Cagliari, 04/02/2025

Esame di MATEMATICA – CdL in FARMACIA

MATRICOLA ____

NOME e COGNOME ____

1) Geometria analitica (5 punti)

Si considerino l'ellisse di centro C (-1; 0) e semiassi orizzontale *a* e verticale *b* di lunghezza pari a 3 e 2 rispettivamente, nonché la retta passante per i punti A (-2; 4) e B (1; -2).

Si trovino gli eventuali punti di intersezione tra l'ellisse e la retta.

2) Studio di funzione: Crescita e declino di una tecnologia emergente (13 punti)

Il Ciclo di Vita del Prodotto è un modello che descrive le fasi che un prodotto attraversa dalla sua introduzione fino al suo ritiro dal mercato. Queste fasi sono quattro: l'introduzione, in cui il prodotto viene lanciato e le vendite sono inizialmente basse; la crescita, durante la quale le vendite aumentano rapidamente mentre il prodotto guadagna popolarità; la maturità, caratterizzata da una stabilizzazione delle vendite con intensa concorrenza; il declino, quando le vendite diminuiscono poiché il prodotto viene sostituito da nuove innovazioni o cambiamenti nel comportamento dei consumatori. Questo modello aiuta le aziende a pianificare strategie di marketing e gestione delle risorse.

Sia data la seguente funzione, che modellizza il ciclo di vita di un certo prodotto in termini di numero di prodotti venduti (in numero di unità) in funzione del tempo (in anni):

$$N(t) = kt^3e^{-t}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Si ricavi dopo quanto tempo si raggiunge il massimo delle vendite. (2 punti)
b. Si calcoli il valore che deve assumere *k* perché nel nono anno risultino essere state vendute 900 unità. (1 punto)
c. Qual è il numero massimo di vendite annuali raggiunto? (1 punto)
d. Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare la funzione N*(t)*, tracciandone il grafico. (7 punti)
e. Ricavare (con uno studio per punti) dopo quanto tempo si prevede che il prodotto non venga più acquistato. (2 punti)

3) Calcolo integrale: Ciclo di vita di un'app (7 punti)

Sia data la seguente funzione, che modellizza il numero di download di una certa applicazione in funzione del tempo (in anni):

$$n(t) = kt^3e^{-t^4}$$

Dove *k* è una costante positiva e non nulla.

a. Ricavare la formula (i.e. funzione *N(t)*) che permette di calcolare il numero totale di download effettuati fino ad un certo tempo t_x. (4 punti)
b. Ricavare la costante *k* perché il numero totale di download effettuati durante il primo anno dal lancio dell'app sia pari a 1400. (1 punti)
c. Quanto risulta essere, approssimativamente, il ciclo di vita di questa app e quanti sono stati i download totali? (2 punti)

4) Statistica: Confronto tra applicazioni (5 punti)

Tre diverse startup mettono sul mercato tre applicazioni simili.
Sia data la seguente tabella che lega il numero di download al costo di sviluppo di ciascuna delle app:

APPLICAZIONI	**A**	**B**	**C**
Spesa totale	10 500 €	12 300 €	11 900 €
Numero di download	7332	9035	8871

a) Effettuare un'analisi statistica, verificando il tipo di correlazione tra il costo di sviluppo ed il numero di download. (3 punti)
b) Visualizzare i dati in tabella in un grafico, sovrapponendoli ad un modello di regressione lineare. (2 punti)

SOLUZIONI

1) GEOMETRIA ANALITICA

DATI

$$x_C = -1 \quad y_C = 0 \qquad a = 3 \rightarrow a^2 = 9 \quad b = 2 \rightarrow \ b^2 = 4$$

$$x_A = -2 \quad y_A = 4 \qquad x_B = 1 \quad y_B = -2$$

SOLUZIONE

Equazione dell'ellisse:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1 \ \rightarrow \ 4x^2 + 9y^2 + 8x - 32 = 0$$

Equazione della retta:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow \ y = -2x$$

I punti di intersezione si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 + 8x - 32 = 0 \\ y = -2x \end{cases}$$

Sostituendo, si ottiene la seguente equazione di secondo grado:

$$5x^2 + x - 4 = 0$$

Con soluzioni:

$$\begin{cases} x_{P1} = -1 \\ x_{P2} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Da cui, sostituendo in $y_P = -x_P + 1$ e, perciò, facendo attenzione a cambiare di segno x_P:

$$\begin{cases} y_{P1} = 2 \\ y_{P2} = -\dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Infine, si ottiene

$$\mathrm{P}_1(-1;\ 2)\ , \mathrm{P}_2\left(\frac{4}{5};\ -\frac{8}{5}\right)$$

2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$N(t) = kt^3\, e^{-t} \qquad t_b = 9 \qquad N(t_b) = N_b = 900$$

a)

