

Università di Cagliari
 Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Geometria 1
 11 settembre 2025

Esercizio 1

Si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $f(1,1,0) = (1,1,0,0)$, $f(1,0,0) = (0,0,0,1)$, $f(0,2,1) = (2,0,0,0)$, e l'applicazione lineare $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ la cui matrice associata rispetto alle basi $\{(-1,0,0,0), (1,1,0,0), (0,0,0,1), (0,0,-1,0)\}$ di \mathbb{R}^4 e $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Trovare $(g \circ f)(1,2,0)$
 b) Stabilire se l'insieme $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid g(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ è una matrice antisimmetrica}\}$ è o no un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 . In caso affermativo, si trovi una base di W .

Esercizio 2

Dato il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 & = h - 1 \\ 6x_1 + (k+2)x_2 + x_3 + 2x_4 + (4-k)x_5 & = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + (k+1)x_3 + 6x_4 + 6x_5 & = 0 \end{cases}$$

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 di dimensione 3.

Esercizio 3

Sia

$$V = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A = -A^t\}$$

lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche di ordine 3 ad entrate reali ed f l'endomorfismo di V definito da

$$f \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x + ky & kx + y + kz \\ -x - ky & 0 & 2z \\ -kx - y - kz & -2z & 0 \end{pmatrix}$$

Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ stabilire se f è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di V formata da autovettori di f .