Cagliari, 21/02/2025

**Esame di MATEMATICA E STATISTICA – CdL in BIOLOGIA (PARI)**

**MATRICOLA** ________________________________________________

**NOME e COGNOME** ____________________________________________

## 1) Goniometria (4 punti)

a) Risolvere la seguente espressione goniometrica (2 punti):

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

b) Risolvere la seguente equazione goniometrica (2 punti):

$$2\cos^2 x - 1 = 0$$

## 2) Studio di funzione: Degradazione del Paracetamolo nel Sangue (13 punti)

*Il paracetamolo (acetaminofene) è un farmaco comunemente usato per alleviare il dolore e ridurre la febbre. La concentrazione nel sangue di paracetamolo diminuisce nel tempo mentre viene metabolizzato ed eliminato dal corpo.*

Viene somministrata ad un paziente una dose di paracetamolo con una concentrazione iniziale nel sangue di 2 mg/L. La concentrazione del farmaco diminuisce gradualmente nel tempo (in ore) a causa del metabolismo e dell'eliminazione da parte del corpo umano secondo la seguente legge (per $t \geq 0$):

$$C(t) = \frac{t+k}{t^2+8t+15}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Ricavare il valore di *k* perché il tasso di variazione iniziale (i.e. il valore della derivata prima per t = 0) sia pari a -1 mg/L per ora (-1 mg/L/hr). (3 punti)
b. Si calcoli il valore iniziale della funzione *C(t)*. (1 punto)
c. Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare la funzione generica *C(x)* per $x \geq -30$, escludendo il calcolo della derivata seconda e tracciandone il grafico. (6 punti)
d. Effettuando uno studio per punti, tracciare il grafico dettagliato della funzione *C(t)* nel corso delle 24 ore e ricavare dopo quanto tempo la concentrazione raggiunge il valore di 0.125 mg/L. (3 punti)

## 3) Calcolo integrale: Crescita di una popolazione batterica (6 punti)

Sia data la seguente funzione, che modellizza la velocità di crescita di una popolazione batterica (in milioni di unità) rispetto al tempo (in secondi) in un ambiente ricco di nutrienti:

$$v(t) = \frac{t+1}{t^2+8t+15}$$

a. Ricavare la formula che permette di calcolare il numero di batteri sviluppati fino ad un certo tempo. (4 punti)
b. Tracciare il grafico della funzione trovata (per punti), per un numero di batteri iniziale pari a un milione e focalizzandosi sulla prima ora.
(2 punti)

## 4) Statistica: Tasso di omicidi nelle capitali europee (7 punti)

Si vuole effettuare una statistica sul tasso di omicidi nelle grandi capitali europee (con una popolazione uguale o superiore al milione di abitanti).

Facendo riferimento a dati relativi all'anno 2020, si ottiene la seguente tabella che lega la popolazione di tre grandi città (in milioni di abitanti) al numero di omicidi registrati in quell'anno:

| **Città** | **Roma** | **Madrid** | **Atene** |
|---|---|---|---|
| **Popolazione (mln ab.)** | 2.823 | 6.756 | 3.153 |
| **Omicidi** | 26 | 39 | 23 |

a) Effettuare un'analisi statistica, verificando il tipo di correlazione tra la popolazione ed il numero di omicidi registrati. (3 punti)
b) Visualizzare i dati in tabella in un grafico, sovrapponendoli ad un modello di regressione lineare. (2 punti)
c) Utilizzando un test adeguato, verificare l'ipotesi che il tasso di omicidi di una grande capitale europea sia di 4 omicidi per milione di abitanti. (2 punti)

