Precorso di Matematica

Lezione 2 – Equazioni e Sistemi di Equazioni

Alessandro Fiori Maccioni

Programma della lezione

1. Richiami: dominio, intervalli, valore assoluto; trasformazioni equivalenti/implicative
2. Metodo generale di risoluzione (*checklist*)
3. Strumenti: prodotti notevoli e fattorizzazione
4. Equazioni lineari e fratte; sistemi lineari 2×2
5. Sistemi lineari 3×3 (eliminazione di Gauss)
6. Equazioni di 2° grado: discriminante, completamento, fattorizzazione, biquadratiche
7. Consigli pratici

Richiami essenziali - Trasformazioni delle equazioni

Trasformazioni equivalenti (conservano tutte le soluzioni):

- Sommare/sottrarre lo stesso termine a entrambi i membri
- Moltiplicare/dividere entrambi i membri per $k \neq 0$
- Fattorizzare o raccogliere correttamente
- Applicare funzioni **biunivoche** (iniettive e suriettive) sul dominio

Trasformazioni implicative (possono introdurre soluzioni spurie):

- Elevare al quadrato entrambi i membri
- Moltiplicare per espressioni che possono annullarsi
- Eliminare denominatori senza aver determinato il dominio
- Applicare funzioni non iniettive

Attenzione!

Regola fondamentale: Dopo trasformazioni implicative, è **obbligatorio** verificare le soluzioni nell'equazione originale per eliminare quelle spurie.
Es.: $\sqrt{x} = -2$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, ma elevando al quadrato otterremmo $x = 4$, che è spuria.

Checklist sistematica per risolvere equazioni: 1. Determina il dominio

- Denominatori: $\neq 0$ • Radicandi con indice pari: ≥ 0 • Argomenti dei logaritmi: > 0

2. Semplifica l'equazione

- Riduci frazioni ai minimi termini • Raccogli fattori comuni • Applica prodotti notevoli

3. Trasforma in forma standard

- Isola i termini con l'incognita • Fattorizza quando possibile
- Riduci a equazioni di grado noto • Usa sostituzioni se necessario (es. $t = x^2$)

4. Risolvi

- Applica formule risolutive • Usa annullamento del prodotto • Metodi per sistemi

5. Verifica e controlla

- Sostituisci nell'equazione **originale** • Controlla il **dominio** • Elimina soluzioni **spurie**

Soluzioni spurie: cosa sono e come evitarle

Definizione: Una *soluzione spuria* è un valore che compare durante i calcoli ma **non soddisfa l'equazione di partenza**. Nasce quando si applicano **trasformazioni implicative**.

Cause tipiche:

- elevare al quadrato entrambi i membri;
- moltiplicare per un'espressione che potrebbe annullarsi;
- eliminare denominatori senza considerare il dominio.

Esempio: risolvere $\sqrt{x+1} = x - 1$.

1. Dominio: $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$.
2. Elevo al quadrato: $x + 1 = (x-1)^2 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0, 3$.
3. Verifica:
   - $x = 0$: $\sqrt{1} = 1 \neq -1 \Rightarrow$ **spuria**.
   - $x = 3$: $\sqrt{4} = 2 = 3 - 1 \Rightarrow$ valida.

Soluzione finale: $S = \{3\}$

Regola pratica: *verifica sempre le soluzioni nell'equazione originale!*

Soluzioni spurie nelle equazioni razionali

Esempio corretto: risolvere

$$\frac{x-1}{x-1} = x.$$

Passaggi:

1. **Dominio:** $x \neq 1$ (il denominatore non può essere 0).
2. Per $x \neq 1$, il membro sinistro vale 1; quindi l'equazione diventa

$$1 = x \quad \Rightarrow \quad x = 1,$$

   ma $x = 1$ è **fuori dominio** $\Rightarrow$ *nessuna soluzione*.
3. Se invece si elimina il denominatore moltiplicando per $(x-1)$ (passo *implicativo*):

$$x-1 = x(x-1) \ \Rightarrow \ x-1 = x^2 - x \ \Rightarrow \ x^2 - 2x + 1 = 0 \ \Rightarrow \ (x-1)^2 = 0,$$

   da cui $x = 1$.

