

*"Hear the crowd on their toes, ready for me to start the show
 Out the curtain, lights go up, i'm home, WHOOOOOOA"
 Cody Rhodes "The American Nightmare" entrance theme*

INTEGRALI CURVILINEI E DI FORMA

INTEGRALI CURVILINEI

Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} y^2 ds$$

con γ la curva di parametrizzazione $r(t) = (t \cos(t) - \sin(t), t \sin(t) + \cos(t))$
 con $t \in [0, \pi]$. Osserviamo che il vettore tangente è dato da

$$Dr(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(\cos(t) - t \sin(t) - \cos(t))^2 + (\sin(t) + t \cos(t) - \sin(t))^2} = \sqrt{t^2}$$

dove avendo t positiva, questo è semplicemente $Dr(t) = \sqrt{t^2} = t$. Pertanto si tratta di studiare l'integrale

$$\int_{\gamma} y^2 ds = \int_0^{\pi} (t \sin(t) + \cos(t))^2 t dt = \int_0^{\pi} t^3 \sin^2(t) + t \cos^2(t) + 2t^2 \sin(t) \cos(t) dt$$

Usiamo le formule trigonometriche per ottenere

$$\sin^2(t) = \left(\frac{1 - \cos(2t)}{2} \right) \quad \cos^2(t) = \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) \quad \sin(t) \cos(t) = \left(\frac{\sin(2t)}{2} \right)$$

a questo punto l'integrale sopra si trasforma in

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} t^3 \left(\frac{1 - \cos(2t)}{2} \right) + t \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) + 2t^2 \left(\frac{\sin(2t)}{2} \right) dt = \\ & \int_0^{\pi} \frac{t^3}{2} + \frac{t}{2} - \frac{t^3 \cos(2t)}{2} + \frac{t \cos(2t)}{2} + t^2 \sin(2t) dt = \\ & \frac{\pi^4}{8} + \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2 + I_3 \end{aligned}$$

dove

$$I_1 = \int_0^{\pi} t^3 \cos(2t) dt \quad I_2 = \int_0^{\pi} t \cos(2t) dt \quad I_3 = \int_0^{\pi} t^2 \sin(2t) dt$$

Adesso vediamo I_1 integrato per parti

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t^3 \cos(2t) dt &= \left[\frac{t^3 \sin(2t)}{2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{3t^2 \sin(2t)}{2} dt = - \int_0^\pi \frac{3t^2 \sin(2t)}{2} dt = \\ &= \left[\frac{3t^2 \cos(2t)}{4} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{6t \sin(2t)}{4} dt = \frac{3\pi^2}{4} - \left\{ \left[\frac{6t \sin(2t)}{8} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{6 \sin(2t)}{8} dt \right\} = \\ &= \frac{3\pi^2}{4} + \int_0^\pi \frac{6 \sin(2t)}{8} dt = \frac{3\pi^2}{4} + \left[-\frac{6 \cos(2t)}{16} \right]_0^\pi = \frac{3\pi^2}{4} \end{aligned}$$

Allo stesso modo I_2 sarà

$$\int_0^\pi t \cos(2t) dt = \left[-t \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin(2t)}{2} dt = \left[-\frac{\cos(2t)}{4} \right]_0^\pi = 0$$

ed infine I_3

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t^2 \sin(2t) dt &= \left[-\frac{t^2 \cos(2t)}{2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{2t \cos(2t)}{2} dt = -\frac{\pi^2}{2} + \left\{ \left[\frac{t \sin(2t)}{2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(2t)}{2} dt \right\} = \\ &= -\frac{\pi^2}{2} + \left[\frac{\cos(2t)}{4} \right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

così, sommando tutto quanto, si ottiene

$$\frac{\pi^4}{8} + \frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi^2}{8} + 0 - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^4}{8} - \frac{5\pi^2}{8}$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{y-1}{x} ds$$

con γ la curva di parametrizzazione $r(t) = (2+\cos(t), 1+\sin(t))$ con $t \in [0, \pi]$. Osserviamo che il vettore tangente è dato da

$$Dr(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = \sqrt{1}$$

Pertanto si tratta di studiare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{y-1}{x} ds = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{2+\cos(t)} dt = [-\ln(2+\cos(t))]_0^\pi = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3)$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2} ds$$

con γ la curva di parametrizzazione $r(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Osserviamo che il vettore tangente è dato da

$$Dr(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(e^t \cos(t) - e^t \sin(t))^2 + (e^t \sin(t) + e^t \cos(t))^2} = \sqrt{e^{2t}} = e^t$$

