Precorso di Matematica

Lezione 1 – Introduzione all'Algebra

Alessandro Fiori Maccioni

Programma della lezione

1. L'oggetto della matematica: **proposizioni** e notazione logica di base
2. **Tabelle di verità** dei connettivi ($\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$)
3. Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — definizioni, inclusioni e **diagramma di Venn**
4. **Simboli matematici fondamentali** e esempi d'uso
5. Insiemi e loro definizioni; **intervalli** e rappresentazione su retta
6. **Prodotto cartesiano**, potenza di un insieme, insieme delle parti
7. Proprietà delle operazioni in $\mathbb{R}$: **somma/differenza**, **prodotto**, **quoziente**
8. **Frazioni**: MCD/mcm, equivalenza e operazioni con esempi
9. **Potenze**: leggi di calcolo, casi particolari, notazione scientifica
10. **Radici**: definizione, domini e proprietà (con razionalizzazione)
11. **Logaritmi**: definizione, proprietà, cambio di base, equazioni
12. **Polinomi**: operazioni, prodotti notevoli, fattorizzazione
13. **Frazioni algebriche**: dominio e semplificazione
14. **Esercizi di riepilogo** con soluzioni
15. **Consigli pratici** per lo studio e la verifica

L'oggetto della matematica: le proposizioni

Idea fondamentale: La matematica studia e costruisce **proposizioni**, cioè enunciati che possono essere *veri* o *falsi*.

Esempi di proposizioni:

- $2 + 3 = 5$ (vera)
- 7 è un numero pari (falsa)
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n + 1)$ è pari (vera)

Operatori logici fondamentali:

- **Negazione:** $\neg P$ ("non P")
- **Congiunzione:** $P \wedge Q$ ("P e Q")
- **Disgiunzione:** $P \vee Q$ ("P o Q")
- **Implicazione:** $P \Rightarrow Q$ ("se P allora Q")
- **Equivalenza:** $P \Leftrightarrow Q$ ("P se e solo se Q")
- **Quantificatori:** $\forall x$ ("per ogni x"), $\exists x$ ("esiste un x")

Tabelle di verità degli operatori logici

Tabella di verità: mostra il valore di verità di una proposizione composta a partire dai valori delle proposizioni semplici P e Q.

P	Q	P $\wedge$ Q	P $\vee$ Q	P $\Rightarrow$ Q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Interpretazione:

- $P \wedge Q$: vero solo quando entrambe le proposizioni sono vere
- $P \vee Q$: vero quando almeno una proposizione è vera
- $P \Rightarrow Q$: falso solo quando P è vera e Q è falsa

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$: definizioni, nomi ed inclusioni

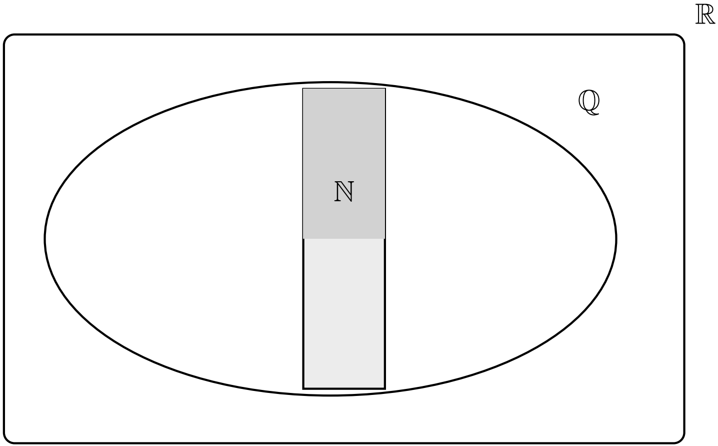
- $\mathbb{N}$ = **insieme dei numeri naturali**: $\{0, 1, 2, \dots\}$ (talvolta senza 0).
- $\mathbb{Z}$ = **insieme dei numeri interi relativi**: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{Q}$ = **insieme dei numeri razionali**: $\left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$.
- $\mathbb{R}$ = **insieme dei numeri reali** = $\mathbb{Q} \cup$ (irrazionali: $\sqrt{2}, \pi, e, \dots$).