Conclusione: il valore $x = 1$ ottenuto eliminando il denominatore è **spurio** (non appartiene al dominio).

N.B: quando si moltiplica per un'espressione che può annullarsi, si possono introdurre soluzioni spurie.
Per questo va sempre dichiarato il dominio e verificato il risultato nell'equazione di partenza.

Prodotti notevoli (per risolvere equazioni)

Forme da riconoscere:

$$
\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{(quadrato di binomio)}\\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \quad \text{(differenza di quadrati)}\\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \quad \text{(cubo di binomio)}\\
a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \quad \text{(somma/diff. cubi)}
\end{aligned}
$$

Principio di annullamento del prodotto: $P(x)Q(x) = 0 \iff P(x) = 0$ oppure $Q(x) = 0$.

Esempi rapidi

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = \pm 3.$ $\quad (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x + 1 = \pm 2 \Rightarrow x = 1, -3.$

Fattorizzazione di polinomi

Metodi principali:

1. **Raccoglimento a fattore comune:** $ax + ay = a(x + y)$
2. **Raccoglimento per gruppi:** $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$
3. **Prodotti notevoli inversi:**
   - Quadrato di binomio: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
   - Differenza di quadrati: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4. **Trinomio di secondo grado:** $ax^2 + bx + c$ (metodo somma-prodotto o formula del discriminante)

Esempi risolti

Fattore comune: $6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ oppure $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
Per gruppi: $x^3 - 4x^2 - x + 4 = x^2(x - 4) - 1(x - 4) = (x^2 - 1)(x - 4)$
$= (x - 1)(x + 1)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = -1, 1, 4$

Fattorizzazione di un trinomio di secondo grado

Idea: per fattorizzare $ax^2 + bx + c$ si cercano le radici dell'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$.

Metodo somma-prodotto (quando $a = 1$ e i numeri sono "semplici"):

$$x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2), \quad r_1 + r_2 = -b, \quad r_1 r_2 = c$$

Esempio 1: $x^2 - 5x + 6 \;\Rightarrow$ somma $= 5$, prodotto $= 6$
Radici: $r_1 = 2,\; r_2 = 3$ quindi $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Formula del discriminante (valida sempre):

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Esempio 2: $2x^2 + 3x - 2 \;\Rightarrow\; \Delta = 25,\; x_1 = \frac{1}{2},\; x_2 = -2$
Fattorizzazione: $2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 2)$

Equazioni di 2º grado a una incognita:

$$ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$$

Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 2 \text{ reali distinte}, \quad \Delta = 0 \Rightarrow \text{unica soluzione}, \quad \Delta < 0 \Rightarrow \text{nessuna reale}.$$

Formula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Esempi

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2, 3.$ $2x^2 + 3x + 5 = 0$: $\Delta = 9 - 40 < 0.$

Fattorizzazione di un trinomio: errori tipici da evitare

Attenzione a non commettere questi errori comuni:

1. **Dimenticare il coefficiente a.**
   Se $ax^2 + bx + c = 0$, la scomposizione è $a(x - x_1)(x - x_2)$, non solo $(x - x_1)(x - x_2)$.

2. **Sbagliare i segni.**
   Ricorda: $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ e $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$.
   Es.: $x^2 - 5x + 6$: la somma è 5 (non -5), il prodotto 6.

3. **Applicare male il metodo somma-prodotto.**
   Funziona solo se $a = 1$ (o dopo aver diviso tutto per a). Es.: $2x^2 + 5x + 2$ non si fattorizza direttamente senza tenere conto del 2.

4. **Ignorare $\Delta < 0$.**
   Se il discriminante è negativo, non ci sono radici reali $\Rightarrow$ il trinomio non è fattorizzabile su $\mathbb{R}$.

5. **Saltare la verifica.**
   Espandi sempre $(x - x_1)(x - x_2)$ per controllare: aiuta a scoprire errori di calcolo.

Sistemi lineari: panoramica dei metodi

Idea chiave: un sistema lineare può essere risolto con metodi diversi. Se i passaggi sono **corretti** (operazioni equivalenti), le forme intermedie possono *differire*, ma l'**insieme delle soluzioni** è lo **stesso**.