# Valori di riferimento per i test di ipotesi

| Test T | | | | |
|---|---|---|---|---|
| α / v | 0.10 | 0.05 | 0.01 | 0.001 |
| **1** | 6.314 | 12.706 | 63.657 | 636.619 |
| **2** | 2.920 | 4.303 | 9.925 | 31.599 |
| **3** | 2.353 | 3.182 | 5.841 | 12.924 |
| **4** | 2.132 | 2.776 | 4.604 | 8.610 |
| **5** | 2.015 | 2.571 | 4.032 | 6.869 |
| **6** | 1.943 | 2.447 | 3.707 | 5.959 |
| **7** | 1.895 | 2.365 | 3.499 | 5.408 |
| **8** | 1.860 | 2.306 | 3.355 | 5.041 |
| **9** | 1.833 | 2.262 | 3.250 | 4.781 |
| **10** | 1.812 | 2.228 | 3.169 | 4.587 |
| **11** | 1.796 | 2.201 | 3.106 | 4.437 |
| **12** | 1.782 | 2.179 | 3.055 | 4.318 |
| **13** | 1.771 | 2.160 | 3.012 | 4.221 |
| **14** | 1.761 | 2.145 | 2.977 | 4.140 |
| **15** | 1.753 | 2.131 | 2.947 | 4.073 |
| **16** | 1.746 | 2.120 | 2.921 | 4.015 |
| **17** | 1.740 | 2.110 | 2.898 | 3.965 |
| **18** | 1.734 | 2.101 | 2.878 | 3.922 |
| **19** | 1.729 | 2.093 | 2.861 | 3.883 |
| **20** | 1.725 | 2.086 | 2.845 | 3.850 |
| **21** | 1.721 | 2.080 | 2.831 | 3.819 |
| **22** | 1.717 | 2.074 | 2.819 | 3.792 |
| **23** | 1.714 | 2.069 | 2.807 | 3.768 |
| **24** | 1.711 | 2.064 | 2.797 | 3.745 |
| **25** | 1.708 | 2.060 | 2.787 | 3.725 |
| **26** | 1.706 | 2.056 | 2.779 | 3.707 |
| **27** | 1.703 | 2.052 | 2.771 | 3.690 |
| **28** | 1.701 | 2.048 | 2.763 | 3.674 |
| **29** | 1.699 | 2.045 | 2.756 | 3.659 |
| **30** | 1.697 | 2.042 | 2.750 | 3.646 |
| **39** | 1.685 | 2.023 | 2.708 | 3.558 |
| **49** | 1.677 | 2.010 | 2.680 | 3.500 |
| **59** | 1.671 | 2.001 | 2.662 | 3.463 |
| **69** | 1.667 | 1.995 | 2.649 | 3.437 |
| **79** | 1.664 | 1.990 | 2.640 | 3.418 |
| **89** | 1.662 | 1.987 | 2.632 | 3.403 |
| **99** | 1.660 | 1.984 | 2.626 | 3.392 |

| Test Z | | | | |
|---|---|---|---|---|
| α | 0.10 | 0.05 | 0.01 | 0.001 |
| | 1.645 | 1.960 | 2.576 | 3.291 |

| Test $\chi^2$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| α / v | 0.10 | 0.05 | 0.01 | 0.001 |
| **1** | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 10.828 |
| **2** | 4.605 | 5.991 | 9.210 | 13.816 |
| **3** | 6.251 | 7.815 | 11.345 | 16.266 |
| **4** | 7.779 | 9.488 | 13.277 | 18.467 |
| **5** | 9.236 | 11.070 | 15.086 | 20.515 |
| **6** | 10.645 | 12.592 | 16.812 | 22.458 |
| **7** | 12.017 | 14.067 | 18.475 | 24.322 |
| **8** | 13.362 | 15.507 | 20.090 | 26.124 |
| **9** | 14.684 | 16.919 | 21.666 | 27.877 |
| **10** | 15.987 | 18.307 | 23.209 | 29.588 |
| **11** | 17.275 | 19.675 | 24.725 | 31.264 |
| **12** | 18.549 | 21.026 | 26.217 | 32.909 |
| **13** | 19.812 | 22.362 | 27.688 | 34.528 |
| **14** | 21.064 | 23.685 | 29.141 | 36.123 |
| **15** | 22.307 | 24.996 | 30.578 | 37.697 |
| **16** | 23.542 | 26.296 | 32.000 | 39.252 |
| **17** | 24.769 | 27.587 | 33.409 | 40.790 |
| **18** | 25.989 | 28.869 | 34.805 | 42.312 |
| **19** | 27.204 | 30.144 | 36.191 | 43.820 |
| **20** | 28.412 | 31.410 | 37.566 | 45.315 |
| **21** | 29.615 | 32.671 | 38.932 | 46.797 |
| **22** | 30.813 | 33.924 | 40.289 | 48.268 |
| **23** | 32.007 | 35.172 | 41.638 | 49.728 |
| **24** | 33.196 | 36.415 | 42.980 | 51.179 |
| **25** | 34.382 | 37.652 | 44.314 | 52.620 |
| **26** | 35.563 | 38.885 | 45.642 | 54.052 |
| **27** | 36.741 | 40.113 | 46.963 | 55.476 |
| **28** | 37.916 | 41.337 | 48.278 | 56.892 |
| **29** | 39.087 | 42.557 | 49.588 | 58.301 |
| **30** | 40.256 | 43.773 | 50.892 | 59.703 |

