Prova scritta di Analisi Matematica 3 12.09.2025 Sol. (1)

1. È immediato notare che lungo gli assi coordinati ($y=0$ e $x=0$) la funzione all'interno del limite tende a 0.

Seguendo il suggerimento analizziamo il suo comportamento lungo la parabola $x=y^2$. Abbiamo

$$\lim_{y\to 0} \frac{2y^4}{y^4+y^4} = 1 \neq 0.$$

Di conseguenza il limite non esiste.

2. Utilizzando la regola della catena abbiamo

$$f_\rho = f_x x_\rho + f_y y_\rho + f_z z_\rho = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y$$

$$f_{\rho\theta} = (f_\rho)_\theta = -\sin\theta f_x + \cos\theta\left(f_{xx}x_\theta + f_{xy}y_\theta + f_{xz}z_\theta\right)$$
$$+ \cos\theta f_y + \sin\theta\left(f_{xy}x_\theta + f_{yy}y_\theta + f_{yz}z_\theta\right)$$

$$= -\sin\theta f_x + \cos\theta\left(-\rho\sin\theta f_{xx} + \rho\cos\theta f_{xy} + 0\right)$$
$$+ \cos\theta f_y + \sin\theta\left(-\rho\sin\theta f_{xy} + \rho\cos\theta f_{yy} + 0\right)$$

$$= -\sin\theta f_x + \cos\theta f_y - \rho\sin\theta\cos\theta f_{xx} + \rho\sin\theta\cos\theta f_{yy}$$
$$+ \rho(\cos^2\theta - \sin^2\theta) f_{xy}.$$

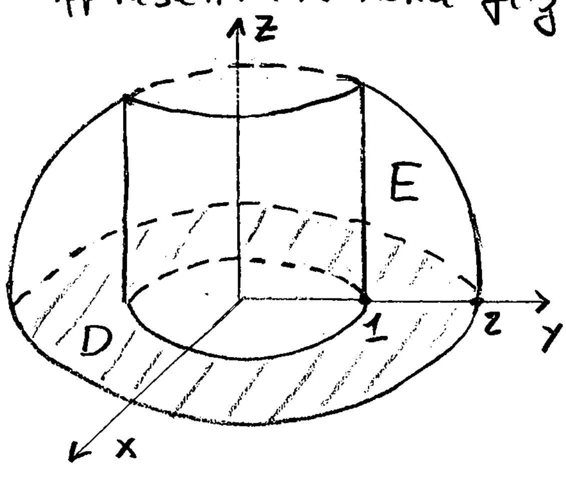
Prova scritta di Analisi Matematica 3 12.03.2015 f.2

$$f_u = f_x x_u + f_y y_u + f_z u = a f_x + b f_y + f_z$$

$$f_{uu} = (f_u)_u = a(f_{xx} x_u + f_{xy} y_u + f_{xz} z_u)$$
$$+ b(f_{xy} x_u + f_{yy} y_u + f_{yz} z_u)$$
$$+ f_{xz} x_u + f_{yz} y_u + f_{zz} z_u$$

$$= a^2 f_{xx} + 2ab f_{xy} + 2a f_{xz} + b^2 f_{yy}$$
$$+ 2b f_{yz} + f_{zz}.$$

3. E è il dominio normale rispetto al piano xy rappresentato nella figura.



Dunque, impostiamo l'integrale per segmenti verticali.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$$

$$\iiint_E (2z+1)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (2z+1)\,dz$$

$$= \iint_D (z^2+z)\Big|_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx\,dy = \iint_D \left(4 - x^2 - y^2 + \sqrt{4-x^2-y^2}\right) dx\,dy$$

Proseguiamo passando alle coordinate polari.