Pertanto si tratta di studiare l'integrale

$$\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_0^{2\pi} e^t \cdot e^t dt = \int_0^{2\pi} e^{2t} dt = \left[\frac{e^{2t}}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{4\pi}}{2} - \frac{1}{2}$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} (x-2)(y-1) + 1 ds$$

con γ la curva di parametrizzazione $r(t) = (2 + 2 \cos(t), 1 + 2 \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Osserviamo che il vettore tangente è dato da

$$Dr(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(-2 \sin(t))^2 + (2 \cos(t))^2} = \sqrt{4} = 2$$

Pertanto si tratta di studiare l'integrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x-2)(y-1) + 1 ds &= \int_0^{2\pi} [4 \cos(t) \sin(t) + 1] \cdot 2 dt = \int_0^{2\pi} 2 + 8 \cos(t) \sin(t) dt = \\ &= 4\pi + \left[\frac{8 \sin^2(t)}{2} \right]_0^{2\pi} = 4\pi \end{aligned}$$

Esercizio 5. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} xy^2 ds$$

con γ è l'arco di circonferenza con centro l'origine, raggio 2 che congiunge $(2,0)$ e $(1, \sqrt{3})$. Questa curva si parametrizza con $r(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$ con $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$. Osserviamo che il vettore tangente è dato da

$$Dr(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(-2 \sin(t))^2 + (2 \cos(t))^2} = \sqrt{4} = 2$$

Pertanto si tratta di studiare l'integrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xy^2 ds &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \cos(t) \sin^2(t) \cdot 2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 8 \cos(t) \sin^2(t) dt = \\ &= 8 \left[\frac{\sin^3(t)}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8}{3} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right] = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Esercizio 6. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} ds$$

con γ è la curva parametrizzata con $r(t) = (2 \cos^3(t), 2 \sin^3(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Osserviamo che il vettore tangente è dato da

$$\begin{aligned} Dr(t) &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(-6 \cos^2(t) \sin(t))^2 + (2 \sin^2(t) \cos(t))^2} = \\ &= \sqrt{36 \cos^2(t) \sin^2(t) (\cos^2(t) + \sin^2(t))} = 6 \sqrt{\cos^2(t) \sin^2(t)} \end{aligned}$$

Pertanto si tratta di studiare l'integrale

$$\int_{\gamma} ds = \int_0^{2\pi} 6 |\cos(t) \sin(t)| dt$$

Adesso ricordiamo che $\cos(t) \sin(t) > 0$ in $t \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ mentre $\cos(t) \sin(t) < 0$ in $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, allora abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\cos(t) \sin(t)| dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(t) dt + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(t) \sin(t) dt - \\ &- \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t) \sin(t) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(t) \sin(t) dt = \\ &= \left[\frac{\sin^2(t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin^2(t)}{2} \right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} - \left[\frac{\sin^2(t)}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \left[\frac{\sin^2(t)}{2} \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\} = 2 \end{aligned}$$

pertanto alla fine il risultato è $6 \cdot 2 = 12$.