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Esempi

$5 \in \mathbb{N}$; $\quad -3 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\quad \frac{7}{4} \in \mathbb{Q}$; $\quad \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Diagramma di Venn



La banda grigia è $\mathbb{Z}$, la parte più scura è $\mathbb{N}$;
l'ellisse $\mathbb{Q}$ contiene i razionali (in bianco, i razionali non interi);
il rettangolo $\mathbb{R}$ include anche gli irrazionali.

Simboli matematici fondamentali

Operatori aritmetici:

- somma: $+$, differenza: $-$, prodotto: $\cdot$, quoziente: $:$ $/$
- potenza: a^n, radice: $\sqrt[n]{a}$, logaritmo: $\log_a x$

Relazioni e confronti: uguaglianza: $=$, disuguaglianza: $\neq$, ordinamento: $<, >, \leq, \geq$

- valore assoluto: $|x|$, intervalli: (a, b), $[a, b]$, $\ldots$

Operatori logici:

- congiunzione: $\wedge$, disgiunzione: $\vee$, negazione: $\neg$
- implicazione: $\Rightarrow$, equivalenza: $\Leftrightarrow$, per ogni: $\forall$, esiste: $\exists$

Funzioni e notazioni speciali:

- funzione: $f : A \to B$, valore: $f(x)$
- sommatoria: $\sum$, produttoria: $\prod$

Esempi di applicazione

Operatori aritmetici: $2^3 = 8, \quad \sqrt[3]{27} = 3, \quad \log_2 8 = 3$

Relazioni e valore assoluto: $|-5| = 5, \quad 3 \leq 7, \quad x \in [2,5]$ significa $2 \leq x \leq 5$

Insiemi definiti per proprietà:

- In $\mathbb{N}$: $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 5\} = \{0,1,2,3,4,5\}$ (con $0 \in \mathbb{N}$)
- In $\mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < 1\} = (1,3)$

Operatori logici: $(x > 0) \wedge (x < 5)$ equivale a $x \in (0,5)$

Quantificatori: $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ (per ogni numero reale, il quadrato è non negativo)

Funzioni e notazioni: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$, quindi $f(3) = 9$

Sommatoria: $\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Produttoria: $\prod_{k=1}^{3} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Insiemi e loro definizioni

Appartenenza e inclusione:
appartenenza: $x \in A$, non appartenenza: $x \notin A$, inclusione: $A \subseteq B$, uguaglianza: $A = B$

Insiemi speciali: insieme vuoto: $\varnothing$, insieme universo: U

Operazioni su insiemi:

- unione: $A \cup B$, intersezione: $A \cap B$
- differenza: $A \setminus B$, complemento: A^c

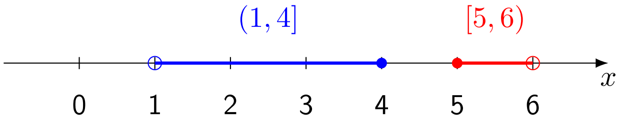
Metodi per descrivere insiemi:

- per elencazione: $\{1, 2, 3\}$
- per proprietà caratteristica: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ è pari}\}$
- per intervalli: $(1, 4]$

Rappresentazione su retta e intervalli

Notazione degli intervalli:

- (a, b): intervallo aperto (estremi esclusi)
- $[a, b]$: intervallo chiuso (estremi inclusi)
- $(a, b]$ e $[a, b)$: intervalli semiaperti



Operazioni tra intervalli:

$(1, 4] \cup [5, 6)$ (unione) $\quad (1, 4] \cap [3, 5) = [3, 4]$ (intersezione)

Legenda: $\bullet$ = estremo incluso, $\circ$ = estremo escluso

Somma e differenza in $\mathbb{R}$

Operazione di somma $(\mathbb{R}, +)$:

- **Chiusura:** se $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}$
- **Proprietà commutativa:** $a + b = b + a$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$
- **Proprietà associativa:** $(a + b) + c = a + (b + c)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$
- **Elemento neutro:** esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $a + 0 = 0 + a = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$
- **Elemento opposto:** per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $-a \in \mathbb{R}$ tale che $a + (-a) = 0$

Operazione di differenza:

- **Definizione:** $a - b = a + (-b)$ (somma dell'opposto)
- **NON commutativa:** $a - b \neq b - a$ in generale
- **NON associativa:** $(a - b) - c \neq a - (b - c)$ in generale