$$Z^* = \frac{|x - \mu|}{\sigma}\sqrt{n} \qquad T^*_{n-1} = \frac{|x - \mu|}{s}\sqrt{n}$$

$$\chi^2_{(n-1)(m-1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(f_i^{expected} - f_i^{observed}\right)^2}{f_i^{expected}}$$

Retta di regressione lineare (generica): $m = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X{}^2}$ $\quad q = \bar{y} - m\bar{x}$

# SOLUZIONI

## 1) GONIOMETRIA

a)

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{4}+\frac{1}{2}=\mathbf{0}$$

b)

$$2\cos^2 x-1=0$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad\cos x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad\rightarrow\quad x=\pm\dfrac{\pi}{4}\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad\rightarrow\quad x=\pi\pm\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{x=\pm\frac{\pi}{4}}\quad\cup\quad\boldsymbol{x=\pi\pm\frac{\pi}{4}}$$

## 2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$C(t)=\frac{t+k}{t^2+8t+15}\qquad C_0=2\frac{mg}{L}\qquad C'(t=0)=-1\frac{mg}{L\cdot hr}$$

a) $C'_0=-1$

$$C'(t)=\frac{t^2+8t+15-(t+k)(2t+8)}{(t^2+8t+15)^2}=\frac{-t^2-2kt+15-8k}{(t^2+8t+15)^2}$$

$$C'_0=\frac{15-8k}{15^2}=-1\quad\rightarrow\quad 15-8k=15^2\quad\rightarrow\quad\boldsymbol{k=30}$$

$$\boldsymbol{C(t)=\frac{t+30}{t^2+8t+15}}$$

b)

$$C_0=C(t=0)=\frac{30}{15}=2$$

c)

$$\boldsymbol{C(x) = \frac{x+30}{x^2+8x+15} \qquad con\ x \geq -30}$$

- DOMINIO

$$x^2+8x+15 \neq 0 \quad \rightarrow \quad (x+3)(x+5) \neq 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{x \neq -5} \\ \boldsymbol{x \neq -3} \end{cases}$$

- INTERSEZIONI ASSE X

$C(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x+30 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -30 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A(-30;0)}$

- INTERSEZIONI ASSE Y

$x = 0 \quad \rightarrow \quad C = 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{B(0;2)}$

- STUDIO DEL SEGNO

$$C(x) > 0$$

$N(x) > 0 \quad \rightarrow \quad x > -30$
$D(x) > 0 \quad \rightarrow \quad (x+3)(x+5) > 0 \quad \rightarrow \quad x < -5 \cup x > -3$

$$C(x) > 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{-30 < x < -5 \cup x > -3}$$

- LIMITI – COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI

$$\lim_{x \to +\infty} C(x) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+30}{x^2+8x+15} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

- LIMITI – COMPORTAMENTO NELL'INTORNO DEGLI ASINTOTI VERTICALI

$$\lim_{x \to -5^-} C(x) = \frac{25}{-2 \cdot 0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -5^+} C(x) = \frac{25}{-2 \cdot 0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^-} C(x) = \frac{27}{2 \cdot 0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -3^+} C(x) = \frac{27}{2 \cdot 0^+} = +\infty$$

- SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA ED ESTREMI RELATIVI

$$\boldsymbol{C'(x) = \frac{-x^2 - 60x - 225}{(x^2 + 8x + 15)^2}}$$

$C'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad N'(x) = 0$

$-x^2 - 60x - 225 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 60x + 225 = 0$

$\Delta = 60^2 - 4 \cdot 225 = 2700$

$x_{1,2} = \frac{-60 \pm \sqrt{2700}}{2} = \frac{-60 \pm 30\sqrt{3}}{2} = -30 \pm 15\sqrt{3} = 15\left(-2 \pm \sqrt{3}\right)$

