LE SOLUZIONI DELL'ESAME SCRITTO DI GEOMETRIA 1

DEL 11 SETTEMBRE 2025

ESERCIZIO 1

a) Si noti che $B = \{ \underset{v_1}{(1,1,0)}, \underset{v_2}{(1,0,0)}, \underset{v_3}{(0,2,1)} \}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, perché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Poniamo inoltre $B' = \{ \underset{v'_1}{(-1,0,0,0)}, \underset{v'_2}{(1,1,0,0)}, \underset{v'_3}{(0,0,0,1)}, \underset{v'_4}{(0,0,-1,0)} \}$

e $B'' = \left\{ \underset{v''_1}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v''_2}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v''_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v''_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \right\}$, basi di $\mathbb{R}^4$ e di $M_2(\mathbb{R})$ rispettivamente.

Esprimiamo il vettore $v = (1,2,0)$ come combinazione lineare dei vettori di B:

$$\begin{aligned}(1,2,0) &= \lambda_1 (1,1,0) + \lambda_2 (1,0,0) + \lambda_3 (0,2,1) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 , \lambda_1 + 2\lambda_3 , \lambda_3)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 2 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1 - 2 = -1$$

Quindi $\quad v = 2\, v_1 - 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3.$

Allora

$$(g \circ f)(1,2,0) = g(f(v)) = g(f(2v_1 - 1v_2 + 0v_3))$$

$$= g(2f(v_1) - f(v_2)) = g(2 \cdot (1,1,0,0) - (0,0,0,1))$$

$$= g(2,2,0,1)$$

$$= g(2v_2' - v_3')$$

$$= 2g(v_2') - g(v_3')$$

$$= 2 \cdot (1 \cdot v_2'' + 1 \cdot v_4'') - (v_1'' - 2v_3'')$$

$$= -v_1'' + 2v_2'' + 2v_4'' + 2v_3''$$

$$= -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Poniamo $X = \{\text{matrici anti-simmetriche di ordine } 2\}$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

X è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

Ora consideriamo
$$W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, g(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X \}.$$

Verifichiamo che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

Intanto $W \neq \emptyset$ perché $g(0,0,0,0) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ lineare}}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in X$
$\Rightarrow (0,0,0,0) \in W$.

Inoltre $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ $\forall v, v' \in W$

perché X è sottospazio
$$g(\lambda v + \lambda' v') = \lambda \underbrace{g(v)}_{\substack{\in X \\ \uparrow \\ \text{perché } v \in W}} + \lambda' \underbrace{g(v')}_{\substack{\in X \\ \uparrow \\ \text{perché } v' \in W}} \in X$$

Troviamo una
base di W.

Sia $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Esprimiamo v come combinazione lineare dei vettori della base di $\mathbb{R}^4$
$$B' = \{ v_1', v_2', v_3', v_4' \}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1(-1,0,0,0) + \lambda_2(1,1,0,0) + \lambda_3(0,0,0,1) + \lambda_4(0,0,-1,0)$$

$$= (-\lambda_1+\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_4, \lambda_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1+\lambda_2 = x_1 \\ \lambda_2 = x_2 \\ -\lambda_4 = x_3 \\ \lambda_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = x_2,\ \lambda_3 = x_4,\ \lambda_4 = -x_3 \quad \lambda_1 = x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow v = (x_2 - x_1) v_1' + x_2 v_2' + x_4 v_3' - x_3 v_4'$$

Allora $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W \Leftrightarrow g(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X \Leftrightarrow$

$$g((x_2 - x_1) v_1' + x_2 v_2' + x_4 v_3' - x_3 v_4') \in X \Leftrightarrow$$

$$(x_2 - x_1) g(v_1') + x_2 g(v_2') + x_4 g(v_3') - x_3 g(v_4') \in X$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(v_1'' + 2v_2'') + x_2(v_2'' + v_4'') + x_4(v_1'' - 2v_3'') + - x_3(v_3'' + v_4'') \in X$$