Esempi

Associatività: $(3 + 5) + 2 = 10 = 3 + (5 + 2)$

Non-commutatività: $7 - 2 = 5 \neq -5 = 2 - 7$

Non-associatività: $(10 - 3) - 4 = 3 \neq 11 = 10 - (3 - 4)$

Esercizi sulla somma algebrica

Esercizi

1) Verifica la proprietà commutativa della somma con due numeri reali a tua scelta
2) Trova l'elemento opposto di $a = \frac{5}{3}$ e di $b = -\sqrt{2}$
3) Verifica che la differenza non è associativa usando i numeri 8, 3 e 2
4) Calcola: $(4) + (+7) + (3)$ e verifica che il risultato non dipende dall'ordine delle operazioni

Soluzioni

1) Esempio: $2.1 + 4.3 = 6.4 = 4.3 + 2.1$ (proprietà verificata)
2) Opposto di $\frac{5}{3}$ è $-\frac{5}{3}$; opposto di $-\sqrt{2}$ è $+\sqrt{2}$
3) $(8-3) - 2 = 5 - 2 = 3$ mentre $8 - (3-2) = 8 - 1 = 7 \rightarrow 3 \neq 7$
4) $((-4) + 7) + (-3) = 3 + (-3) = 0$ oppure $(-4) + (7 + (-3)) = (-4) + 4 = 0$

Operazione di prodotto $(\mathbb{R}, \cdot)$:

- **Chiusura:** se $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}$
- **Proprietà commutativa:** $a \cdot b = b \cdot a$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$
- **Proprietà associativa:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$
- **Elemento neutro:** esiste $1 \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$
- **Proprietà distributiva:** $a(b + c) = ab + ac$ e $(b + c)a = ba + ca$

Proprietà aggiuntive:

- **Proprietà dello zero:** $a \cdot 0 = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$
- **Legge dell'annullamento:** se $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oppure $b = 0$
- **Regole dei segni:** $(+) \cdot (+) = (+)$, $(+) \cdot (-) = (-)$, $(-) \cdot (-) = (+)$

Esempi ed esercizi sul prodotto

Esempi

Distributiva: $2(3+5) = 2 \cdot 8 = 16 = 6 + 10 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$
Regola segni: $(-3) \cdot 7 = -21$
Annullamento: $(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 2$ o $x = -2$

Esercizi

1) Usa la proprietà distributiva per semplificare: $5(x-3) + 2(x+1)$
2) Determina il segno di: $(-2) \cdot 3 \cdot (-5) \cdot (-1)$

Soluzioni

1) $5(x-3) + 2(x+1) = 5x - 15 + 2x + 2 = 7x - 13$
2) Tre segni negativi $\Rightarrow$ risultato negativo: $(-2) \cdot 3 \cdot (-5) \cdot (-1) = -30$

Quoziente (divisione) e sue proprietà

Definizione: $a : b = \frac{a}{b}$ definita **solo per** $b \neq 0$

Proprietà fondamentali:

- **NON commutativa:** $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$ in generale
- **NON associativa:** $\left(\frac{a}{b}\right) : c \neq a : \left(\frac{b}{c}\right)$ in generale
- **Elemento neutro:** $\frac{a}{1} = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$

Proprietà distributiva (limitata):

- **Al numeratore:** $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ per $c \neq 0$
- **Al denominatore:** $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ in generale

Altre proprietà importanti: (con $b, d \neq 0$)

$$\text{Prodotto di frazioni:} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{1}$$

$$\text{Inverso moltiplicativo:} \quad \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \tag{2}$$

Frazioni: MCD, mcm e equivalenza

Massimo Comun Divisore (MCD): il più grande numero che divide entrambi i numeri

- Esempio: MCD(12, 18) = 6
- Uso: ridurre le frazioni ai minimi termini

minimo comune multiplo (mcm): il più piccolo multiplo comune di due numeri

- Esempio: mcm(4, 6) = 12
- Uso: sommare/sottrarre frazioni (denominatore comune)

Equivalenza delle frazioni:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad (b, d \neq 0)$$

Esempi

Riduzione ai minimi termini: $\frac{12}{18} = \frac{12 \div 6}{18 \div 6} = \frac{2}{3}$ (divido per MCD = 6)

Denominatore comune: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \to$ mcm(4,6) = 12 $\to \frac{3}{12} + \frac{2}{12}$