$x_1 = 15\left(-2 + \sqrt{3}\right) \approx -4 \quad \rightarrow \quad y_1 = C(x_1) = -26 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M(-4; -26)}$

$x_2 = 15\left(-2 - \sqrt{3}\right) \approx -56$ FUORI DOMINIO

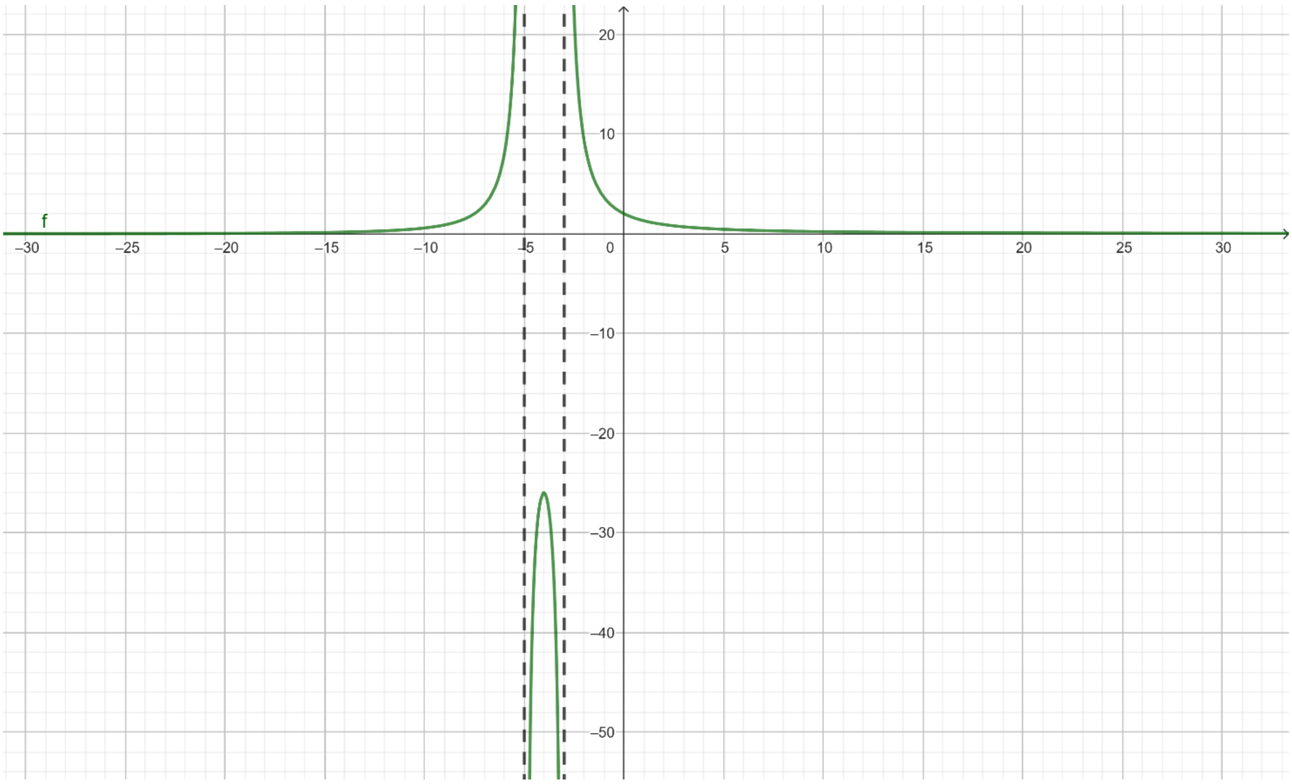
$C'(x) \geq 0$

$N'(x) \geq 0 \quad \rightarrow \quad -x^2 - 60x - 225 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 60x + 225 \leq 0$

$-56 \leq x \leq -4 \quad \rightarrow \quad -30 \leq x \leq -4$

$D'(x) \geq 0 \quad \rightarrow \quad (x^2 + 8x + 15)^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \forall x \in R$