Metodi principali

- **Sostituzione** (isolo una variabile e sostituisco nelle altre)
- **Riduzione** (combinazioni lineari di equazioni per eliminare variabili)
- **Eliminazione di Gauss** (operazioni di riga fino a forma triangolare)

Operazioni equivalenti (sicure): scambiare due equazioni; moltiplicare un'equazione per $k \neq 0$; sommare a un'equazione un multiplo di un'altra.
Conclusione: metodi diversi $\Rightarrow$ *stesso risultato finale*, se si rispettano le regole.

Metodo della *sostituzione* (sistemi 2×2)

Schema operativo

1. Isola una variabile da un'equazione (*es.* $x = \dots$).
2. Sostituisci nell'altra; ottieni una sola incognita.
3. Risolvi e torna indietro per l'altra variabile.

Esempio

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 7 - 2y$$

Sostituisco nella seconda: $3(7-2y) - 2y = 5 \Rightarrow 21 - 6y - 2y = 5 \Rightarrow -8y = -16 \Rightarrow y = 2$.
Poi $x = 7 - 2 \cdot 2 = 3$.

Soluzione: $(x, y) = (3, 2)$.

Metodo della *riduzione* (sistemi 2×2)

Idea: combinare linearmente le equazioni. Si possono cioé:

- moltiplicare le equazioni per un numero e poi **sommarle o sottrarle tra loro**.
- L'obiettivo è **eliminare una variabile**, così il sistema diventa più semplice.

Esempio (stesso sistema, passi diversi)

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

Sommo membro a membro (così da "annullare" la y):

$(x + 2y) + (3x - 2y) = 7 + 5 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3.$

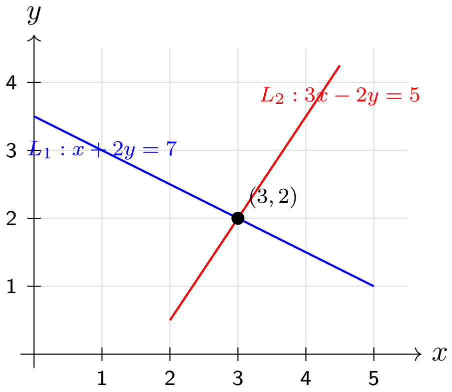
Sostituisco: $3 + 2y = 7 \Rightarrow y = 2.$

N.B.: i *passaggi intermedi* sono diversi rispetto alla sostituzione, ma il **risultato coincide**.

La soluzione del sistema corrisponde al **punto di intersezione** delle due rette.

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \quad (L_1 : y = \frac{7-x}{2}) \\ 3x - 2y = 5 \quad (L_2 : y = \frac{3x-5}{2}) \end{cases}$$

Soluzione: $(x, y) = (3, 2)$



Casi tipici per sistemi 2×2

Un sistema può risultare:

- **Determinato** (unica soluzione): rette che si incrociano in un punto (vedi esempi precedenti)
- **Indeterminato** (infinite soluzioni): rette coincidenti che si sovrappongono completamente:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

equazioni proporzionali (equivalenti):

La seconda si ottiene dividendo tutta la prima per 2

Risolvendo, otteniamo una riga tipo $0 = 0 \ \Rightarrow$ sistema *indeterminato*.

- **Impossibile** (nessuna soluzione): rette parallele distinte, *esempio:*

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Equazioni con coefficienti proporzionali ma termini noti no:

dividendo la prima per 2 si ha $x + 2y = 3 \neq 4 \Rightarrow$ rette parallele distinte

Risolvendo, otteniamo una riga tipo $0 = c \neq 0 \ \Rightarrow$ sistema *impossibile*.

Sistemi 3×3: metodi di risoluzione

Un sistema lineare 3×3 ha 3 equazioni e 3 incognite.

Metodi di risoluzione disponibili:

1. **Sostituzione:** Ricava una variabile da un'equazione e sostituisci nelle altre
    - Si riduce progressivamente: $3 \times 3 \to 2 \times 2 \to 1 \times 1$
2. **Riduzione (eliminazione):** Combina le equazioni per eliminare una variabile alla volta
3. **Eliminazione di Gauss:** Trasforma il sistema in forma triangolare con operazioni sulle righe

N.B.: tutti i metodi, se applicati correttamente, portano alla **stessa soluzione finale**.