Equivalenza: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ perché $2 \times 12 = 3 \times 8 = 24$

Operazioni tra frazioni

$$\text{Somma/Differenza:} \quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \tag{4}$$

$$\text{Prodotto:} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{5}$$

$$\text{Divisione:} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \tag{6}$$

$$\text{Frazione di frazioni:} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \tag{7}$$

Metodo pratico per somma/differenza:

1. Trova il mcm dei denominatori
2. Trasforma le frazioni con denominatore comune
3. Somma/sottrai i numeratori
4. Riduci ai minimi termini se possibile

Esempi completi

Somma: $\frac{2}{3}+\frac{5}{6} \rightarrow \text{mcm}(3,6)=6 \rightarrow \frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

Prodotto: $\frac{7}{10}\cdot\frac{15}{14}=\frac{105}{140} \rightarrow \text{MCD}(105,140)=35 \rightarrow \frac{3}{4}$

Divisione: $\frac{3}{4}:\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$

Frazione di frazioni: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

Esempio più complesso: $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}} \rightarrow$ prima risolvo numeratore e denominatore:

- Numeratore: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
- Denominatore: $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9}{12}-\frac{2}{12}=\frac{7}{12}$
- Risultato: $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{12}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{12}{7}=\frac{60}{42}=\frac{10}{7}$

Esempi

Divisione semplice: $\frac{6}{-2} = -3$
Divisione tra frazioni: $\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$
Distributiva al numeratore: $\frac{3+7}{5} = \frac{10}{5} = 2$ e $\frac{3}{5} + \frac{7}{5} = \frac{10}{5} = 2$
Non-distributiva al denominatore: $\frac{10}{3+2} = \frac{10}{5} = 2$ ma $\frac{10}{3} + \frac{10}{2} = \frac{10}{3} + 5 = \frac{25}{3} \neq 2$

Esercizi

1) Calcola: $\frac{5}{12} - \frac{1}{8}$
2) Calcola: $\frac{9}{20} : \frac{3}{5}$
3) Verifica che la divisione non è commutativa usando $a = 6$ e $b = 2$

Soluzioni

1) $\frac{5}{12} - \frac{1}{8} = \frac{10}{24} - \frac{3}{24} = \frac{7}{24}$ **2)** $\frac{9}{20} : \frac{3}{5} = \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{3} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ **3)** $\frac{6}{2} = 3$ ma $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq 3$

Potenze: leggi di calcolo e casi particolari

Per $a \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

- $a^0 = 1$ (per $a \neq 0$); $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Esponenti razionali: $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ per $a > 0$.
- **Attenzione:** $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$; $\sqrt{a^2} = |a|$.

Esempi

$5^{-2} = \frac{1}{25}$. $\quad (2^3)^4 = 2^{12} = 4096$.
$9^{3/2} = (\sqrt{9})^3 = 27$. $\quad (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Esercizi

Semplifica: $\dfrac{2^7 \cdot 2^{-3}}{2^2}$. Scrivi in notazione scientifica: $8\,250\,000$.

Radici: definizione e domini

Definizione: Per $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\sqrt[n]{a} = r \geq 0 \text{ tale che } r^n = a$$

Terminologia:

- n = **indice della radice**
- a = **radicando**
- r = **radice** (risultato)

Domini e restrizioni:

- **Indice pari** ($n = 2, 4, 6, \ldots$): ammesso solo $a \geq 0$ in $\mathbb{R}$
- **Indice dispari** ($n = 3, 5, 7, \ldots$): ammessi tutti i valori reali (anche $a < 0$)

Esempi di dominio

Radici pari: $\sqrt{-4}$ non esiste in $\mathbb{R}$, ma $\sqrt{4} = 2$
Radici dispari: $\sqrt[3]{-8} = -2$ perché $(-2)^3 = -8$
Caso speciale: $\sqrt{a^2} = |a|$ (sempre non negativo!)

