"Imagine a future version of you who's freely surpassed your limits."
Aoi Todo from Jujutsu Kaisen

SERIE NUMERICHE

Serie telescopiche

Le serie telescopiche sono quelle che possiamo riscrivere nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1}$, sono poco usuali e spesso si presentano sotto forma di rapporto di polinomi classico. La convergenza è garantita è possiamo anche ricavare la somma esplicita della serie. Per trovare il termine generico b_n cerchiamo di scrivere il denominatore come un prodotto di polinomi e poi vediamo se separando i due termini riusciamo ad ottenere la serie di partenza.

Esercizio 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n^2+2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Ma adesso preso $b_n = \frac{1}{n^2}$ otteniamo che la serie è telescopica, possiamo allora calcolare la somma della serie come $b_1 - l$, dove $l = \lim_{n\to\infty} b_n$. Pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2} = \frac{1}{1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - 0 = 1$$

Esercizio 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$$

Ora scelto $b_n = \frac{1}{2n+1}$ osserviamo che abbiamo una serie telescopica, ma allora come sopra la somma sarà data da $b_1 - l$, cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3} = \frac{1}{2\cdot 1+1} - 0 = \frac{1}{3}$$

Serie a termini costanti

I 3 metodi principali per risolvere le serie a termini costanti sono: metodo del rapporto, metodo della radice, metodo del confronto (anche asintotico). Più raramente si può utilizzare anche il metodo di condensazione.

Esercizio 3 (Confronto e confronto asintotico).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$$

Per risolvere questo problema usiamo il confronto asintotico, consideriamo la serie ausiliaria b_n a termini $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}n}$ in questo modo si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

Dove è stato usato il limite notevole del seno (nota bene che se $n \to \infty$ allora $\frac{1}{n} \to 0$). Siccome poi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}n}$ converge, si tratta della serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$, e il limite del rapporto non è infinito, per il criterio del confronto asintotico la serie di partenza converge.

Un'altro metodo è quello di osservare la disuguaglianza $\sin x \leq x$ valida $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, quindi anche per $\frac{1}{n}$ essendo questo minore o uguale a $1\ \forall n \in \mathbb{N}$. Da qua otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

La seconda converge come sopra e quindi la serie di partenza converge per criterio del confronto semplice.

Esercizio 4 (Condizione necessaria, confronto asintotico e rapporto).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \sin \frac{1}{2^n}$$

Per risolvere questo esercizio ci si può subito rendere conto che la condizione necessaria di convergenza non è rispettata, ovvero $a_n \to 0$ per $n \to \infty$. Infatti

$$\lim_{n\to\infty} 4^n \sin \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{\sin \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

dove è stato usato il limite notevole del seno, pertanto la serie è divergente.

Si potrebbe usare anche il criterio del confronto asintotico ponendo $b_n = n^2$ e osservando che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 1$$

Siccome, ovviamente, la serie dei b_n diverge e il limite del rapporto è maggiore di zero, la serie di partenza diverge.

Infine si potrebbe anche andare "di faccia" e provare un criterio, consiglio quello del rapporto in quanto si semplificano gli esponenti (in realtà va benissimo anche quello della radice). In questo caso scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4\frac{\sin\frac{1}{2^{n+1}}}{\sin\frac{1}{2^n}}$$

Forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, usiamo de l'Hopital (ATTENZIONE, ricorda che $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ dove $\ln a$ è il logaritmo naturale!!!)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{2^{n+1}} \cdot -\frac{1}{2^{n+1}} \cdot \log 2}{\cos\frac{1}{2^n} \cdot -\frac{1}{2^n} \cdot \log 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{2^{n+1}}}{\cos\frac{1}{2^n}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ricordandosi del 4 di prima otteniamo che il limite del rapporto è $2 > 1$ quindi la serie diverge.

Esercizio 5 (Criterio della radice)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\sqrt{n}-n}$$

Applichiamo il criterio della radice per studiare l'eventuale convergenza, ovvero scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{\sqrt{n}-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^{\sqrt{n}}}}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{\sqrt{n}}{n}}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{2} = \frac{1}{2}$$

dove sono state usate le usuali proprietà delle potenze ($(x^a)^b = x^{a\cdot b}$) e il fatto che $\sqrt[a]{x} = x^{\frac{1}{a}}$. Siccome adesso il limite è minore di 1, la serie converge.

