*“Right, wrong ... Nobody’s got a clue what the difference is in this town. So I’m gonna have more fun ... and live crazier than any of ’em."*

Goro Majima on his "Mad Dog" persona, Yakuza 0

# OTTIMIZZAZIONE

## Estremi relativi

**Esercizio 1.** Cerchiamo massimi e minimi relativi della seguente funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2$$

Per prima cosa andiamo a studiare i punti dove si annulla il gradiente, ovvero calcoliamo le derivate parziali. Per $x$ si ha

$$f_x = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$$

mentre per $y$ ho

$$f_y = 3y^2 - 6y = 3y(y - 2)$$

Ora poniamo $\nabla f = 0$ ovvero

$$\begin{cases} 4x(x^2 - 2) = 0 \\ 3y(y - 2) = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni restituiscono i 6 punti $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 2)$. Calcoliamo ora l’hessiana e valutiamolo in questi punti. Prima di tutto ci servono le derivate seconde ovvero:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 12x^2 - 8 \\ f_{yy} &= 6y - 6 \\ f_{xy} &= f_{yx} = 0 \end{aligned}$$

In questo modo si vede che

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante nei vari punti (che indichiamo per semplicità con $|H(f)|(x, y)$) si ha che:

$|H(f)|(0, 0) = 48 > 0$ siccome la prima entrata è $-8$, negativa, la matrice è definita negativa, quindi $(0, 0)$ è punto di massimo;

$|H(f)|(0,2) = -48 < 0$ la matrice è indefinita, quindi $(0,2)$ è punto di sella;

$|H(f)|(\sqrt{2},0) = |H(f)|(-\sqrt{2},0) = -96 < 0$ la matrice è indefinita, quindi $(\sqrt{2},0)$ e $(-\sqrt{2},0)$ sono punti di sella;

$|H(f)|(\sqrt{2},2) = |H(f)|(-\sqrt{2},2) = 96 > 0$ siccome la prima entrata è 16, positiva, la matrice è definita positiva, quindi $(\sqrt{2},2)$ e $(-\sqrt{2},2)$ sono punti di minimo;

**Esercizio 2.** Cerchiamo massimi e minimi relativi della seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$$

Per prima cosa andiamo a studiare i punti dove si annulla il gradiente, ovvero calcoliamo le derivate parziali. Per $x$ si ha

$$f_x = \frac{y(1+x^2+y^2) - 2x^2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{y(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

mentre per $y$ ho

$$f_y = \frac{x(1+x^2+y^2) - 2y^2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{x(1-y^2+x^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Ora poniamo $\nabla f = 0$ ovvero

$$\begin{cases} y(1-x^2+y^2) = 0 \\ x(1-y^2+x^2) = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che ovviamente $(0,0)$ è un punto che annulla il gradiente, oltre a quello considerando

$$\begin{cases} 1-x^2+y^2 = 0 \\ 1-y^2+x^2 = 0 \end{cases}$$

si vede che questo sistema non ammette altre soluzioni (sostituendo $x^2 = 1+y^2$ dalla prima nella seconda si ha $2 = 0$ che è impossibile, quindi nessun'altra soluzione).

Calcoliamo ora le derivate seconde

$$\begin{aligned}
f_{xx} =& y\frac{-2x((1+x^2+y^2)^2) - (1-x^2+y^2)2(1+x^2+y^2)2x}{(1+x^2+y^2)^4} \\
f_{yy} =& x\frac{-2y((1+x^2+y^2)^2) - (1-x^2+y^2)2(1+x^2+y^2)2y}{(1+x^2+y^2)^4} \\
f_{xy} =& \frac{(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} + y\frac{-2y((1+x^2+y^2)^2) - (1-x^2+y^2)2(1+x^2+y^2)2y}{(1+x^2+y^2)^4}
\end{aligned}$$

In questo modo si vede che Calcolando il determinante nel punto $(0,0)$ (che indichiamo per semplicità con $|H(f)|(x,y)$) si ha che