D è descritto da $1 \le \rho \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Quindi, ricordando che $dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\theta$,

$$\iint_D \left(4 - x^2 - y^2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right) dx\,dy = \iint_{[1,2]\times[0,2\pi]} \left(4 - \rho^2 + \sqrt{4-\rho^2}\right) \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_1^2 \left(4 - \rho^2 + \sqrt{4-\rho^2}\right) \frac{-1}{2}\, d(4-\rho^2)$$

$$= -\pi \int_1^2 \left(4 - \rho^2 + \sqrt{4-\rho^2}\right) d(4-\rho^2)$$

$$= -\pi \left(\frac{(4-\rho^2)^2}{2} + \frac{2}{3}(4-\rho^2)^{3/2} \right) \Bigg|_1^2$$

$$= \pi\left(\frac{9}{2} + 2\sqrt{3}\right).$$

4.

a) $\varphi(\pi/6) = (\sqrt{3}, 1, 0) \neq (-\sqrt{3}, 1, 0) = \varphi(5/6\pi)$,

quindi la curva non è chiusa.

$$\varphi'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 2\cot g\, t)$$

$$|\varphi'(t)| = 2\sqrt{1 + \cot g^2 t} = \frac{2}{\sin t} \geq 2.$$

La curva è regolare e

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\cot g^2 t}}(-\sin t, \cos t, \cot g\, t).$$

b) Abbiamo $ds = |\varphi'(t)|\,dt = \dfrac{2\,dt}{\sin t}$,

$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{2\,dt}{\sin t},$$

$$\int_\gamma y\, ds = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 2\sin t \cdot \frac{2}{\sin t}\,dt = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 4\,dt = \frac{8}{3}\pi.$$

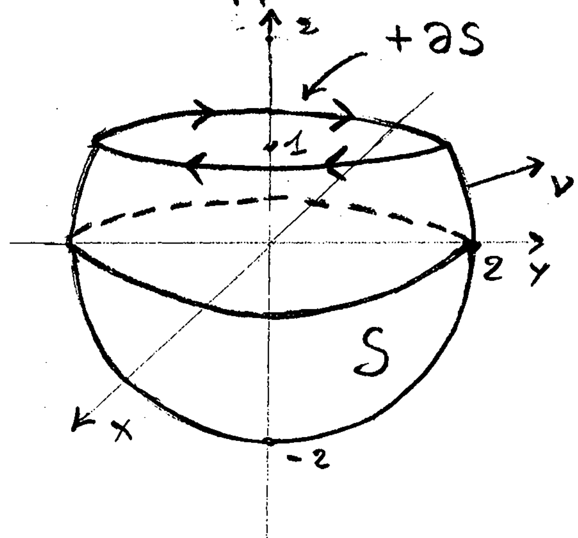
c) Da $dx = -2\sin t\,dt$, $dy = 2\cos t\,dt$, $dz = 2\cot g\, t\,dt$

otteniamo

$$\int_\gamma \omega = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(-16\cos^3 t \sin t + 2\cot g\, t - 2\cot g\, t\right) dt$$

$$= 4\int_{\pi/6}^{5\pi/6} -4\cos^3 t \sin t \, dt = 4 \cos^4 t \Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} = 0.$$

5. La superficie S e la sua orientazione sono rappresentate nella figura.



Il flusso richiesto si può calcolare direttamente mediante la definizione oppure più rapidamente mediante il Teorema di Stokes. Seguiamo questa seconda strada.

$$\iint_S (\mathrm{rot}\, F, \nu)\, d\sigma \overset{\text{T. di Stokes}}{=} \int_{+\partial S} (F, T)\, ds.$$

Il bordo di S orientato positivamente ($+\partial S$) è una circonferenza contenuta nel piano $z=1$ con centro sull'asse z, raggio 3 (si ricava ponendo $z=1$ nell'equazione della sfera) e orientata secondo la figura.

Per comodità parametrizziamo ∂S nel senso opposto ($-\partial S$), tenendo conto che in questo modo

Prova scritta di Analisi Matematica 3 18.09.2025

Sol. 6

l'integrale di linea cambia segno. Abbiamo le equazioni parametriche $\varphi(t)$ di $-\partial S$

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = \sqrt{3}\sin t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Dunque

$$\int_{+\partial S} (F, T)\, ds = -\int_{-\partial S} (F, T)\, ds = -\int_0^{2\pi} (F(\varphi(t)), \varphi'(t))\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \Big((1, \sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t), (-\sqrt{3}\sin t, \sqrt{3}\cos t, 0) \Big)\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} (-\sqrt{3}\sin t + 3\cos^2 t)\, dt = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} \sin t\, dt - 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt$$

$$= 0 - 3\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = -\frac{3}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -3\pi.$$

Nota. Alternativamente, si può risolvere l'esercizio applicando due volte il Teorema di Stokes e passando al calcolo del flusso di F attraverso il disco $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 3,\ z = 1\}$ orientato da $-\bar{k}$.