Il valore massimo della funzione si ottiene laddove la derivata prima si annulla:

$$N'(t) = k[3t^2e^{-t} - t^3e^{-t}]$$

$$\boldsymbol{N'(t) = kt^2(3 - t)e^{-t}}$$

$$N'(t) = 0 \;\; \rightarrow \;\; t = 0;\; t = 3 \;\; \rightarrow \;\; t_{max} = 3\; anni$$

b)

Sapendo il valore di *N*, pari a 900, per un dato valore di *t*, ovvero 9, possiamo calcolare *k*, invertendo la funzione *N(t)*:

$$N_b = k{t_b}^3\, e^{-t_b} \quad \rightarrow \quad k = \frac{N_b}{{t_b}^3\, e^{-t_b}} = 10\,000$$

La funzione sarà quindi:

$$N(t) = 10\,000\; t^3\, e^{-t}$$

Con derivata prima:

$$N'(t) = 10\,000\; t^2(3 - t)e^{-t}$$

c)

Il numero massimo di vendite raggiunto sarà $N(t_{max})$:

$$N(t_{max}) = k{t_{max}}^3\, e^{-t_{max}} = 13\,443\; unità$$

d)

Lo studio della funzione *N(t)* dev'essere fatto in considerazione del fatto che sia la variabile indipendente *t* che quella dipendente *N* corrispondano a grandezze positive. Perciò, il grafico della funzione ed i valori ad esso associati interesseranno solo il primo quadrante (ove ascissa ed ordinata sono entrambe positive). Queste considerazioni permettono delle semplificazioni nello studio di funzione, andando ad escludere tutto ciò che riguarda le regioni di spazio esterne al primo quadrante stesso.

$$N(t) = 10\,000\; t^3\, e^{-t}$$

- Dominio:

$$D: \forall t \in R \qquad (t \geq 0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ascisse:

$$N(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad P_0(0;0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ordinate:

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad N(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad P_0(0;0)$$

- Studio del segno:

$$N(t) > 0 \quad \rightarrow \quad C > 0$$

$10\,000\, t^3 > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0$

$e^{-t} > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$\boldsymbol{N(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0}$$

- Comportamento asintotico:

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty} kt^3\, e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{kt^3}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Utilizzando il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{kt^3}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{3kt^2}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{6kt}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{6k}{e^t} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

- Studio della derivata prima ed estremi relativi:

$$\boldsymbol{N'(t) = 10\,000\, t^2(3-t)e^{-t}}$$

$N'(t) = 0 \;\rightarrow\; t = 0;\ t = 3$

$N(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad P_0(0;0)$

$N(t=3) = 13\,443 \quad \rightarrow \quad M(3;13\,443)$

$$N'(t) > 0$$

$t^2 > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$3 - t > 0 \quad \rightarrow \quad -t > -3 \quad \rightarrow \quad t < 3$

$e^{-t} > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$\boldsymbol{N'(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t < 3}$$

- Studio della derivata seconda e punti di flesso:

$$N'(t) = k\,[3t^2e^{-t} - t^3e^{-t}]$$

$$N''(t) = k(6t\,e^{-t} - 3t^2e^{-t} - 3t^2e^{-t} + t^3e^{-t})$$

$$\boldsymbol{N''(t) = 10\,000\,t(t^2 - 6t + 6)e^{-t}}$$

$$N''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0$$

$$N''(t) = 0 \rightarrow \quad t^2 - 6t + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3} = \begin{cases} t_1 = 4.732\ anni \\ t_2 = 1.268\ anni \end{cases}$$