$|H(f)|(0,0) = -1 < 0$ la matrice è indefinita, quindi $(0,0)$ è un punto di sella;

**Esercizio 3.** Cerchiamo massimi e minimi relativi della seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{y^2}{4} - (x+1)\sin(y) \qquad \text{con } y \in [0, 2\pi]$$

Per prima cosa andiamo a studiare i punti dove si annulla il gradiente, ovvero calcoliamo le derivate parziali. Per $x$ si ha

$$f_x = -\sin(y)$$

mentre per $y$ ho

$$f_y = \frac{y}{2} - (x+1)\cos(y)$$

Ora poniamo $\nabla f = 0$ ovvero

$$\begin{cases} -\sin(y) = 0 \\ \frac{y}{2} - (x+1)\cos(y) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si trova che $y = 0$, $y = \pi$ e $y = 2\pi$. Sostituendo questi punti sulla seconda equazione si ottengono rispettivamente le equazioni

$$\begin{aligned} &-(x+1) = 0 \\ &\frac{\pi}{2} + (x+1) = 0 \\ &\pi - (x+1) = 0 \end{aligned}$$

Ovvero si hanno i 3 punti $(-1,0)$, $(-1-\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\pi - 1, 2\pi)$. Calcoliamo ora l'hessiana e valutiamolo in questi punti. Prima di tutto ci servono le derivate seconde ovvero:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 0 \\ f_{yy} &= \frac{1}{2} + (x+1) \\ f_{xy} &= -\cos(y) \end{aligned}$$

In questo modo si vede che

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos(y) \\ -\cos(y) & \frac{1}{2} + (x+1) \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante nei vari punti (che indichiamo per semplicità con $|H(f)|(x,y)$) si ha che:

$|H(f)|(-1,0) = -1 < 0$ la matrice è indefinita, quindi $(-1,0)$ è punto di sella;

$|H(f)|(-1-\frac{\pi}{2},\pi) = -1 < 0$ la matrice è indefinita, quindi $(-1-\frac{\pi}{2},\pi)$ è punto di sella;

$|H(f)|(\pi-1,2\pi) = -1$ la matrice è indefinita, quindi $(\pi-1,2\pi)$ è punti di sella;

**Esercizio 4.** Cerchiamo massimi e minimi relativi della seguente funzione

$$f(x,y) = 2xy - e^{-(x+y)^2}$$

Per prima cosa andiamo a studiare i punti dove si annulla il gradiente, ovvero calcoliamo le derivate parziali. Per $x$ si ha

$$f_x = 2y - e^{-(x+y)^2}2(x+y)$$

mentre per $y$ ho

$$f_y = 2x - e^{-(x+y)^2}2(x+y)$$

Ora poniamo $\nabla f = 0$ ovvero

$$\begin{cases} 2y - e^{-(x+y)^2}2(x+y) = 0 \\ 2x - e^{-(x+y)^2}2(x+y) = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si trova la prima condizione $x = y$. Sostituendo questa condizione nella seconda equazione si ottiene

$$2x - 2e^{-4x^2}2x = 0 \Rightarrow 2x(1 - 2e^{-4x^2}) = 0$$

Questa ora si annulla per $x = 0$ e per $1 - 2e^{-4x^2} = 0$, ovvero riscrivendo bene la seconda

$$\begin{aligned} &1 - 2e^{-4x^2} = 0 \\ &e^{-4x^2} = \frac{1}{2} \\ &-4x^2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &4x^2 = \ln(2) \\ &x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)} \end{aligned}$$

Pertanto ho 3 punti, $(0,0)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}, \frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)})$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}, -\frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)})$. Calcoliamo ora l'hessiana e valutiamolo in questi punti. Prima di tutto ci servono le derivate seconde ovvero:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= e^{-(x+y)^2}4(x+y)^2 - 2e^{-(x+y)^2} \\ f_{yy} &= e^{-(x+y)^2}4(x+y)^2 - 2e^{-(x+y)^2} \\ f_{xy} &= 2 + e^{-(x+y)^2}4(x+y)^2 - 2e^{-(x+y)^2} \end{aligned}$$