Esercizio 7. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds$$

con γ è la curva parametrizzata con $r(t) = (t \cos(t), t \sin(t))$ con $t \in [0, \pi]$. Osserviamo che il vettore tangente è dato da

$$\begin{aligned} Dr(t) &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(\cos(t) - t \sin(t))^2 + (\sin(t) + t \cos(t))^2} = \\ &= \sqrt{\cos^2(t) + t^2 \sin^2(t) + \sin^2(t) + t^2 \cos^2(t)} = \sqrt{1 + t^2} \end{aligned}$$

Pertanto si tratta di studiare, ricordando che t è positiva, l'integrale

$$\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_0^{\pi} \sqrt{t^2 \cos^2(t) + t^2 \sin^2(t)} \sqrt{1 + t^2} dt = \int_0^{\pi} t \sqrt{1 + t^2} dt = \left[\frac{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{3} ((1 + \pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1)$$

Esercizio 8. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} 3\sqrt{2}xyz^2 ds$$

con γ è la curva parametrizzata con $r(t) = (\frac{t^3}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, t)$ con $t \in [0, 1]$. Osserviamo che il vettore tangente è dato da

$$Dr(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{(t^2)^2 + (\sqrt{2}t)^2 + 1^2} = \sqrt{(t^2 + 1)^2} = t^2 + 1$$

Pertanto si tratta di studiare l'integrale

$$\int_{\gamma} 3\sqrt{2}xyz^2 ds = \int_0^1 t^7(t^2 + 1) dt = \int_0^1 t^9 + t^7 dt = \left[\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{8} = \frac{9}{40}$$

Esercizio 9. Calcolare il seguente integrale curvilineo di seconda specie

$$\int_{\gamma} F \cdot dP$$

per

$$F(x, y, z) = \frac{(2x, 1, 4z)}{x^2 + y + 2z^2 + 1} \quad \text{e} \quad \gamma(t) = (t, t^3, t^2), \quad t \in [0, 2]$$

Andiamo a considerare in questo caso $\gamma'(t) = (1, 3t^2, 2t)$, allora il mio integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_0^2 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt &= \int_0^2 \frac{(2t, 1, 4t^2)}{t^2 + t^3 + 2t^4 + 1} \cdot (1, 3t^2, 2t) \\ &= \int_0^2 \frac{2t + 3t^2 + 8t^3}{t^2 + t^3 + 2t^4 + 1} dt = \left[\ln(t^2 + t^3 + 2t^4 + 1) \right]_0^2 = \ln(45) \end{aligned}$$

Esercizio 10. Calcolare il seguente integrale curvilineo di seconda specie

$$\int_{\gamma} F \cdot dP$$

per

$$F(x, y, z) = (y, z, x) \quad \text{e} \quad \gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), b), \quad t \in [0, 2\pi], a, b > 0$$

Andiamo a considerare in questo caso $\gamma'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), 0)$, allora il mio integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt &= \int_0^{2\pi} (a \sin(t), b, a \cos(t)) \cdot (-a \sin(t), a \cos(t), 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -a^2 \sin^2(t) + ab \cos(t) dt = \left[-a^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) + ab \sin(t) \right]_0^{2\pi} \\ &= -a^2(\pi) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che

$$\begin{aligned} \int \sin^2(t) dt &= \int \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \\ \sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) &= 1 - \cos(2t) - \sin^2(t) \Rightarrow \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \end{aligned}$$

INTEGRALI DI FORMA

La semplice connessione è una **fortissima** proprietà topologica. Ricordiamo che (intuitivamente), un insieme è semplicemente connesso se non ha "buchi", ovvero se, posizionando una circonferenza in un qualsiasi modo nell'insieme, è possibile farla raggruppare in un punto senza mai uscire dall'insieme. Ad esempio \mathbb{R}^N , $\forall N \geq 2$, sono semplicemente connessi, ma $\mathbb{R}^2 \setminus (x_0, y_0)$ non è semplicemente connesso per nessun punto (x_0, y_0) (basta prendere una circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio qualsiasi, non si può deformare senza toccare il centro). Tuttavia, $\mathbb{R}^3 \setminus (x_0, y_0, z_0)$ è semplicemente connesso (la circonferenza si può far passare "sotto" o "sopra" al punto). Per curiosità, l'unica varietà differenziabile 3-dimensionale, semplicemente connessa e compatta è la sfera, è stato uno dei 7 problemi del millennio di Hilbert, risolto nel 2002 dalla medaglia Fields russa Grigori Perelmann.