Sistema di riferimento per gli esempi:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \quad \text{(Equazione 1)} \\ 2x - y + z = 3 \quad \text{(Equazione 2)} \\ x + 2y - z = 3 \quad \text{(Equazione 3)} \end{cases}$$

Risolviamo ora questo stesso sistema con metodi diversi per confrontare le tecniche.

Metodo di Eliminazione di Gauss - Fase di eliminazione

Sistema iniziale:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \quad \text{(Eq.1)} \\ 2x - y + z = 3 \quad \text{(Eq.2)} \\ x + 2y - z = 3 \quad \text{(Eq.3)} \end{cases}$$

Obiettivo: Trasformare in una forma "a gradini" (triangolare)

Passo 1 - Eliminare x da Eq.2 e Eq.3:

- Eq.2 $\leftarrow$ Eq.2 $-2\cdot$ Eq.1: $(2x - y + z) - 2(x + y + z) = 3 - 2 \cdot 6$
  $\Rightarrow 0x - 3y - z = -9$ (Eq.2 nuova)
- Eq.3 $\leftarrow$ Eq.3 $-$ Eq.1: $(x + 2y - z) - (x + y + z) = 3 - 6$
  $\Rightarrow 0x + y - 2z = -3$ (Eq.3 nuova)

Passo 2 - Eliminare y da Eq.3: Eq.3 $\leftarrow 3\cdot$ Eq.3 $+$ Eq.2:
$3(y - 2z) + (-3y - z) = 3(-3) + (-9)$
$\Rightarrow 0x + 0y - 7z = -18$ (Eq.3 finale)

Sistema triangolare ottenuto:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -7z = -18 \end{cases}$$

Da cui:

$$-7z = -18 \Rightarrow z = \frac{18}{7}, \qquad -3y - z = -9 \Rightarrow y = \frac{15}{7}, \qquad x = 6 - y - z = \frac{9}{7}.$$

Soluzione (metodo di Gauss)

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{9}{7}, \frac{15}{7}, \frac{18}{7}\right)}$$

Verifica: sostituendo in Eq.2 e Eq.3 $\Rightarrow$ equazioni verificate.

Sistema: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$

Passo 1. Da Eq.1: $x = 6 - y - z$. Sostituisci in Eq.2 e Eq.3:

$$2(6 - y - z) - y + z = 3 \;\Rightarrow\; -3y - z = -9$$
$$(6 - y - z) + 2y - z = 3 \;\Rightarrow\; y - 2z = -3$$

Passo 2. Sistema 2×2 in y, z:

$$\begin{cases} -3y - z = -9 \\ y - 2z = -3 \end{cases} \;\Rightarrow\; y = -3 + 2z \;\Rightarrow\; 9 - 7z = -9 \;\Rightarrow\; z = \frac{18}{7},\; y = \frac{15}{7}.$$

Passo 3. $x = 6 - y - z = \frac{9}{7}$.

Confronto dei metodi: stesso risultato finale

Gauss ha fornito:

$$(x, y, z) = \left(\frac{9}{7}, \frac{15}{7}, \frac{18}{7}\right)$$

Sostituzione (passi diversi) ha dato:

$$(x, y, z) = \left(\frac{9}{7}, \frac{15}{7}, \frac{18}{7}\right)$$

Conclusione

Metodi diversi $\Rightarrow$ *passaggi intermedi diversi* ma **soluzione identica**, se i passaggi sono corretti.

Nota pratica: *Gauss* è più sistematico e adatto anche a sistemi di grandi dimensioni. I metodi di *sostituzione* e *riduzione* restano ottimi per sistemi piccoli o con equazioni già ben organizzate.

Consigli pratici

- **Prima il dominio**: denominatori $\neq 0$; radicandi ≥ 0 (indice pari); argomenti dei log > 0.
- **Segna i passi implicativi**: quadrati, moltiplicazioni per fattori non noti non nulli.
- **Fattorizza dove puoi**: spesso trasforma il problema in prodotti con zeri evidenti.
- **Verifica** sostituendo nell'equazione originale; **scarta** le spurie.
- **Notazione chiara**: parentesi, passaggi intermedi, insieme soluzione evidenziato.