In questo modo si vede che

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-(x+y)^2}4(x+y)^2 - 2e^{-(x+y)^2} & 2 + e^{-(x+y)^2}4(x+y)^2 - 2e^{-(x+y)^2} \\ 2 + e^{-(x+y)^2}4(x+y)^2 - 2e^{-(x+y)^2} & e^{-(x+y)^2}4(x+y)^2 - 2e^{-(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante nei vari punti (che indichiamo per semplicità con $|H(f)|(x,y)$) si ha che:

$|H(f)|(0,0) = 4 > 0$ la matrice è definita, siccome la prima entrata è $-2 < 0$ allora la matrice è definita negativa quindi $(0,0)$ è punto di massimo relativo;

$|H(f)|(\frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}, \frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}) = (2\ln(2) - 1)^2 - (2\ln(2) + 1)^2 < 0$ la matrice è indefinita, quindi $(\frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}, \frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)})$ è punto di sella;

$|H(f)|(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}, -\frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}) = (2\ln(2) - 1)^2 - (2\ln(2) + 1)^2 < 0$ la matrice è indefinita, quindi $(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)}, -\frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)})$ è punto di sella;

## Estremi globali

**Esercizio 5.** Cerchiamo massimi e minimi globali della funzione

$$f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

Nel triangolo $T$ di vertici $(1,0)$, $(0,0)$, $0,1)$. Andiamo innanzitutto a calcolare i punti in cui si annulla il gradiente. Calcolando le derivate prime si ha per la $x$

$$f_x = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

mentre per la $y$

$$f_y = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Ovvero abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Di cui osserviamo che in $(0,0)$ non è definito l'hessiano ed inoltre il punto è fuori dal dominio.

Adesso consideriamo i punti alla frontiera. Osserviamo che possiamo dividerla in 3 segmenti, corrispondenti ai 3 lati del triangolo, rispettivamente $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t, y = 0,\, t \in [0,1]\}$, $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y = t,\, t \in [0,1]\}$ e $B_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 - y\, y \in [0,1]\}$. Consideriamo prima $B_1$, sostituendo il parametro otteniamo la funzione

$$F(t) = e^{-\sqrt{t^2}} = e^{-t}$$

Questa ha derivata chiaramente negativa, pertanto i punti di estremo si trovano agli estremi del dominio, cioè per $t = 0$ e $t = 1$. Sostituendo nel vincolo di $B_1$ ottengo i punti $(0,0)$ e $(1,0)$.

In $B_2$ il ragionamento è identico e restituisce i punti $(0,0)$ e $(0,1)$.

In $B_3$ sostiuiamo la $x$ per ottenere

$$F(y) = e^{-\sqrt{(1-y)^2+y^2}}$$

la cui derivata restituisce

$$F'(y) = e^{-\sqrt{(1-y)^2+y^2}} = -e^{-\sqrt{(1-y)^2+y^2}} \frac{-2(1-y)+2y}{2\sqrt{(1-y)^2+y^2}} = -e^{-\sqrt{(1-y)^2+y^2}} \frac{2y-1}{\sqrt{(1-y)^2+y^2}}$$

Che si annulla per $y = \frac{1}{2}$. Oltre a questo consideriamo sempre i valori agli estremi di $y = 0$ e $y = 1$. Dunque ho 3 punti sostituendo nel vincolo $B_3$ che sono $(1,0)$, $(0,1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Valutiamo la funzione nei 4 punti totali ottenuti $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned} &f(0,0) = 1 \\ &f(1,0) = e^{-1} \\ &f(0,1) = e^{-1} \\ &f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Pertanto il massimo globale è in $(0,0)$ e vale 1, il minimo globale è in $(0,1)$ e $(1,0)$ e vale $e^{-1}$.