Serie a termini alterni

Il metodo principale per risolvere questo tipo di serie è il metodo di Leibnitz. Alcune volte può essere necessario dimostrare l'assoluta convergenza della serie.

Esercizio 6 (Lebnitz).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \sin \frac{1}{n}$$

Questa è una serie a termini alterni mascherata, infatti $\cos n\pi = (-1)^n$, proviamo ad applicare Leibniz allora. Ovviamente $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$. Vogliamo però mostrare che $\sin \frac{1}{n}$ decresce. Risulta semplice facendo la derivata notando che il coseno è positivo per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, cosicché

$$\left[\sin \frac{1}{n}\right]' = \cos \frac{1}{n} \cdot \frac{-1}{n^2} \leq 0$$

La disuguaglianza vale perché, ripetiamo, $\cos \frac{1}{n}$ è positivo $\forall n \in \mathbb{N}$ così come $\frac{1}{n^2}$, quindi col meno diventa negativo. La derivata risulta negativa ovvero la funziona è non crescente (in realtà la disuguaglianza è stretta e la funzione è decrescente). Pertanto possiamo applicare Leibniz e la serie è convergente.

Esercizio 7 (Lebnitz).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin n}$$

Questa è una serie a termini alterni, proviamo ad applicare Leibniz. Anche qui, semplicemente, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sin n} = 0$. Vediamo se la il termine generico decresce a 0. Facciamo ancora la derivata:

$$\left[\frac{1}{n + \sin n}\right]' = \frac{-(1 + \cos n)}{(n + \sin n)^2} \leq 0$$

dove è stata sfruttata la classica $-\cos n \leq 1$ per ottenere l'annullamento del numeratore. Quindi anche in questo caso Leibniz è applicabile e la serie è convergente.

Successioni di funzioni

Le successioni di funzioni sono la generalizzazione più classica delle successioni numeriche, ovvero il termine generico non è più un numero a_n ma una funzione $f_n(x)$ dipendente da $x \in I$ per un particolare dominio I. La convergenza di una serie di funzioni si suddivide in convergenza puntuale, nella quale si considera x "fissato" e si studia la convergenza della successione numerica $(f_n(x))$ ad una funzione limite $f(x)$, e uniforme, in cui si studia una convergenza di f_n ad f indipendentemente da x (LEGGERE BENE LA TEORIA). Il criterio fondamentale per la convergenza uniforme è

$$\lim_n \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Esercizio 8. Studiamo la convergenza puntuale e uniforme per $x \in \mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

Vediamo che abbiamo una convergenza puntuale alla funzione x. Basta infatti vedere se $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x} n \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x$$

Se $x = 0$ invece semplicemente $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Vediamo allora la convergenza uniforme. Sia

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x \right|$$

Vediamo il comportamento della funzione, andiamo a studiarne la derivata.

$$\cos\left(\frac{x}{n}\right)\frac{1}{n} - 1$$

Vediamo che questa è sempre non positiva, quindi la funzione di partenza è non crescente, allora il sup è dato dal limite per $-\infty$ o $+\infty$ (perché stiamo studiando il valore assoluto). Adesso

$$\lim_{x\to-\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x \right| = \infty$$

Quindi non ho convergenza uniforme in $\mathbb{R}$. Consideriamo allora insiemi del tipo $[a, b]$, con $-\infty < a < b < \infty$. Adesso si ha (per il teorema di Weierstrass) che

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max\{|f_n(a) - f(a)|, |f_n(b) - f(b)|\} = \left| n \sin\left(\frac{b}{n}\right) - b \right|$$

(Supposto che in b abbia valore massimo). Ma adesso allora, usando il limite notevole del seno

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \left| n \sin\left(\frac{b}{n}\right) - b \right| = 0$$

Cioè si ha convergenza assoluta su tutti gli insiemi del tipo $[a, b]$.