$$\Leftrightarrow (-x_1 + x_2 + x_4) v_1'' + (-2x_1 + 2x_2 + x_2) v_2'' + + (-2x_4 - x_3) v_3'' + (x_2 - x_3) v_4'' \in X$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_4 & -4x_1 + 6x_2 \\ -2x_4 - x_3 & -x_2 + x_3 \end{pmatrix} \in X$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 \qquad - x_4 = 0 \\ \quad - x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 = -(-2x_4 - x_3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 \qquad - x_4 = 0 \\ \quad - x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -1 & -2 \end{pmatrix} = A \qquad \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \geq 2$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_4 = t \\ \qquad x_3 \qquad = t \\ -4x_1 - x_3 - 2x_4 = -6t \end{cases} \qquad x_2 = t$$

da cui $x_3 = t$ e quindi $\begin{cases} 2x_1 - 2x_4 = 2t \\ -4x_1 - 2x_4 = 5t \end{cases}$

e quindi $6x_1 = -3t$ da cui $x_1 = -\frac{t}{2}$

e $x_4 = -\frac{t}{2} - t = -\frac{3}{2}t$.

Conclusione

$$W = \{(-\tfrac{t}{2}, t, t, -\tfrac{3}{2}t) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$= L(-\tfrac{1}{2}, 1, 1, -\tfrac{3}{2})$$

$$= L(-1, 2, 2, -3).$$

Una base di W è $\{(-1, 2, 2, -3)\}$.

ESERCIZIO 2 - L'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = h-1 \\ 6x_1 + (k+2)x_2 + x_3 + 2x_4 + (4-k)x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + (k+1)x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ se e solo se il sistema è omogeneo, cioè $h-1=0$, cioè $h=1$.

Tale sottospazio V_A ha dimensione pari a

$$\dim(V_A) = 5 - rg(A)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & k+2 & 1 & 2 & 4-k \\ 2 & -4 & k+1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

è la matrice dei coefficienti. Quindi

$$3 = \dim(V_A) = 5 - rg(A)$$

se e solo se $rg(A) = 2$.

Dobbiamo trovare k affinché $rg(A) = 2$.

Si noti che $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$.

Affinché $rg(A) = 2$ occorre e basta che tutti i minori orlati di $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ di ordine 3 abbiano $\det = 0$.

Pertanto $rg(A) = 2 \iff$

$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & k+2 & 1 \\ 2 & -4 & k+1 \end{pmatrix} = 0 \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 2 & k+1 & 6 \end{pmatrix} = 0 \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 4-k \\ 2 & k+1 & 6 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4-k & k+2 & 1 \\ 6 & -4 & k+1 \end{pmatrix} = -2\cdot\det\begin{pmatrix} 4-k & 1 \\ 6 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\cdot(4k+4-k^2-k-6) = 2(k^2-3k+2)$$

$$= 2\cdot(k-2)\cdot(k-1)$$

$$0 = 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k+1 & 6 \end{pmatrix} = 6-2k-2 = 4-2k$$

$$0 = 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 4-k \\ k+1 & 6 \end{pmatrix} = 6-4k-4-k^2+k$$

$$= k^2-3k+2 = (k-2)(k-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} k=2 \quad \vee \quad k=1 \\ k=2 \\ k=2 \quad \vee \quad k=1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$k=2.$$

ESERCIZIO 3

Troviamo innanzitutto una base di V.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_3} \Bigg)$$

Si verifica facilmente che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e quindi $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ è base di V.

Troviamo ora la matrice associata a f rispetto a B.

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ -1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1 + k v_2$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ -k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = k v_1 + v_2$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 2 \\ -k & -2 & 0 \end{pmatrix} = k v_2 + 2 v_3$$

$$A = M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 0 \\ k & 1-\lambda & k \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & k \\ k & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - k^2\right)$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda-k)(1-\lambda+k)$$

Vi sono dunque i seguenti autovalori, a seconda del valore di $k \in \mathbb{R}$:

k	AUTOVALORI	MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA
1	2	2
	0	1
-1	2	2
	0	1
0	2	1
	1	2
$k \neq 0, 1, -1$	2	1
	$1+k$	1
	$1-k$	1