**Esercizio 6.** Cerchiamo massimi e minimi globali della funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x\,,\ y > 0\}$. Osserviamo che con il completamento ad un quadrato si trova $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\,,\ y > 0\}$, ovvero è il semicerchio di raggio 1 centrato in $(1, 0)$.

Andiamo innanzitutto a calcolare i punti in cui si annulla il gradiente. Calcolando le derivate prime si ha per la $x$

$$f_x = 2x$$

mentre per la $y$

$$f_y = -2y$$

Ovvero abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Di cui osserviamo che in $(0, 0)$ è fuori dal dominio (sta nella frontiera).

Adesso consideriamo i punti alla frontiera. Osserviamo che possiamo dividerla in 2 parti, rispettivamente $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t, y = 0,\ t \in [0, 2]\}$ e $B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = -(x-1)^2 + 1\,, x \in [0, 2]\,, y > 0\}$ . Consideriamo prima $B_1$, sostituendo il parametro otteniamo la funzione

$$F(t) = t^2$$

Questa ha derivata chiaramente positiva ($t$ è non negativa), pertanto i punti di estremo si trovano agli estremi del dominio, cioè per $t = 0$ e $t = 2$. Sostituendo nel vincolo di $B_1$ ottengo i punti $(0, 0)$ e $(2, 0)$.

In $B_3$ sostiuiamo la $x$ per ottenere

$$F(x) = x^2 + (x-1)^2 - 1 = 2x^2 - 2x$$

la cui derivata restituisce

$$F'(x) = 4x - 2$$

Che si annulla per $x = \frac{1}{2}$. Oltre a questo consideriamo sempre i valori agli estremi di $x = 0$ e $x = 2$. Dunque ho 3 punti sostituendo nel vincolo $B_3$ che sono $(0,0)$, $(2,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ (nell'ultimo ho preso solo $y>0$ per via del vincolo). Valutiamo la funzione nei 3 punti totali ottenuti $(0,0)$, $(2,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

$$f(0,0)=0$$
$$f(2,0)=4$$
$$f(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{1}{2}$$

Pertanto il massimo globale è in $(2,0)$ e vale 4, il minimo globale è in $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ e vale $-\frac{1}{2}$.

**Esercizio 7.** Cerchiamo massimi e minimi globali della funzione

$$f(x,y)=x^2+y^2+\frac{3}{2}x+1$$

Nel dominio $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2+y^2-1=0\}$. Ovvero è un ellisse centrata nell'origine di semiassi $\frac{1}{2}$ e 1. Osserviamo che essendo solo una frontiera non si calcolano i punti interni.

Consideriamo i punti alla frontiera. Possiamo operare semplicemente la sostituzione $y^2=-4x^2+1$, osserviamo che $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, così da avere

$$F(x)=x^2-4x^2+1+\frac{3}{2}x+1=-3x^2+\frac{3}{2}x+2$$

la cui derivata restituisce

$$F'(x)=-6x+\frac{3}{2}$$

Che si annulla per $x=\frac{1}{4}$. Oltre a questo consideriamo sempre i valori agli estremi di $x=-\frac{1}{2}$ e $x=\frac{1}{2}$. Dunque ho 4 punti sostituendo nel che sono $(-\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ (nell'ultimo ricordare che $y^2=\frac{3}{4}\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$). Valutiamo la funzione nei 4 punti totali ottenuti $(-\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

$$f(-\frac{1}{2},0)=\frac{1}{2}$$
$$(\frac{1}{2},0)=2$$
$$f(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{35}{16}$$
$$f(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{35}{16}$$

Pertanto il massimo globale è in $(\frac{1}{2},0)$ e vale 2, il minimo globale è in $(-\frac{1}{2},0)$ e vale $\frac{1}{2}$.

**Esercizio 8.** Cerchiamo massimi e minimi globali della funzione

$$f(x,y) = \frac{5}{3}y^3 - \frac{13}{2}y^2 + 6x$$

Nel piano $x + y - 2 = 0$. Osserviamo che essendo solo una frontiera non si calcolano i punti interni.