Inoltre ricordiamo che una forma $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ è chiusa se il suo rotore è nullo, ovvero

$$\text{Rot}\omega = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}, \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) = (0, 0, 0)$$

dove $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sono i versori dei 3 assi principali.

Esercizio 11. Dire se la forma $\omega = (z^2 + y) dx + z dy + y dz$ è chiusa in \mathbb{R}^3 e calcolare il seguente integrale di forma

$$\int_{\gamma} (z^2 + y) dx + z dy + y dz$$

con γ la circonferenza di centro unitario e raggio l'origine nel piano $z = 0$. Osserviamo che la forma è esatta se e solo se (essendo su un insieme semplicemente connesso) è anche chiusa, tuttavia si osserva che

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = 1 \neq 0 = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}$$

Quindi non è esatta. Parametrizzata $\gamma = (\cos(t), \sin(t), 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$ studiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (z^2 + y) dx + z dy + y dz &= \int_0^{2\pi} \sin(t)(-\sin(t)) + 0 \cdot (\cos(t)) + \sin(t) \cdot 0 dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t) - 1}{2} dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} - \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -\pi \end{aligned}$$

Esercizio 12. Dire se la forma $\omega = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(y dx - x dy)$ è esatta in \mathbb{R}^2 e trovare una funzione potenziale.

Osserviamo che la forma è esatta se e solo se (essendo su un insieme semplicemente connesso) è anche chiusa. Si osserva che

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}$$

Quindi è esatta. Per trovare una funzione potenziale cerchiamo $F(x, y)$ tale che $\omega_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x}$ e $\omega_2 = \frac{\partial F_2}{\partial y}$, cioè

$$F(x, y) = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

Infatti, consideriamo

$$\int \omega_1 dx = \int \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} dx = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + g(y) = F(x, y)$$

Poi siccome so che la primitiva è tale che $\frac{d}{dy} F(x, y) = \omega_2$ allora

$$\frac{d}{dy} F(x, y) = -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + g'(y) = -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$

da cui $g'(y) = 0$ cioè g è costante, scegliamo come costante 0 (le funzioni primitive sono una famiglia infinita che differisce per una costante).

Esercizio 13. Dire se la forma $\omega = (x^3y^2 + xy + 2) dx + (\frac{1}{2}x^4y + \frac{1}{2}x^2 + e^y) dy$ è esatta in \mathbb{R}^2 , in tal caso calcolare una funzione potenziale per ω . Infine calcolare il seguente integrale di forma

$$\int_{\gamma} (x^3y^2 + xy + 2) dx + (\frac{1}{2}x^4y + \frac{1}{2}x^2 + e^y) dy$$

con γ è una qualsiasi curva che collega il punto $A = (0, 2)$ al punto $B = (1, 1)$. Osserviamo che la forma è esatta se e solo se (essendo su un insieme semplicemente connesso) è anche chiusa, si osserva che

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial y} = 2x^3y + x = \frac{\partial\omega_2}{\partial x}$$

Quindi è esatta. Per trovare una funzione potenziale cerchiamo $F(x, y)$ tale che $\omega_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x}$ e $\omega_2 = \frac{\partial F_2}{\partial y}$. Per trovarla agiamo così: integriamo in modo indefinito dapprima ω_1 che restituisce

$$\frac{x^4y^2}{4} + \frac{x^2y}{2} + 2x + g(y)$$

dove $g(y)$ è una generica funzione di y da determinare. Ora integriamo ω_2 ed euguagliamolo alla funzione precedente per avere

$$\frac{x^4y^2}{4} + \frac{x^2y}{2} + e^y + f(x) = \frac{x^4y^2}{4} + \frac{x^2y}{2} + 2x + g(y)$$