$$N(t_1) = 5\,737$$

$$N(t_2) = 9\,334$$

$$\boldsymbol{F_1(4.7;\ 5\,737)}$$

$$\boldsymbol{F_2(1.3;\ 9\,334)}$$

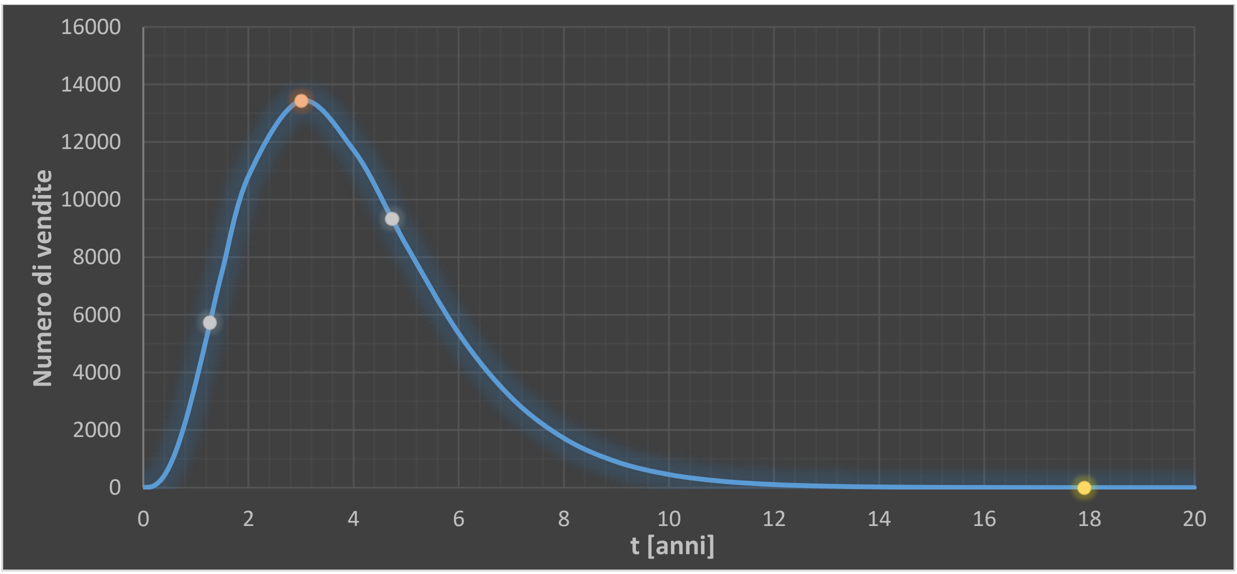
$N''(t) > 0$

$t > 0$

$t^2 - 6t + 6 > 0 \quad \rightarrow \quad t < 3 - \sqrt{3} \cup t > 3 + \sqrt{3}$

$e^{-t} > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$N''(t) > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < t < 3 - \sqrt{3} \cup t > 3 + \sqrt{3}$$



e)

Di seguito, viene riportata la tabella relativa allo studio della funzione per punti. Il numero di vendite scende al di sotto dell'unità dopo quasi 18 anni.

t [anni]	N
0	0.00
0.2	65.50
0.4	429.00
0.6	1185.43
0.8	2300.56
1	3678.79
1.2	5204.64
1.268	**5736.83**
1.5	7530.64
2	10826.82
3	**13442.51**
4	11722.01
4.732	**9333.68**
5	8422.43
6	5354.10
7	3127.76
8	1717.57
9	899.66
10	454.00
11	222.30
12	106.17
13	49.66
14	22.82
15	10.32
16	4.61
17	2.03
17.5	1.35
17.8	1.05
17.9	**0.97**
18	0.89
19	0.38
20	0.16

3) INTEGRALE

DATI

$$n(t) = kt^3\, e^{-t^4} \qquad N_{1°\,anno} = 1\,400$$

a)

Per calcolare il numero di download effettuati fino ad un certo momento t_x, bisogna svolgere l'integrale definito della funzione tra 0 e t_x :

$$N(t) = \int_0^{t_x} n(t)dt = k\int_0^{t_x} t^3\, e^{-t^4}\ dt = k\left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^{t_x} (-4)t^3\, e^{-t^4}\ dt = -\frac{k}{4}\left[e^{-t^4} + c\right]_0^{t_x}$$

$$N(t) = -\frac{k}{4}\left[e^{-t_x{}^4} + c - \left(e^{-0^4} + c\right)\right] = -\frac{k}{4}\left[e^{-t_x{}^4} + c - (1 + c)\right] = -\frac{k}{4}\left[e^{-t_x{}^4} - 1\right]$$

$$\boldsymbol{N(t) = \frac{k}{4}\left(1 - e^{-t_x{}^4}\right)}$$

b)

$$N_{1°\,anno} = N(t_x = 1) = N_1 = 1\,400 \quad \rightarrow \quad k = -\frac{4\,N_1}{e^{-1} - 1} = \frac{4\,N_1}{1 - e^{-1}} \quad \rightarrow \quad k = 8\,859$$

c)

Utilizzando la formula trovata sopra e sostituendo a t_x un certo valore annuale, si ottiene il numero di download effettuati fino a quel momento. Per calcolare il ciclo di vita del prodotto, basta verificare dopo quanto tempo il prodotto non viene più venduto ed il valore di *N* non aumenta più. In particolare, si ottiene che dal secondo anno in poi (i.e. t_x = 2) il valore di *N* resta invariato:

$$N(2) = \frac{k}{4}\left(1 - e^{-2^4}\right) \approx 2\,215$$

t [anni]	N
0	0
1	1400
2	**2215**
3	2215
4	2215

4) STATISTICA

APPLICAZIONI	A	B	C
Spesa totale	10 500 €	12 300 €	11 900 €
Numero di download	7332	9035	8871

a)

Avendo un numero limitato di campioni (N = 3), si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario.

Si ottiene:

Prodotti	Media	Varianza campionaria	Dev Std campionaria
Spesa totale	11 566.67 €	893 333.33 €	945.16 €
Numero di download	8 412.67	882 604.33	939.47

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione:

$$S_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N-1} = 880\,933$$

$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = 0.992$$

La correlazione è quindi di natura molto forte e le grandezze sono direttamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$\boldsymbol{y = 0.986\,x - 2993.5}$$