Consideriamo i punti alla frontiera. Possiamo operare semplicemente la sostituzione $x = 2 - y$, $y \in \mathbb{R}$, così da avere

$$F(y) = \frac{5}{3}y^3 - \frac{13}{2}y^2 + 12 - 6y$$

la cui derivata restituisce

$$F'(x) = 5y^2 - 13y - 6$$

Che si annulla per $y = -\frac{2}{5}$ e $y = 3$. Dunque ho 2 punti, sostituendo nel vincolo resituiscono $(\frac{12}{5}, -\frac{2}{5})$, $(-1, 3)$. Valutiamo la funzione nei 2 punti.

$$f(\frac{12}{5}, -\frac{2}{5}) = \frac{1988}{150}$$
$$f(-1,3) = -\frac{39}{2}$$

Pertanto il massimo è in $(\frac{12}{5}, -\frac{2}{5})$ e vale $\frac{1988}{150}$, il minimo è in $(-1, 3)$ e vale $-\frac{39}{2}$.

Rifacciamolo anche col metodo dei moltiplicatori per mostrare che si ottiene lo stesso. Definito il vincolo come $g(x,y) = x+y-2 = 0$ e la lagrangiana come

$$\mathbf{L} = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

abbiamo il sistema

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

Ovvero

$$\begin{cases} 6 - \lambda = 0 \\ 5y^2 - 13y - \lambda = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Da cui ancora

$$\begin{cases} \lambda = 6 \\ 5y^2 - 13y - 6 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

la seconda resistuisce di nuovo $y = -\frac{2}{5}$ e $y = 3$ che sostituiti nella terza ridanno le soluzioni già viste sopra.

**Esercizio 9.** Cerchiamo massimi e minimi globali della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x - 7$$

Nel dominio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Ovvero è una circonferenza centrata nell'origine di raggio 2. Andiamo dapprima a sudiare i punti interni. Calcolando le derivate parziali si ha.

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 4 \\ f_y &= 4y \end{aligned}$$

Ovvero ridanno il punto $(2, 0)$. Questo punto appartiene alla frontiera siccome $2^2 + 0^2 = 4$, dunque lo escludiamo. Consideriamo i punti alla frontiera. Possiamo operare semplicemente la sostituzione $y^2 = -x^2 + 4$, osserviamo che $x \in [-2, 2]$, così da avere

$$F(x) = x^2 - 2x^2 + 8 - 4x - 7 = -x^2 - 4x - 7$$

la cui derivata restituisce

$$F'(x) = -2x - 4$$

Che si annulla per $x = -2$, proprio all'estremo. Oltre a questo consideriamo l'altro valore all'estremo $x = 2$. Dunque ho 2 punti che sostituendo nel vincolo sono $(-2, 0)$, $(2, 0)$. Valutiamo la funzione

$$\begin{aligned} f(-2, 0) &= 5 \\ (2, 0) &= -11 \end{aligned}$$

Pertanto il massimo globale è in $(-2, 0)$ e vale 5, il minimo globale è in $(2, 0)$ e vale $-11$.

Facciamo anche un altro metodo, sia la parametrizzazione in polari $x = 2\cos(t)$ e $y = 2\sin(t)$ per $t \in [0, 2\pi)$. Allora sostituendo avrei

$$F(t) = 4\cos^2(t) + 8\sin^2(t) - 8\cos(t) - 7 = 4\sin^2(t) - 8\cos(t) - 3$$

dove si è usata la relazione fondamentale della trigonometria. La derivata ora restituisce

$$F'(t) = 8\sin(t)\cos(t) + 8\sin(t) = 8\sin(t)(\cos(t) + 1)$$

Questa si annulla per $\sin(t) = 0$, cioè $t = 0$ e per $\cos(t) = -1$ cioè $t = \pi$. Sostituendo nella parametrizzazione sarebbe $(2, 0)$ e $(-2, 0)$, i punti di prima.