Esercizio 9. Studiamo la convergenza puntuale e uniforme per $x \in \mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = |x|^{(1+\frac{1}{n})}$$

Osserviamo che banalmente questa converge alla funzione limite $f(x) = |x|$. Vediamo la convergenza uniforme. Scriviamo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| |x|^{(1+\frac{1}{n})} - |x| \right|$$

Ora ne facciamo la derivata che restituisce

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) |x|^{\frac{1}{n}} \frac{|x|}{x} - \frac{|x|}{x}$$

Vediamo come si comporta. Per studiare la crescenza consideriamo prima $x > 0$ (e osserviamo che la funzione è pari) e abbiamo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{\frac{1}{n}} \geq 1 \leftrightarrow x \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Allora il sup si ha per ∞ o $(-\infty)$ (Si potrebbe pensare di controllare anche il punto di minimo $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ che col valore assoluto è un massimo relativo, ma si osserva che al variare di n al massimo questo assume un valore di $\frac{1}{4}$. Vediamo i limiti

$$\lim_{x\to\infty} \left| |x|^{(1+\frac{1}{n})} - |x| \right| = \infty$$

Pertanto non abbiamo convergenza uniforme in $\mathbb{R}$. Andiamo a vedere insiemi del tipo $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$. In questo caso si ottiene che (per Weierstrass)

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[a,b]} \left| |x|^{(1+\frac{1}{n})} - |x| \right| = \max\{g(a), g(b)\}$$

Ora (supposto b $>$0 che è indifferente) $g(b) = \left| b^{(1+\frac{1}{n})} - b \right| \ \forall\, b \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \left| b^{(1+\frac{1}{n})} - b \right| = 0$$

Allora ho convergenza uniforme in ogni intervallo compatto.

La sfida di Bastion (esercizi bonus)

Bastion è un temibile avversario, ex-capitano di una nave pirata, nonché feroce combattente, ed è venuto a sfidarvi con degli esercizi particolarmente ostici. Nel caso troviate difficoltà alcuni compagni vi aiuteranno con suggerimenti a fondo pagina.

(Questi sono alcuni esercizi bonus particolari che potrebbero aiutarvi)

Esercizio 10.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

Esercizio 11.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n^2+1}{n\ln n^2+n^2\ln n}$$

Esercizio 12.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

Esercizio 13 (Studiare convergenza semplice ed assoluta, coincidono?)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{n}$$

Esercizio 14 (Errata corrige, esempio 4.20 delle dispense)**.**

$$f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Si può veramente usare Pòlya $\forall[a,b]$, con $-\infty<a<b<\infty$? (Trovare controesempio se negativo o saltare se non si è fatto Pòlya). Studiare convergenza puntuale e uniforme per $x\in\mathbb{R}$.

Suggerimenti

In (10):
Lazarus: Secondo me si potrebbe risolvere usando le proprietà dei logaritmi e poi applicando un confronto asintotico;
Soma: Si certo, ma esiste anche un modo più veloce, magari usando due volte il confronto asintotico separatamente ...;

In (11) e (12):
Van: Sembra che le nostre armi usuali non funzionino bene ...;
Einer: Qua bisogna usare qualcuno dei nostri trucchi più subdoli, magari il metodo di condensazione;

In (13):
Aisen: Beh mi sembra che questa converga abbastanza facilmente usando confronto e Leibnitz;
Dasten: Si, ma per la convergenza assoluta? Magari possiamo usare qualche disuguaglianza nota ...;
Sera: Ma si certo, e poi un bel criterio del confronto con una serie divergente!;

In (14):
Soma: Un'imprecisione, Pòlya richiede $f_n(x_1) < f_n(x_2)$ per $x_1 < x_2$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ ma $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ cambia crescenza in un punto con gli n pari, quindi potremo, al massimo, usarlo su compatti del tipo $[a,b]$ con a maggiore di ...;
Sera: E non fare lo splendido come al solito! Studiato nel modo usuale tanto si trova comunque la convergenza $\forall[a,b]$, con $-\infty < a < b < \infty$;