma dunque siccome la serie degli M_n converge (è nuovamente la serie armonica generalizzata moltiplicata per una costante) ho la convergenza totale e quindi uniforme su tutti gli intervalli $[a, b]$, con $-1 < a < b < \infty$.

Esercizio 9 (Convergenza puntuale e totale in (-inf, a)**.**]

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}$$

In questo caso la convergenza della serie per x fissato non viene "ad occhio", quindi applichiamo un criterio (qualsiasi va bene io faccio rapporto).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{(n+1)x}}{n+1}\frac{n}{e^{nx}} = \lim_{n\to\infty} e^x \frac{n}{n+1} = e^x$$

Imponiamo la condizione di convergenza $e^x < 1$ e si ottiene dunque la convergenza puntuale per $x < 0$, la divergenza per $x > 0$ e se sostituiamo $x = 0$ si vede che abbiamo la serie armonica classica, che siccome diverge mi da in generale divergenza per $x \geq 0$. Studiamo la convergenza uniforme (NOTA BENE: questa può essere solo in $(-\infty, 0)$, perchè se per assurdo fosse in un intervallo maggiore di 0 allora avrei anche la convergenza puntuale, assurdo perché sopra abbiamo mostrato la divergenza).

Osserviamo allora che, essendo l'esponenziale negativo crescente e limitato tra 0 e 1,

$$\sup_{x\in(-\infty,0)} \left|\frac{e^{nx}}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

In questo caso questo maggiorante non ci va bene, perché la serie armonica diverge. Allora restringiamo l'intervallo a $(-\infty, a]$ per $a < 0$. Dunque

$$\sup_{x\in(-\infty,a]} \left|\frac{e^{nx}}{n}\right| = \frac{e^{an}}{n}$$

Questa serie converge, infatti con un criterio della radice semplice

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{an}}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^a < 1$$

dove l'ultima disuguaglianza vale perché $a < 0$. Allora consideriamo $M_n = \frac{e^{an}}{n}$ che maggiora $f_n(x)$ e converge, dunque abbiamo la convergenza totale su $(-\infty, a]$ per $a < 0$.

Esercizio 10 (Convergenza puntuale e totale in $\mathbb{R}$)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 3n^4}$$

Osserviamo che la convergenza puntuale vale $\forall x \in \mathbb{R}$ con una semplice maggiorazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 3n^4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{x^4 + 3n^4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{3n^4}$$

dove l'ultima serie converge perché è l'armonica generalizzata per una costante. Osserviamo che questa serie è talmente bella da essere convergente anche totalmente in $\mathbb{R}$, infatti si osserva facendo la derivata che i punti di estremo sono dati da $-n$ ed n (la funzione a piu e meno infinito tende a 0). Allora considero

$$f_n(x) = \left| \frac{x}{x^4 + 3n^4} \right| \leq \frac{n}{n^4 + 3n^4} = \frac{1}{4n^3} = M_n$$

Dunque siccome la serie M_n converge ho convergenza totale $\forall x \in \mathbb{R}$.

La sfida di Bastion (esercizi bonus)

Bastion è un temibile avversario, ex-capitano di una nave pirata, nonché feroce combattente, ed è venuto a sfidarvi con degli esercizi particolarmente ostici. Nel caso troviate difficoltà alcuni compagni vi aiuteranno con suggerimenti a fondo pagina.

(Questi sono alcuni esercizi bonus particolari che potrebbero aiutarvi)

Esercizio 11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right]$$

Esercizio 12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n^2 + 1}{n \ln n^2 + n^2 \ln n}$$

Esercizio 13.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Esercizio 14 (Studiare convergenza semplice ed assoluta, coincidono?)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} + (-1)^n \frac{1}{n}$$

Suggerimenti

In (11):
Lazarus: Secondo me si potrebbe risolvere usando le proprietà dei logaritmi e poi applicando un confronto asintotico;
Soma: Si certo, ma esiste anche un modo più veloce, magari usando due volte il confronto asintotico separatamente ...;

In (12) e (13):
Van: Sembra che le nostre armi usuali non funzionino bene ...;
Einer: Qua bisogna usare qualcuno dei nostri trucchi più subdoli, magari il metodo di condensazione;

In (14):
Aisen: Beh mi sembra che questa converga abbastanza facilmente usando confronto e Leibnitz;
Dasten: Si, ma per la convergenza assoluta? Magari possiamo usare qualche disuguaglianza nota ...;
Sera: Ma si certo, e poi un bel criterio del confronto con una serie divergente!;