Facciamo anche il terzo metodo, definito il vincolo con $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ e la lagrangiana come

$$\mathbf{L} = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

abbiamo il sistema

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} 2x - 4 - \lambda 2x &= 0 \\ 4y - \lambda 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

da cui dalla seconda si ha $y = 0$ che ridà $x = \pm 2$, oppure $\lambda = 2$ che però ridà nella prima $-4 = 0$, quindi questa non è possibile. Pertanto ritrovo i soliti due punti $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.

## Esercizi bonus risoluzione

**Esercizio 10.**

$$\lim_{|(x,y)| \to \infty} [\ln(x + y) + \ln(x - y)]$$

usiamo le proprietà dei logaritmi per ottenere

$$\lim_{|(x,y)| \to \infty} [\ln(x^2 - y^2)]$$

Osserviamo inanzittuto che questo logaritmo esiste quando $x^2 - y^2 > 0$ ovvero quando $x^2 > y^2$, ovvero

$$x > -y \wedge x > y \quad \cup \quad x < -y \wedge x < y$$

Ovvero è il cono in $\mathbb{R}^2$. Passiamo adesso alle polari, si ha

$$\lim_{\rho\to\infty} \ln(\rho^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)))$$

Dove vediamo che il dominio rimane definito quando $\theta \in (\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$. Adesso ricordiamo che $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta)$ ovvero

$$\lim_{\rho\to\infty} \ln(\rho^2(\cos(2\theta)))$$

Ma dunque si ha che $2\theta \in (\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2})$, pertanto $\cos(2\theta)$ non si annulla mai ma dunque

$$\lim_{\rho\to\infty} \ln(\rho^2(\cos(2\theta))) = \infty$$

Ma dunque questo vuol dire che il limite esiste e vale infinito.

Osserviamo che il limite esiste proprio perche il logaritmo mi permette di "togliere" quella parte di dominio che non permette invece al limite di $x^2 - y^2$ di esistere.

**Esercizio 11.** Studiamo per quale $\alpha$ si ha continuità e differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e il piano tangente in $(0,0)$. Vediamo la continuità, studiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

passiamo alle polari e usiamo de l'hopital

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{e^{\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)} - 1}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} e^{\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)} 2\rho\cos(\theta)\sin(\theta) = 0$$

pertanto $\alpha = 0$. Vediamo adesso le derivate parziali in $(0,0)$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h^2} = 0$$

identica la derivata in $y$. Pertanto per la differenziabilità sarà

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{e^{hk}-1}{h^2+k^2} =$$

passiamo alle solite polari ed usiamo de l'hopital

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{e^{\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)}-1}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{e^{\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)}2\rho\cos(\theta)\sin(\theta)}{2\rho}=$$
$$=\cos(\theta)\sin(\theta)$$

Ovvero si vede che il limite non esiste (dipende dall'angolo $\theta$), pertanto la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

## La sfida di Bastion (esercizi bonus)

Dopo aver recuperato l'uovo dei Rakni in una rocambolesca battaglia, i nostri eroi sono stati imprigionati da Bastion nella prigione di Pozzoprofondo. Riusciranno a scappare risolvendo questi esercizi? Nel caso troviate difficoltà i soliti compagni vi aiuteranno con suggerimenti a fondo pagina. (Questi sono alcuni esercizi bonus particolari che potrebbero aiutarvi)

**Esercizio 12** (Studiare massimi e minimi relativi)**.**

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

## Suggerimenti

In (12):
**Einer**: Ad occhio sembrerebbe un esercizio classico, eppure sui punti critici del tipo $(x, 0)$ e $(0, y)$ non possiamo usare nessun teorema;
**Dasten**: Eh già, l'hessiano è nullo per ciascuno di questi punti, come fare ...;
**Soma**: Usiamo la testa. Secondo me si può capire di che punti si tratta come si comporta la funzione;

Intanto nella cella ...
**Aisen**: Accidenti questo lucchetto non si apre;
**Sera**: Tranquillo Aisen, ho un piano infallibile;
**Burinette (strumento di Aisen)**: Ma da dove tira fuori tutta quella dinamite?;