Proprietà delle radici

Proprietà fondamentali: (per $a, b \geq 0$, $n \geq 2$)

$$\text{Radice di un prodotto:} \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \tag{8}$$

$$\text{Radice di un quoziente:} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0) \tag{9}$$

$$\text{Composizione di radici:} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \tag{10}$$

$$\text{Potenza sotto radice:} \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \tag{11}$$

Errore comune da evitare:

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ in generale

Verifica delle proprietà

Prodotto: $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6 = 2 \cdot 3 = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$
Errore somma: $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ ma $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \neq 5$

Esercizi sulle radici

Esempi risolti

Semplificazione: $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Radice di frazione: $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

Razionalizzazione: $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

Esercizi da svolgere

1) Semplifica: $\sqrt{72}$

2) Razionalizza: $\frac{2}{\sqrt{3}}$

3) Calcola: $\sqrt[3]{-64}$

4) Verifica l'uguaglianza: $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16}$

Soluzioni

1) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$

2) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3) $\sqrt[3]{-64} = -4$ perché $(-4)^3 = -64$

4) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

Logaritmo: definizione e domini

Definizione: Per $a > 0$, $a \neq 1$ (base) e $x > 0$ (argomento):

$$\log_a x = \text{l'unico } y \in \mathbb{R} \text{ tale che } a^y = x$$

Restrizioni del dominio:

- **Base:** $a > 0$ e $a \neq 1$
- **Argomento:** $x > 0$ (sempre positivo!)
- Il logaritmo può assumere qualsiasi valore reale

Basi speciali:

- $\ln x = \log_e x$ (logaritmo naturale, base $e \approx 2.718$)
- $\log x = \log_{10} x$ (logaritmo decimale, base 10)

Esempi fondamentali

$\log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$ $\qquad$ $\log_{10} 1000 = 3$ perché $10^3 = 1000$

$\ln e = 1$ perché $e^1 = e$ $\qquad$ $\log_a 1 = 0$ per ogni base a (perché $a^0 = 1$)

Proprietà fondamentali dei logaritmi

Proprietà operative: (stessa base $a > 0$, $a \neq 1$, argomenti > 0)

$$\text{Logaritmo di un prodotto:} \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \tag{12}$$

$$\text{Logaritmo di un quoziente:} \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \tag{13}$$

$$\text{Logaritmo di una potenza:} \quad \log_a(x^k) = k \cdot \log_a x \tag{14}$$

Proprietà inverse:

- $a^{\log_a x} = x$ per ogni $x > 0$
- $\log_a(a^t) = t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

Esempi di applicazione

$\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$

$\log_{10}(2^5) = 5 \cdot \log_{10} 2 \approx 5 \cdot 0.301 = 1.505$

Formula del cambio di base: per $a, b > 0$, $a, b \neq 1$:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Risoluzione di equazioni:

- **Esponenziali:** $a^{f(x)} = b \Rightarrow f(x) = \log_a b$
- **Logaritmiche:** $\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c$

Esempi risolti

Equazione esponenziale: $2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.322$
Equazione logaritmica: $\log_3(x-1) = 2 \Rightarrow x - 1 = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 10$
Cambio di base: $\log_2 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2} = \frac{1}{\log_{10} 2} \approx 3.322$

Esercizi sui logaritmi

Esercizi

1) Risolvi: $10^{2t} = 7$
2) Risolvi: $\ln(x) = \frac{1}{2}$
3) Calcola: $\log_5 25$, $\log_3 \frac{1}{9}$

Soluzioni

1) $2t = \log_{10} 7 \Rightarrow t = \frac{\log_{10} 7}{2} = \frac{\ln 7}{2 \ln 10}$
2) $x = e^{1/2} = \sqrt{e} \approx 1.649$
3) $\log_5 25 = 2$; $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$

Polinomi: Definizioni e operazioni fondamentali

Polinomio: espressione algebrica della forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Terminologia:

- **Coefficienti:** $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ (numeri reali)
- **Grado:** la massima potenza di x con coefficiente non nullo
- **Termine noto:** a_0 (termine senza x)
- **Monomio:** polinomio con un solo termine

Operazioni tra polinomi:

- **Somma/Differenza:** si sommano/sottraggono i coefficienti dei termini simili
- **Prodotto:** si applica la proprietà distributiva

Esempi

Somma: $(2x^2 + 3x - 1) + (x^2 - 2x + 4) = 3x^2 + x + 3$

Prodotto: $(x + 2)(3x - 1) = 3x^2 - x + 6x - 2 = 3x^2 + 5x - 2$

Prodotti notevoli

Formule fondamentali:

$$\text{Quadrato di binomio:} \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \tag{15}$$

$$\text{Differenza di quadrati:} \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \tag{16}$$

$$\text{Cubo di binomio:} \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \tag{17}$$

$$\text{Somma/differenza di cubi:} \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \tag{18}$$

Esempi di espansione

$(3x - 2)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$
$(2x + 5)(2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$
$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Strategia: riconoscere la forma per applicare direttamente la formula invece di moltiplicare termine per termine.