- <u>CASO $k=1$</u>

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(2) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = s \\ -x_2 + x_3 = -s \end{cases}$$

$x_1 = s$

da cui $x_1 = s$, $x_2 = s$, $x_3 = 0$

Quindi
$$\begin{aligned} V(2) &= \{ s v_1 + s v_2 + 0 \cdot v_3 : s \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ s(v_1 + v_2) : s \in \mathbb{R} \} \\ &= L(v_1 + v_2) \end{aligned}$$

$m_g(2) = \dim V(2) = 1 \neq m_a(2) \Rightarrow f$ NON è diagonalizzabile

- <u>CASO $k=-1$</u>

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(2) \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{s=x_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_2 = -s \\ x_2 + x_3 = -s \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = s,\ x_2 = -s,\ x_3 = 0$$

$$V(2) = \{ s v_1 - s v_2 \ ;\ s \in \mathbb{R} \} = L(v_1 - v_2)$$

$$m_g(2) = \dim(V(2)) = 1 \neq m_a(2) \Rightarrow$$

f NON è diagonalizzabile

· CASO $k \neq 1,\ k \neq -1,\ k \neq 0$

In tal caso già sappiamo che f è diagonalizzabile, dato che ammette $3 = \dim(V)$ autovalori reali e distinti. Troviamo gli autospazi.

$$\underset{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{\overset{\parallel}{v}} \in V(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + k x_2 \\ k x_1 + x_2 + k x_3 \\ 2 x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + k x_2 = 0 \\ k x_1 - x_2 + k x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & k & 0 \\ k & -1 & k \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + k x_2 = 0 \\ k x_1 - x_2 = -ks \end{cases}$$

$\det \neq 0$

$x_3 = s$

$$x_1 = \frac{1}{1-k^2} \det \begin{pmatrix} 0 & k \\ -ks & -1 \end{pmatrix} = \frac{k^2 s}{1-k^2}$$

$$x_2 = \frac{1}{1-k^2} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k & -ks \end{pmatrix} = \frac{ks}{1-k^2}$$

$$x_3 = s .$$

$$V(2) = \left\{ \frac{k^2}{1-k^2} s\, v_1 + \frac{ks}{1-k^2} v_2 + s\, v_3 : s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(\frac{k^2}{1-k^2} v_1 + \frac{k}{1-k^2} v_2 + v_3 \right)$$

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(1-k) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (1-k) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + k x_2 \\ k x_1 + x_2 + k x_3 \\ 2 x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-k) x_1 \\ (1-k) x_2 \\ (1-k) x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k x_1 + k x_2 = 0 \\ k x_1 + k x_2 + k x_3 = 0 \\ (1+k) x_3 = 0 \end{cases} \underset{k \neq -1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} k x_1 + k x_2 = 0 \\ k x_1 + k x_2 + k x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = s, \quad x_2 = -s, \quad x_3 = 0$$

$x_1 = s$

$$\begin{pmatrix} k & k & 0 \\ k & k & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V(1-k) = \{ s v_1 - s v_2 : s \in \mathbb{R} \}$$

$$= L(v_1 - v_2)$$

$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(1+k) \iff$

$$\begin{pmatrix} x_1 + k x_2 \\ k x_1 + x_2 + k x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+k) x_1 \\ (1+k) x_2 \\ (1+k) x_3 \end{pmatrix} \underset{k\neq 0}{\iff} \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui $x_1 = s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 0$

$V(1+k) = \{ s v_1 + s v_2 : s \in \mathbb{R} \} = L(v_1 + v_2)$

Una base di V formata da autovettori di f è

$$\left\{ \frac{k^2}{1-k^2} v_1 + \frac{k}{1-k^2} v_2 + v_3, \quad v_1 - v_2, \quad v_1 + v_2 \right\}$$

- CASO $k = 0$

$$M_{\mathcal{BB}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ matrice diagonale $\Longrightarrow$ f è diagonalizzabile e

la base di partenza $\{v_1, v_2, v_3\}$ è già una base di V formata da autovettori di f