$\boldsymbol{C'(x) \geq 0 \quad \rightarrow \quad -30 \leq x \leq -4}$

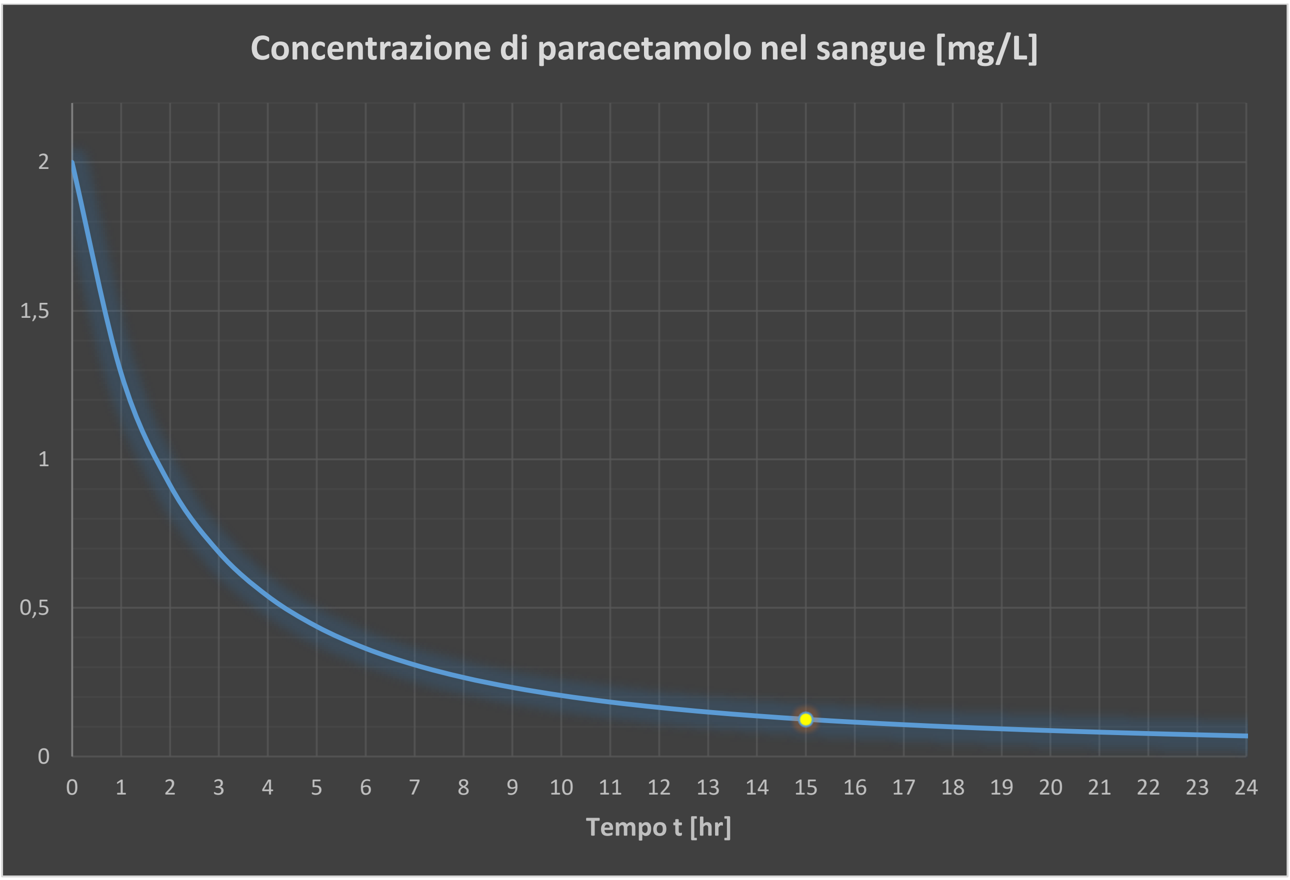


d)

$$C(t) = \frac{t + 30}{t^2 + 8t + 15} \qquad C_S = 0.125\, mg/L$$

| t [hr] | C [mg/L] |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 1.292 |
| 2 | 0.914 |
| 3 | 0.688 |
| 4 | 0.540 |
| 5 | 0.438 |
| 6 | 0.364 |
| 7 | 0.308 |
| 8 | 0.266 |
| 9 | 0.232 |
| 10 | 0.205 |
| 11 | 0.183 |
| 12 | 0.165 |
| 13 | 0.149 |
| 14 | 0.136 |
| **15** | **0.125** |
| 16 | 0.115 |
| 17 | 0.107 |
| 18 | 0.099 |
| 19 | 0.093 |
| 20 | 0.087 |
| 21 | 0.082 |
| 22 | 0.077 |
| 23 | 0.073 |
| 24 | 0.069 |

