6 Esercizi di Analisi Matematica 2 - Lista 6

Integrali Curvilinei.

Esercizio 6.1. Si calcoli l'integrale curvilineo della funzione

$$g(x, y) = 3x + y - 5$$

esteso alla curva σ di equazioni parametriche:

$$\sigma(t) : \begin{cases} x = 2 - \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \quad , \qquad t \in [\pi, 2\pi]$$

Esercizio 6.2. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{1}{3x + 2y}\, ds$$

dove γ è il segmento di $\mathbb{R}^2$ di estremi $(1, 2)$ e $(e, 2e)$.

Esercizio 6.3. Calcolare l'integrale $\int_\gamma f\, ds$ dove f è definita come

$$f(x, y) = x^2 y$$

mentre γ è la porzione di circonferenza di centro l'origine e raggio 3 contenuta del secondo quadrante.

Esercizio 6.4. Sia σ il grafico di $y = \sqrt{x}$, con $x \in [1, 2]$. Impostare il calcolo della lunghezza di σ e calcolare l'integrale

$$\int_\sigma y\, ds$$

Forme Differenziali Lineari.

Esercizio 6.5. Data la forma differenziale lineare

$$\omega = 2xy\, dx + x^2\, dy$$

verificare che la forma risulta chiusa in $\mathbb{R}^2$. Calcolare $\int_\Gamma \omega$ dove

$$\Gamma = \{x = \cos t,\ y = t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\}$$

Esercizio 6.6. Data la forma differenziale lineare

$$\omega = (2x + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy$$

si dica se è esatta nel suo campo di definizione e in caso affermativo si trovi la funzione potenziale. Successivamente si integri ω lungo la frontiera (orientata positivamente) del dominio D definito come la parte del cerchio $x^2 + y^2 \leq 4$ avente ascisse non negative.

Esercizio 6.7. Si consideri, nel suo insieme di definizione, la forma differenziale lineare ($a \in \mathbb{R}$):

$$\omega = axy \sin z\,dx + x^2 \sin z\,dy + x^2 y \cos z\,dz$$

- Trovare i valori di a per i quali ω è esatta e calcolarne le primitive. (*Suggerimento*: utilizzare il teorema sulla caratterizzazione delle forme esatte).
- Per i valori di a trovati al punto precedente, calcolare l'integrale

  $$\int_\gamma \omega$$

  dove γ è il segmento che unisce (nell'ordine) il punto $(0,0,0)$ al punto $(1,1,1)$.

Esercizio 6.8. Si consideri la forma differenziale lineare

$$\omega = [\sin(x+y) + ax\cos(x+y)]\,dx + 2bx\cos(x+y)\,dy$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

- Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$, dove γ è la frontiera del quadrato $Q = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.
- Trovare, se esistono, i valori di a e b per i quali la forma è esatta ed eventualmente calcolarne le primitive.