pertanto si osserva l'uguaglianza se scegliamo $f(x) = 2x$ e $g(y) = e^y$, cioè

$$F(x, y) = \frac{x^4y^2}{4} + \frac{x^2y}{2} + 2x + e^y$$

Siccome la forma è esatta possiamo scegliere una qualsiasi curva che collega A e B, scegliamo le due curve $\gamma_1 = (0, t)$ con $t \in [2, 1]$ e $\gamma_2 = (t, 1)$ con $t \in [0, 1]$. Allora studio

$$\int_{\gamma_1} (x^3y^2 + xy + 2) dx + (\frac{1}{2}x^4y + \frac{1}{2}x^2 + e^y) dy = \int_2^1 e^t dt = e - e^2$$

$$\int_{\gamma_2} (x^3y^2 + xy + 2) dx + (\frac{1}{2}x^4y + \frac{1}{2}x^2 + e^y) dy = \int_0^1 t^3 + t + 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2$$

ovvero in tutto

$$\int_{\gamma} (x^3y^2 + xy + 2) dx + (\frac{1}{2}x^4y + \frac{1}{2}x^2 + e^y) dy = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 + e - e^2$$

In particolare siccome la forma era esatta e si conosceva già il potenziale si poteva semplicemente scrivere (data magari $\gamma = (t, 2 - t)$ e $t \in [0, 1]$)

$$\int_{\gamma} \omega ds = F(1, 1) - F(0, 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 + e - e^2$$

proprio come sopra.

Esercizio 14. Dire se la forma $\omega = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} dx - \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dy$ è esatta in \mathbb{R}^2 , in tal caso calcolare una funzione potenziale per ω . Infine calcolare il seguente integrale di forma

$$\int_{\gamma} (x^3 y^2 + xy + 2) dx + \left(\frac{1}{2} x^4 y + \frac{1}{2} x^2 + e^y\right) dy$$

con γ è il segmento che collega il punto $A = (0, 0)$ al punto $B = (1, 1)$. Osserviamo che la forma è esatta se e solo se (essendo su un insieme semplicemente connesso) è anche chiusa, si osserva che

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}$$

Quindi è esatta. Per trovare una funzione potenziale cerchiamo $F(x, y)$ tale che $\omega_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x}$ e $\omega_2 = \frac{\partial F_2}{\partial y}$, cioè

$$F(x, y) = -\frac{y}{1+x^2}$$

Calcoliamo adesso l'integrale lungo il segmento, la curva γ si parametrizza come $\gamma = (t, t)$ per $t \in [0, 1]$ e dunque ho

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{2xy}{(1+x^2)^2} dx - \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dy &= \int_0^1 \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2t^2 - 1 - t^2}{(1+t^2)^2} dt = \\ &= - \left[\frac{t}{t^2+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Questo risultato è giusto poiché avremo potuto invocare l'esattezza della forma e calcolare invece

$$\int_{\gamma} \omega ds = F(1, 1) - F(0, 0) = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$$

Risoluzione esercizi bonus

Esercizio 15. Osserviamo che seguendo i consigli di Einer e Dasten il dominio può essere riscritto come normale all'asse y come $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid y \in [0, 1], x \in [y, 2 - y]\}$, cosicché abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_y^{2-y} \cos(x + y) \, dx dy &= \int_0^1 [\sin(x + y)]_y^{2-y} dy = \int_0^1 [\sin(2) - \sin(2y)] dy \\ &= \sin(2) - \int_0^1 \sin(2y) dy = \sin(2) + \left[\frac{\cos(2y)}{2} \right]_0^1 \\ &= \sin(2) + \frac{\cos(2)}{2} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 16. Andiamo anzitutto a vedere che il dominio è proprio uno spicchio di torta (da qui il nome del dominio). Vediamo che si può integrare per segmenti considerando $0 < x < \frac{y}{3}$ e poi $(x, y) \in D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 9, y > 0, z > 0\}$. Ovvero impostiamo

$$\int \int_D \int_0^{\frac{y}{3}} \sqrt{y^2 + z^2} \, dx \, dy dz = \int \int_D \frac{y}{3} \sqrt{y^2 + z^2} \, dy dz$$