N.B.: La frequenza di campionamento, ovvero il numero di ore ogni cui calcolare il valore della funzione, deve essere tale da permettere di disegnare un grafico qualitativamente accurato e corretto.  In questo caso, si propone una frequenza oraria con 25 campioni (0-24) per completezza di esposizione e per motivi pratici legati alla realizzazione del grafico su excel, ma sarebbe stato sufficiente anche un numero di campioni inferiore.


Concentrazione di paracetamolo nel sangue [mg/L]
2
1,5
1
0,5
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
Tempo t [hr]

## 3) INTEGRALE

$$v(t) = \frac{t+1}{t^2+8t+15}$$

a)

Per calcolare il numero di download effettuati fino ad un certo momento $t_x$, bisogna svolgere l'integrale definito della funzione tra 0 e $t_x$ :

$$N(t) = \int_0^{t_x} v(t)\, dt$$

$$\frac{t+1}{t^2+8t+15} = \frac{A}{t+3} + \frac{B}{t+5} = \frac{(A+B)t+5A+3B}{(t+3)(t+5)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 5A+3B=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

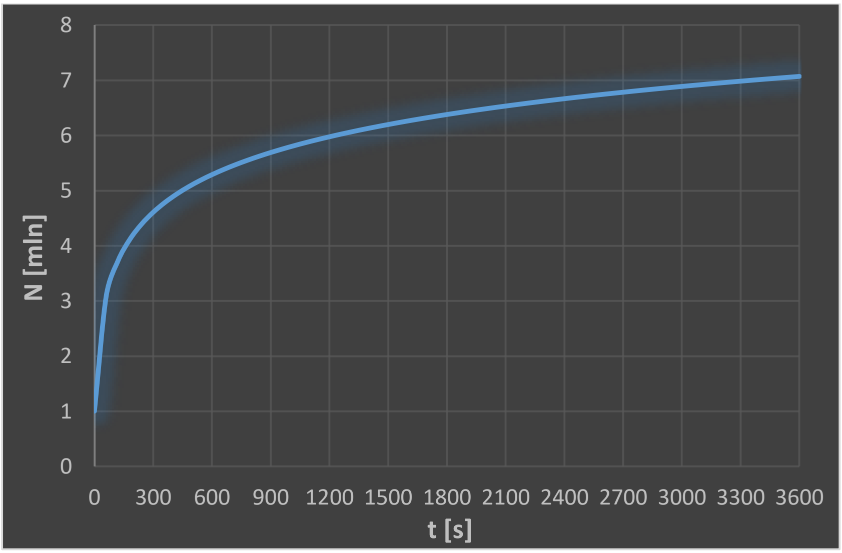
$$v(t) = \frac{2}{t+5} - \frac{1}{t+3}$$

$$N(t) = \int_0^{t_x} v(t)\, dt = \int_0^{t_x} \left(\frac{2}{t+5} - \frac{1}{t+3}\right) dt = [2\ln(t+5) - \ln(t+3) + c]_0^{t_x}$$

$$\boldsymbol{N(t) = 2\ln(t_x+5) - \ln(t_x+3) - (2\ln 5 - \ln 3) \quad | \quad N(t) = \ln\left[\frac{(t_x+5)^2}{t_x+3}\right] - \ln\frac{25}{3}}$$

b)

| t [s] | N [mln] |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 60 | 3.085 |
| 120 | 3.724 |
| 180 | 4.111 |
| 240 | 4.389 |
| 300 | 4.607 |
| 360 | 4.785 |
| 420 | 4.937 |
| 480 | 5.068 |
| 540 | 5.184 |
| 600 | 5.288 |
| 1200 | 5.976 |
| 1800 | 6.379 |
| 2400 | 6.666 |
| 3000 | 6.888 |
| 3600 | 7.070 |




N.B.: Si noti come la frequenza di campionamento considerata non sia costante, ma sia stata adeguata alla funzione stessa.

