9 Esercizi di Analisi Matematica 2 - Lista 9

Teorema di Stokes.

Esercizio 9.1. Siano

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y \cos z \mathbf{i} + \sin z \mathbf{j} + z \sin x \mathbf{k}$$

e S la superficie della semisfera unitaria centrata nell'origine e contenuta nel semispazio $\{z \geq 0\}$ con l'orientazione data dal versore normale "esterno" (cioè quello con la terza componente positiva). Calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso S:

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n_e}) \, \mathbf{d}\sigma$$

Esercizio 9.2. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, calcolare l'integrale curvilineo

$$\oint_\gamma (\mathbf{F}, \mathbf{T}) \, ds$$

dove γ è la circonferenza unitaria contenuta nel piano xy, centrata nell'origine e orientata positivamente.

Esercizio 9.3. Enunciare il Teorema di Stokes. Utilizzarlo per calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso S, dove

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z^2) \, \mathbf{i} + (x^2 + y) \, \mathbf{j} + \arctan(x^2 + y - z) \, \mathbf{k}$$

ed S è il disco del piano $z = 0$ di centro l'origine e raggio 1. Calcolare sia l'integrale superficiale che quello curvilineo.

Esercizio 9.4. Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, 4z, 3x)$$

e sia S la porzione di superficie delimitata dal paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e dal piano xy, orientata verso l'alto. Calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso S e, utilizzando il Teorema di Stokes, calcolare sia l'integrale superficiale che quello curvilineo.

Integrali Tripli.

Esercizio 9.5. Calcolare

$$\iiint_E (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Esercizio 9.6. Calcolare

$$\iiint_E z\, dx\, dy\, dz$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, -1 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Esercizio 9.7. Calcolare

$$\iiint_E xz^2\, dx\, dy\, dz$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, z \geq x^2 + y^2\}$.