Fattorizzazione dei polinomi

Metodi principali:

1. **Raccoglimento a fattore comune:** $ax + ay = a(x + y)$
2. **Raccoglimento per gruppi:** $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$
3. **Prodotti notevoli inversi:** riconoscere le forme $a^2 \pm 2ab + b^2$ e $a^2 - b^2$
4. **Trinomio di secondo grado:** $ax^2 + bx + c$

Esempi passo per passo

Fattore comune: $6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x - 3)$
Differenza di quadrati: $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x + 5)(2x - 5)$
Quadrato di binomio: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
Trinomio: $2x^2 + 7x + 3 \rightarrow$ cerco due numeri che moltiplicati danno $2 \cdot 3 = 6$ e sommati danno $7 \rightarrow 6 = 1 \cdot 6 \rightarrow (2x + 1)(x + 3)$

Verifica: espandere sempre il risultato per controllare la correttezza.

Frazioni algebriche: dominio e semplificazione

Definizione: Una frazione algebrica è un'espressione del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi.

Dominio: insieme dei valori di x per cui il denominatore è diverso da zero

$$\text{Dominio} = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$$

Procedimento per la semplificazione:

1. Fattorizza numeratore e denominatore
2. Cancella i fattori comuni
3. **Importante:** il dominio rimane quello originale

Esempio

$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}$ con $x \neq 3$

Dominio originale: $x \neq 3$ (resta invariato dopo la semplificazione)

Esercizi

1) Semplifica e trova il dominio: $\frac{2x^2-8}{x^2-4}$
2) Calcola: $\frac{x}{x-2}+\frac{2}{x-2}$
3) Fattorizza e semplifica: $\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$

Soluzioni

1) Fattorizzo: $\frac{2(x^2-4)}{x^2-4}=\frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=2$ Dominio: $x\neq\pm 2$
2) $\frac{x}{x-2}+\frac{2}{x-2}=\frac{x+2}{x-2}$ con $x\neq 2$
3) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x+2}{x-3}$ con $x\neq\pm 3$

Esercizi (proprietà operazioni, potenze, radici, log)

1. Dimostra con un controesempio che la sottrazione non è associativa.
2. Semplifica: $(3x-2)(x+5)-[x(x+5)-2(x+5)]$.
3. Calcola $\frac{5}{12}-\frac{1}{8}+\frac{3}{4}$.
4. Semplifica $\frac{2^{n+3}\cdot 4^{n-1}}{8^n}$ $(n \in \mathbb{Z})$.
5. Razionalizza $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$.
6. Risolvi $3^{2t-1}=7$.
7. Risolvi $\log_2(x-1)=3$.

Soluzioni

1. $(10-3)-4=3\neq 10-(3-4)=11.$
2. $2x^2+10x.$
3. $\frac{25}{24}.$
4. $4^{n-1}=2^{2n-2},\ 8^n=2^{3n}\Rightarrow \frac{2^{n+3}2^{2n-2}}{2^{3n}}=2^{(3n+1)-3n}=2.$
5. $\sqrt{3}+1.$
6. $2t-1=\log_3 7\Rightarrow t=\frac{1+\log_3 7}{2}.$
7. $x-1=2^3=8\Rightarrow x=9.$

Consigli pratici

- **Controlli standard**: dominio, segni, ordine delle operazioni; fattorizza quando utile.
- **Radici e potenze**: ricorda $\sqrt{a^2} = |a|$ e non $\sqrt{a^2} = a$.
- **Frazioni**: usa MCD per ridurre; per somme usa il mcm dei denominatori.
- **Logaritmi**: verifica sempre base $(a > 0,\ a \neq 1)$ e argomento $(x > 0)$.
- **Stima di massima**: prima di calcolare, valuta un ordine di grandezza per evitare errori grossolani.
- **Verifica inversa**: dopo una scomposizione o soluzione, *ricompone* o *sostituisci* per controllare.
- **Notazione chiara**: usa parentesi e scrivi passaggi intermedi—riduce gli errori e aiuta il ripasso.