## 4) STATISTICA

| Città | Roma | Madrid | Atene |
|---|---|---|---|
| **Popolazione (mln ab.)** | 2.823 | 6.756 | 3.153 |
| **Omicidi** | 26 | 39 | 23 |

a)

Avendo un numero limitato di campioni (N = 3), si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario.

Si ottiene:

| Dati | Media | Varianza campionaria | Dev. Std campionaria |
|---|---|---|---|
| **Popolazione (mln ab.)** | 4.24 | 4.76 | 2.18 |
| **Omicidi** | 29.33 | 72.33 | 8.50 |

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione:

$$S_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N - 1} = 17.96$$

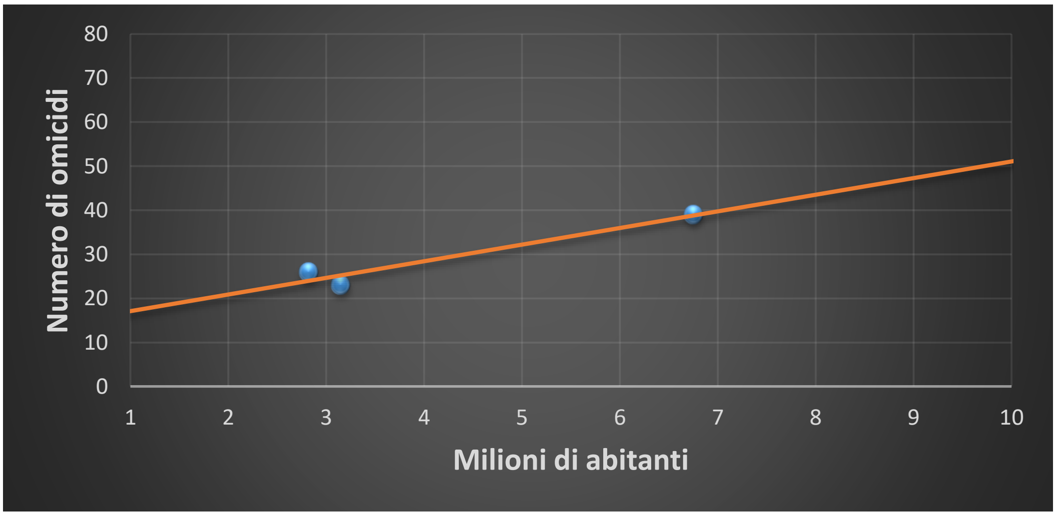
$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = 0.968$$

La correlazione è quindi di natura molto forte e le grandezze sono direttamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$\boldsymbol{y = 3.774\, x + 13.32}$$



c)

Il test fa riferimento al tasso di omicidi per milione di abitanti, quindi si dovrà ottenere la relativa serie di dati mediante il rapporto tra il numero di omicidi e la popolazione:

| Città | Roma | Madrid | Atene |
|---|---|---|---|
| **Popolazione (mln ab.)** | 2.823 | 6.756 | 3.153 |
| **Omicidi** | 26 | 39 | 23 |
| **Tasso di omicidi per milione di abitanti** | 9.21 | 5.77 | 7.29 |

Il test da effettuare dipende sostanzialmente dal numero di campioni considerati che, in questo caso è pari a *n = 3* . Per questo motivo, dovrà essere effettuato un test di tipo *t-Student* con gradi di libertà pari a $\nu = n - 1 = 2$ e dovrà essere utilizzata la seguente quantità pivotale:

$$\boxed{T^*_{n-1} = \frac{|x - \mu|}{s}\sqrt{n}}$$

E' necessario quindi calcolare media e deviazione standard campionaria della serie di dati ottenuta:

| | |
|---|---|
| Media | 7.43 |
| Varianza C | 2.967 |
| Dev Std C | 1.722 |
| **Pivot T*** | **3.445** |

| Test T | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **α** / **ν** | **0.10** | **0.05** | **0.01** | **0.001** |
| **1** | 6.314 | 12.706 | 63.657 | 636.619 |
| **2** | 2.920 | 4.303 | 9.925 | 31.599 |

Confrontando il valore ottenuto con quelli tabulati per $\nu = 2$, si ottiene che l'ipotesi nulla $H_0$ secondo la quale il tasso di omicidi sia pari a **4** è <u>negabile al 90% ma non al 95%</u>.