Passiamo ora alle polari $y = \rho \sin(t)$, $z = \rho \cos(t)$ con $\rho \in [0, 3]$ e $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (perché ci serve solo il primo dei quadranti).

$$\begin{aligned}\int \int_D \frac{y}{3} \sqrt{y^2 + z^2} \, dy dz &= \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sin(t)}{3} \rho \rho \, d\rho dt = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3 \sin(t)}{3} \, d\rho dt \\ &= \int_0^3 \frac{\rho^3}{3} \left[-\cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \int_0^3 \frac{\rho^3}{3} \, d\rho = \frac{27}{2}\end{aligned}$$

La sfida di Bastion (esercizi bonus)

Aiutati da uno strano marchingegno volante del silfide Meal e della Bhorgat Annabel, i nostri eroi si dirigono verso la capitale della cantina Al Sehir, per cercare l'aiuto dei calcamorte della regione, riuniti nella città per una seduta del concilio. Per seguire la rotta corretta devono risolvere questi esercizi.

(Questi sono alcuni esercizi bonus particolari che potrebbero aiutarvi)

Esercizio 17 (Integrale curvilineo).

$$\int_A 2x^2 dy - xy dx$$

dove A è il segmento che va da $(1,-5)$ a $(-2,-3)$, seguito dalla parabola omogenea a concavità verso basso e vertice 1, ed infine dal segmento che collega $(4,-3)$.

Esercizio 18 (MOLTO DIFFICILE, NON RIGUARDA ARGOMENTI D'E-SAME). Vi do una nozione in più. Due curve $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = P$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = Q$, si dicono omotope o omotopicamente equivalenti se esiste una funzione continua $\phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$\begin{aligned}\phi(a, s) &= P & \phi(b, s) &= Q & \forall s \in [0, 1], \\ \phi(t, 0) &= \gamma_1(t) & \phi(t, 1) &= \gamma_2(t) & \forall t \in [a, b]\end{aligned}$$

Di fatto, l'omotopia deforma in modo continuo γ_1 fino a farla diventare γ_2 , come se deformaste un elastico. Vale il seguente

Teorema 1. *Sia ω una forma chiusa di classe C^1 , allora per ogni coppia γ_1, γ_2 di curve omotopicamente equivalenti si ha*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Calcolare il seguente integrale di forma

$$\int_{\gamma} \frac{(x-y) dx + (x+y) dy}{x^2 + y^2}$$

sulla curva $\gamma(t) = (1 + r \cos(t), r \sin(t))$ per $t \in [0, 2\pi]$ al variare di $r \in \mathbb{R}$. Dire se la forma è esatta.

Usare il fatto che la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $1+r$ (γ') è omotopicamente equivalente a quella di centro $(1,0)$ e raggio r (γ). L'omotopia è data dalla funzione di traslazione $\phi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\phi(t, s) = ((1-s) + (s+r) \cos(t), (s+r) \sin(t))$. Verificare che questa è un'omotopia valida.

Suggerimenti

In (17):

Eisen: Sembra quasi una biscroma quella linea che poetico! Dividiamo l'integrale su ogni singola curva per prima cosa;

Lazarus: E' la cosa migliore, tanto sono due rette e una parabola $y = 1 - x^2$;

Einer: A questo punto basta parametrizzare normalmente no?;

In (18):

Van: Questa forma è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ e mi sembra chiusa ma non esatta ...;

Meal: Altrimenti, come dice la grande stella, su ogni curva chiusa darebbe sempre 0 ...;

Annabel: ... quindi cerchiamo dove rimane sempre in un insieme semplicemente connesso;

Sera: Giusto! In base al raggio r abbiamo se la curva sta o meno in un insieme semplicemente connesso e quindi possiamo calcolare gli integrali usando l'omotopia ... stando qua sopra mi mancano le mie ali;

Soma: Dasten perché hai un coltello?;

Dasten: Io non ho un coltello;

Ombra di Dasten: taglia lo stabilizzatore dell'aereo;